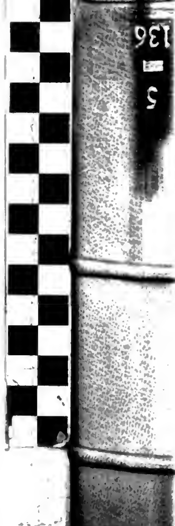
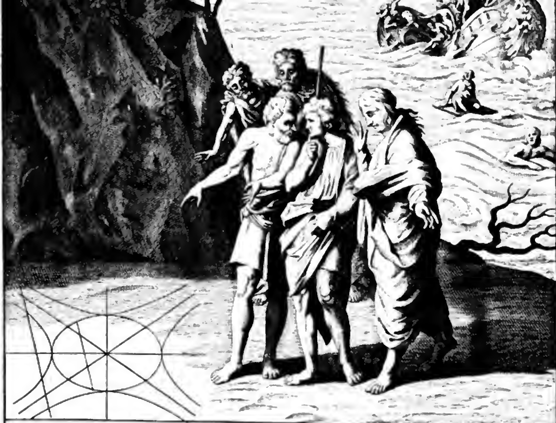










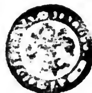
Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur; Bene speremus, Hominum enim vestigia video.

Vitruv. Architect. lib. 6. Praef.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCX.



Feb. 9. 1709.



CONICORUM

LIBRI IV. PRIORES

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS

ET

EUTOCII ASCALONITÆ

COMMENTARIIS.

Ex Codd. MSS. Græcis edidit EDMUNDUS HALLEIUS apud *Oxonienses* Geometriæ Professor *Savilianus*.

CONSTANTISSIMO,

APOLLONII CONICORUM

LIBROS QUATUOR,

Nunc primum GRÆCE & LATINE

EDITOS

In Perenne Grati Animi Teſtimonium

D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

E[...] *viro celeberrimo* D. Dav. Gregorio, *collegæ meo desideratissimo, in reipublicæ literariæ usum edito; idque eâ curâ eâque elegantiâ, ut eruditorum omnium plausum meruerit: Eidem mihique suaserunt amici artium optimarum amantissimi, ut unum aut alterum è veteribus Geometris ei comites adjungeremus. Hoc ut facere vellemus, Tu, Vir egregie,* D^ne^ Vice-Cancellarie,*assentiente Curatorum cœtu, auctoritate tuâ nosmet permovisti: Tu inquam, cui nihil antiquius est quam ut summo splendore gaudeat Academia nostra, bonæque literæ suam habeant & tueantur dignitatem. Cogitantibus igitur nobis quemnam Veterum potissimum eligeremus, in quo expoliendo opera nostra enitesceret,* Archimedes, *dum ætatem ejus & præstantiam respicimus, opem primus efflagitare visus est. Sed cum ille Elementa Conica ubique fere, ut prius cognita, assumpserit, quæ tamen non nisi ab* Apollonio *demonstrata habemus; atque* Archimedes Græce *pariter ac* Latine *aliquoties prodierit, dum* Pergæus *non nisi magna sui parte truncatus, idque versione minus fideli parumque eleganti, circumferretur: his causis adducti ad* Apollonium *emendandum & edendum nosmet summa cum alacritate accinximus; ea quidem lege ut* Gregorius *quatuor priores Conicorum libros cum* Eutocii *Commentariis* Græce Latineque *prelo pararet, atque ipse tres posteriores ex* Arabico *in* Latinum *sermonem verterem, Octavumque (quem temporis injuria desideramus) restituere conarer. Illi opus hoc aggredienti ad manus erat* Apollonii *Codex MS.* Græcus *è Bibliotheca* Savilii *Mathematica,*

b *præstantissimi*

ſionis ab Abdolmelec Schirazita Perſa *ante quingentos annos confectam: qui quidem codex à* Chriſtiano Ravio *ex Oriente advectus eſt, & ab eodem, magis quam facile exiſtimari poteſt, barbare traductus. Quandoque etiam mihi adjumento fuit altera Conicorum* Apollonii *Epitome ab* Abalphath Iſphahanenſi *adornata, quam haud ita commode traduxit* Abraham Echellenſis: *commentariis tamen uberrimis illuſtravit eximius ille Mathematicus & Philoſophus* Alphonſus Borellus. *Interpretatione autem mea, qua potui fide, ad umbilicum perducta, ad nos demum perlatum eſt exemplar illud* Golianum *antiquiſſimum, quod ab hæredibus* Golii *redemerat Vir maximus idemque optimus* Narciſſus Marſh *Archiepiſcopus* Armachanus; *quod, pro ſummo ſuo erga ſcientias Mathematicas amore, nobis ad operis emolumentum deeſſe noluit: codicem quantivis pretii per mare hyemale medioſque hoſtes ex* Hibernia *tranſmittens. Ex hoc optimæ notæ codice (qui ſeptem* Apollonii *libros complexus eſt) non ſolum Verſionem meam recenſui, & à mendis nonnullis liberavi; ſed & lacunas aliquot, quæ paſſim fere, etiam in* Græcis, *occurrebant, ſupplevi; ſenſumque auctoris, quoad ejus fieri potuit, primæva perſpicuitate donavi. His peractis, ad librum Octavum reſtituendum aggreſſus ſum; quem etiam ante ætatem* Thebit *deperditum fuiſſe comperimus: deprehendentes autem indicio* Pappi, *quod argumentum ejus argumento Septimi conjunctiſſimum fuerat, quodque problemata* διωρισμένα *Octavi è theorematis* διοριστικοῖς *Septimi limites ſuos habuerant, tam problemata ipſa quam eorundem ordinem aſſecutus mihi videor. Analyſes vero noſtras, ut & Compoſitiones ipſorum problematum, quas loco Apollonianarum*

rum

descripsit. Apud Euclidis *discipulos* Alexandriæ *diu operam dedit studiis Mathematicis*: *& sub* Philopatore (*qui imperii sui anno* XVII, *ante* Christum CCV. *diem obiit supremum*) *maxima erat in celebritate, teste* Ptolemæo Hephæstione *apud* Photium *Cod.* CXC. *adeo ut hinc liceat conjicere, quod annis circiter* XL. *minor fuerit* Archimede, *quodque non longo intervallo præcesserit* Geminum Rhodium, *certe* Hipparcho *majorem. Testatur autem* Geminus *hunc nostrum* Apollonium, *propter eximium hoc Conicorum opus, inter sui ævi Mathematicos* Magni Geometræ *nomen adeptum esse. Quanti illum æstimarunt Veteres non solum ex* Vitruvio *constat*, Cap. I. Lib. I. *ubi etiam* Archimedi, *saltem ordine, præfertur*; *sed ex eo quod, ut inter* Græcos *magni nominis commentatores habuerit quamplurimos*, Pappum, Hypatiam, Serenum *&* Eutocium, *ita & inter Orientales etiam nonnullos ingenii doctrinæque laude præcellentes*; *quales apud* Arabes *fuere* Thebit ben Corah *&* Beni Moses; *apud* Persas *vero* Abalphath *&* Abdolmelec, *à quibus in Epitomen redactus est*; *ac denique magnum illud Matheseos* Persicæ *lumen* Nasir-eddin, *qui Conica hæc omnia recensuit, notisque illustravit, circa annum* Christi MCCL. *Unde mirum fortaße videbitur tanti nominis autorem, & fere per bis mille annos inter principes Geometras habitum, in hoc erudito seculo nondum* Græce *comparuiße. Præter Conica autem multa alia scripsit* Apollonius *noster, autore* Pappo *in Præfatione ad librum* VII. Collect. Math.

quam

commentatus est in Apollonium *inscripsit* Anthemio Tralliano, *quæ vero in* Archimedem *præceptori suo* Isidoro Milesio *Mechanico: illi vero, Architecti clarissimi,* Justiniano *imperante celeberrimum Sanctæ* Sophiæ *templum exstruxerunt, statim ab Anno* Christi DXXXII. *teste* Procopio.

Quod vero ad Serenum *attinet, de eo nihil comperimus, nisi quod* Antissa *Insulæ* Lesbi *urbe ortus fuerit; &, præter Librum unum de Sectione Cylindri & alterum de Sectione Coni, Commentaria scripserit in* Apollonium; *quodque ante* Marinum (Procli *discipulum) vixerit, uti constat ex* Marini *Præfatione in* Euclidis *Data.*

Absoluta hac laboris mei & operum jam Vobis oblatorum historiola, reliquum est ut Vobis, Preli Curatoribus, gratias agam immortales, pro eo quo Mathesin, &, si id adjici patiemini, me quoque prosecuti estis studio; Deum O. M. obtestans atque precans, ut custodiat, servet, & protegat hunc rei literariæ statum, hanc florentissimam Academiam.

Erratis levioribus quæsumus ignoscat Lector, graviora sic corrigat.

Pag. 8. vers. 3. Eutocii lege [illegible] & in versione v. 2. *Pamphyliæ.* p. 10. v. 37. l. ἀρχαῖα στοιχεῖα [illegible] p. 10. v. 38. l. *disposita in textu exhibere.* p. 18. v. 51. l. ὅτι καί. p. 21. v. 35. l. [illegible] p. 22. v. 22. l. διὰ τῶν Z. p. 33. v. 17. l. ἴσος ἄρα ὁ H τῷ A. p. 43. v. 11. l. [illegible] v. 41. l. [illegible] v. 45. l. [illegible] p. 52. v. 16. l. [illegible] p. 56. v. penult. l. [illegible] ἡ ΓΔ [illegible] p. 92. v. 48. l. [illegible] p. 93. v. antepenult. l. *diametrum coni sectionem.* p. 94. v. 4. l. *applicare possint.* p. 99. v. 34. l. [illegible] p. 107. v. 3. l. ἡ ΔΕ. p. 144. in Schem. l. duc rectam ΓX. v. 42. l. [illegible] KH. p. 154. v. 22. l. ὑπὸ ΓΑΒ. p. 174. v. penult. l. τὸ ὑπὸ ΓΑ. p. 176. v. 19. l. ὑπὸ ΜΑΞ. p. 182. v. 23. l. [illegible] τὴν ΑΒ. p. 204. in Schem. 3. duc rectam ΒΔ.

ΠΑΠ-

ΗΧΘΩ γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος, καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ προσπιπτουσῶν. προσβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι ὀρθαί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ· κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΓΑ μείζων ἐστίν. ὥστε μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒ, καὶ ἔστω ΓΑ, καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΓΑ φανερόν. διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθάς ἡ ΑΓ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΓΕ· ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ ΕΓ τῆς ΓΑ· ὥστε μεγίστη μὲν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ τῶν ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε ἐπι-

DUCATUR [per 11. 11.] à puncto Γ ad planum circuli AB recta perpendicularis, quæ primum cadat intra circulum, sitque ΓΔ, & sumatur centrum circuli, quod sit E; & juncta ΔE producatur in utramque partem ad puncta A, B; deinde AΓ, ΓB jungantur. dico ipsam BΓ maximam esse, & AΓ minimam linearum omnium quæ à puncto Γ ad circulum AB pertingunt. ducatur enim alia quævis ΓZ, & ZΔ jungatur. major igitur est [per 7.3.] BΔ quam ΔZ, communis autem ΓΔ, & anguli qui ad Δ recti; ergo major est BΓ quàm ΓZ: eodem modo & ΓZ major ostendetur quàm ΓA. ex quibus apparet ΓB omnium maximam, AΓ vero minimam esse.

Rursus perpendicularis à puncto Γ ducta cadat in ipsius AB circuli circumferentiam, quæ sit ΓA, & ad circuli centrum Δ juncta AΔ producatur in B, & BΓ jungatur. dico BΓ maximam esse, & AΓ minimam. rectam igitur ΓB majorem esse quam ΓA perspicuum est. ducatur autem alia quævis recta ΓE; & jungatur AE. itaque quoniam AB diameter est, necessario major erit quam AE, & AΓ normalis est ipsis AB, AE; ergo ΓB quam ΓE major erit: & similiter major quàm ceteræ omnes. eodem modo & EΓ major ostendetur quam ΓA: quare BΓ maxima est, AΓ vero minima rectarum omnium, quæ ab ipso Γ ad circulum AB pertingunt.

Iisdem positis, cadat perpendicularis ΓΔ extra circulum, & ad circuli centrum E ducta ΔE producatur

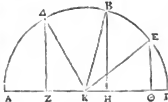
utramque partem producatur; cum uniuscujusque coni generationem tradat. si enim isosceles sit conus frustra produceretur, quia recta linea quæ convertitur circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctum manens semper æquali distet intervallo. sed quoniam potest & scalenus esse conus, in quo, ut jam demonstratum est, & maximum, & minimum latus invenitur, necessario illud apposuit; ut quæ minima est linea usqueadeo augeri intelligatur quoad fiat maximæ æqualis, & propterea circuli circumferentiam semper contingat.

κλιθῇ", ἐπειδήπερ τὴν τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, περιττὸν ἦν προσεκβάλλειν, διὰ τὸ τὴν περιαγομένην εὐθεῖαν αἰεί ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδήπερ μένοντος τοῦ σημείου ἴσον ἀπέχειν ἔμελλεν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κῶνος, ἔστι δέ, ὡς προδέδεικται, ἐν αὐτῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρά, ἀναγκαίως προσέθηκε τὸ "προσεκβληθῇ"· ἵνα αἰεὶ προσεκβαλλομένη ἡ ἐλαχίστη αὔξηται ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ, καὶ ψαύσῃ κατ' ἐκεῖνο τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

LEMMA II.

Sit linea ΑΒΓ, & positione data ΑΓ; omnes autem, quæ ab ipsa linea ad ΑΓ perpendiculares ducuntur, ita se habeant, ut quadratum uniuscujusque ipsarum æquale sit rectangulo sub basis segmentis, quæ ab ipsa secantur, contento: dico ΑΒΓ circuli circumferentiam esse, diametrum autem ipsius rectam ΑΓ.

DUCANTUR enim à punctis Δ, Β, Ε perpendiculares ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. ergo quadratum ex ΔΖ æquale est rectangulo sub ΑΖΓ, & quadratum ex ΒΗ rectangulo sub ΑΗΓ, ipsum vero ex ΕΘ quadratum rectangulo sub ΑΘΓ æquale. secetur ΑΓ bifariam in Κ, & ΚΔ, ΚΒ, ΚΕ jungantur. itaque quoniam ΑΖΓ rectangulum una cum quadrato ex ΖΚ est æquale [per 5. 2.] quadrato ex ΑΚ, & ipsi ΑΖΓ æquale est [ex hyp.] quadratum ex ΔΖ: erit quadratum ex ΔΖ una cum quadrato ab ipsa ΖΚ, hoc est [per 47. 1.] quadratum ex ΔΚ, æquale quadrato ex ΑΚ. quare ΑΚ ipsi ΚΔ est æqualis. similiter ostendemus & unamquamque rectarum ΒΚ, ΕΚ, ipsi ΑΚ vel ΚΓ æqualem esse: ergo ΑΒΓ circumferentia est circuli cujus centrum Κ, hoc est circa diametrum ΑΓ descripti.



ΛΗΜΜΑ β.

Εστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ θέσει ἡ ΑΓ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι ἀγόμεναι οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἀφ' ἑκάστης αὐτῶν τμηθέντων· λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν Δ, Β, Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΗ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΕΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΓ. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΚΒ, ΚΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΚ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΚ, ΕΚ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΚ ἢ τῇ ΚΓ· κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ τοῦ περὶ κέντρον τὸ Κ, τουτέστι τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ.

ΛΗΜΜΑ

καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. γίνεται ἄρα τὰ τρία.

sumptisque antecedentium dimidiis, & per conversionem rationis, ut BE ad EΓ ita ΓE ad EΔ: rectangulum igitur sub BEΔ [per 17.6.] æquale est quadrato ex ΓE. commune auferatur quadratum ex EΔ: ergo quod relinquitur [per 3. & 5. 2.] rectangulum sub AΔΓ rectangulo sub BΔE est æquale. rursus quoniam rectangulum sub BEΔ æquale est quadrato ex EΓ, utraque auferantur à quadrato ex BE: reliquum igitur rectangulum sub ABΓ [per 6 2.] reliquo sub EBΔ [per 2. 2.] æquale erit. quæ tria erant demonstranda.

ΛΗΜΜΑ ε΄.

Τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν συγκείμενον λόγον ἐχέτω ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.

Τῷ γὰρ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τοῦ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ, τουτέστι τοῦ Δ πρὸς τὸ Η· ἀλλὰ ὁ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Δ πρὸς τὸ Η, ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ἐστιν· ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Η, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ τοῦ Η πρὸς τὸ Δ

LEMMA V.

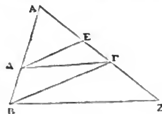
Habeat A ad B rationem compositam ex ratione Γ ad Δ, & ex ratione E ad Z: dico Γ ad Δ rationem compositam habere ex ratione A ad B, & ratione Z ad E.

FIAT enim ratio Δ ad H eadem quæ est E ad Z. & quoniam ratio A ad B composita est ex ratione Γ ad Δ, & ratione E ad Z, hoc est Δ ad H; ratio autem composita ex ratione Γ ad Δ, & ratione Δ ad H est [per 5. def 6.] eadem cum ratione Γ ad H: erit ut A ad B ita Γ ad H. rursus quoniam Γ ad Δ rationem habet compositam ex ratione Γ ad H, & ratione H ad Δ; & ratio Γ ad H demonstrata est eadem quæ A ad B; & invertendo ratio H ad Δ eadem

ΔΘ, EZ, hoc est ad parallelogrammum ΔZ.

LEMMA VII.

Sit triangulum ABΓ, sitque BΓ parallela ΔE, & quadrato ex ΓA æquale sit rectangulum sub ZAE: dico quod, si jungantur ΔΓ, BZ, recta BZ ipsi ΔΓ parallela est.



HOC vero manifeste patet. quoniam enim [ex hyp. & per 17. 6.] ut ZA ad AΓ ita est ΓA ad AE; & [per 2. 6.] ut ΓA ad AE (ob parallelas) ita BA ad AΔ: erit ut ZA ad AΓ ita BA ad AΔ. ergo BZ, ΔΓ sunt parallelæ.

ΛΗΜΜΑ ζ.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΖΑΕ· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, ΒΖ, γίνεται παράλληλος ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ.

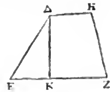
ΤΟΥΤΟ δὴ ἐστι φανερόν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἐστὶν, ἐν παραλλήλῳ, ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΓ.

LEMMA VIII.

Sit triangulum ABΓ, trapezium vero ΔEZH, ita ut ABΓ angulus angulo ΔEZ sit æqualis, & ΔH parallela EZ: dico ut rectangulum sub ABΓ ad rectangulum quod continetur sub utraque ipsarum ΔH, EZ, & ΔE, sic esse triangulum ABΓ ad trapezium ΔEZH.

DUCANTUR enim perpendiculares AΘ, ΔK. & quoniam angulus ABΓ æqualis est angulo ΔEZ, & qui est ad Θ rectus æqualis recto ad K; erit [per 4. 6.] ut BA ad AΘ ita EΔ ad ΔK. sed [per 1. 6.] ut BA ad AΘ ita rectangulum sub ABΓ ad id quod continetur sub AΘ, BΓ; & ut EΔ ad ΔK ita rectangulum quod continetur sub utraque ΔH, EZ, & ΔE, ad contentum sub utraque ΔH, EZ, & ΔK. est autem triangulum ABΓ dimidium rectan-





ΛΗΜΜΑ η.

Εστω τρίγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ, τραπέζιον δὲ τὸ ΔΕΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΕΖ παράλληλος· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΕ, οὕτω τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖΗ.

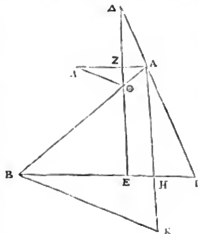
ΗΧΘΩΣΑΝ κάθετοι αἱ ΑΘ, ΔΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὀρθὴ Θ τῇ Κ ὀρθῇ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΚ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΒΓ· ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΕ, πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΚ. καὶ ἐστι τοῦ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΒΓ ἥμισυ τὸ

ΑΒΓ

οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

lum sub ΒΗΓ ita esse rectangulum sub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

ΚΕΙΣΘΩ τῷ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΚΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΑΛ ἐν κύκλῳ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἄλλη τις ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ.



PONATUR rectangulo sub ΒΗΓ æquale rectangulum sub ΑΗΚ, & rectangulo sub ΔΖΘ æquale rectangulum sub ΑΖΛ, & jungantur ΒΚ, ΘΛ. quoniam igitur [per 21. 3.] angulus ad Γ æqualis est angulo ΒΚΗ *; & angulus ΔΑΛ in circulo æqualis angulo ΖΘΛ: erit & angulus ΗΚΒ angulo ΖΘΛ æqualis. sed [per 29. 1.] & angulus ad Η est æqualis angulo ad Ζ: ergo [per 4. 6.] ut ΒΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΘ. quoniam autem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΕ ad ΕΒ; & ob parallelas ut ΘΕ ad ΕΒ ita ΘΖ ad ΖΑ: ut igitur ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ. quoniam igitur est quidem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ, ut vero ΒΗ ad ΗΚ ita alia quædam ΛΖ ad antecedentem ΖΘ: quare ex æquali in perturbata proportione [per 23. 5.] ut ΑΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΑ. ut vero ΑΗ ad ΗΚ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΗ ad rectangulum sub ΑΗΚ, hoc est [per const.] ad rectangulum sub ΒΗΓ; & ut ΛΖ ad ΖΑ ita rectangulum sub ΛΖΑ, hoc est sub ΔΖΘ, ad quadratum ex ΖΑ: ergo ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum sub ΒΗΓ ita rectangulum sub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

* Nam [per 35. 3.] circulus circa triangulum ΒΑΓ descriptus transit per Κ. Similiter circulus circa ΔΑΘ descriptus transit per Λ.

ratio quadrati ex Α Η ad rectangulum sub Β Η Γ, eadem cum illa quæ componitur ex ratione Θ Ζ ad Ζ Α, & ratione Δ Ζ ad Ζ Α. hæc autem est ratio rectanguli sub Δ Ζ Θ ad quadratum ex Ζ Α.

ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ Α Η πρὸς τὸ ὑπὸ Β Η Γ, ὁ αὐτὸς ὢν τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς Θ Ζ πρὸς Ζ Α, καὶ τοῦ τῆς Δ Ζ πρὸς Ζ Α, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ Δ Ζ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Α τετράγωνον.

ΑΠΟΛ-

LIBER PRIMUS,

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

ΕΙ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις, καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι· μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετά σου ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρων σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν. πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος· τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν. οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἴομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην, ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν· καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις, ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτά, εἰς τὸ σπουδαιότερον, διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι, οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες, ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες, αἰεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ

Apollonius Eudemo S. P.

SI & corpore vales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cum animo ero tranquilliori. non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam veniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris, egiſſemus, ſtatim illos cum eo communicavimus, non eâ quâ par erat diligentiâ (quòd quamprimum erat navigaturus) eos emendantes, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcribentes; utpote qui ea denuo eſſemus percurſuri. quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam

& pulchra & nova sunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus non positam esse ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas; verum ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc non satis feliciter: neque enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur absque iis quæ à nobis inventa sunt. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est; item coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Etenim quintus de minimis & maximis magna ex parte agit; Sextus de æqualibus, & similibus coni sectionibus: Septimus continet theoremata quæ determinandi vim habent; Octavus problemata conica determinata. At vero omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare. Vale.

θέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται· κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπὰ ἐστὶ περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλέον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν κώνου· τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

EUTOCII COMMENTARII.

APOLLONIUS geometra, *Anthemi* sodalis charissime, natus est *Pergæ*, quæ *Pamphiliæ* civitas est, tempore *Ptolemæi Euergetæ*, ut tradit *Heraclius* in *Archimedis* vita, qui etiam scribit *Archimedem* quidem primum conica theoremata fuisse aggressum; *Apollonium* vero, cum ea invenisset ab

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ, ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος εἰς τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδην, τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑρόντα

Ὃ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος κώνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕΖ, καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΖ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΕΖ γωνιῶν, καὶ ὀρθογωνίου μένοντος τοῦ κώνου, καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, δύο ὀρθαὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ, καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη Παραβολή, οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου. ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ· δύο ὀρθῶν μείζους ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς ΖΓ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς ΑΕ, προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην Ὑπερβολήν, οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ δύο ὀρθάς, ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, καὶ συμπίπτειν

Quod autem dicit manifestum faciemus in subjectis figuris. Sit enim per axem coni triangulum ΑΒΓ, & à quovis puncto Ε ducatur ipsi ΑΒ ad angulos rectos ΔΕΖ, & per ΔΖ ductum planum rectum ad ipsam ΑΒ conum secet: rectus igitur est uterque angulus ΑΕΔ, ΑΕΖ; rectanguloque existente cono & angulo ΒΑΓ recto, ut in prima figura apparet, erunt anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duo recti anguli. quare [per 28. 1.] parallela erit ΔΕΖ ipsi ΑΓ, & fiet in superficie coni sectio *Parabola*, sic dicta, quod recta ΔΕΖ, quæ communis sectio est plani secantis & trianguli per axem, parallela sit ipsi ΑΓ lateri trianguli. Sed si obtusangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso videlicet existente angulo ΒΑΓ, & angulo ΑΕΖ recto: anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duobus rectis majores erunt, & non conveniet ΔΕΖ cum ipso ΑΓ latere ad partes Ζ, Γ, sed ad partes Α, Ε, producta nimirum ΓΑ in Δ. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem, *Hyperbolam* dictam, vel ab eo quod anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ excedant duos rectos, vel quod ΔΕΖ excedat verticem coni, & cum ipsa ΓΑ extra

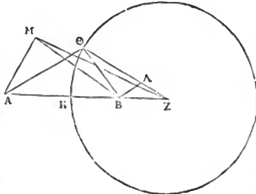
tere trianguli convenit quidem ad partes verticis coni; ellipsis vero diameter convenit cum latere trianguli ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolam & hyperbolam ex eorum numero esse quæ in infinitum augentur; at ellipsim non item: tota enim in seipsam redit, sicuti circulus.

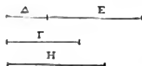
Cum autem plures editiones sint, ut etiam ipse [*Apollonius*] in epistola scribit; optimum fore judicavi, ex diversis quæ occurrerunt, evidentius dicta & meliori argumentandi ordine disposita exhibere; seorsum vero in commentariis, ut par est, diversos demonstrationis modos explicare. Itaque in epistola dicit primos quatuor libros hujus disciplinæ elementa continere. quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur, itemque principalia ipsarum accidentia: hæc autem sunt quæcunque ipsis in prima generatione contingunt; habent enim & alia quædam consequentia. Secundus autem liber tractat ea quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad rectas asymptotos: tum & alia quæ & generalem & necessariam utilitatem afferunt ad determinationes. Determinatio autem duplex est, ut manifeste patet; altera quidem post expositionem eorum quæ ad quæsitum pertinent: altera vero propositionem universalem esse prohibens, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis id quod propositum est fieri possit; ut in vigesimo secundo theoremate primi libri elementorum *Euclidis*: *Ex tribus rectis, quæ æquales sint tribus datis, triangulum constituere: oportet autem duas ejusmodi rectas reliqua esse majores, quomodocunque sumantur*, quippe cum demonstratum sit, omnis trianguli duo latera, quomodocunque sumpta, reliquo majora esse. Tertius vero conicorum liber continet multa & admirabilia theoremata, ad solidorum locorum compositionem utilia. *Planos Locos* antiqui geometræ appellare consueverunt, quando non ab uno duntaxat puncto sed à pluribus [*rectæ scilicet aut peripheriæ circuli*] problema efficitur: ut siquis proponat, Data recta terminata, invenire punctum à quo perpendicularis ducta ad datam rectam sit inter ipsius rectæ partes media proportionalis. *Locum* ejusmodi vocant geometræ; quoniam non unum duntaxat est punctum quod problema efficit, sed locus totus quem occupat circumferentia circuli circa datam rectam, tanquam diametrum, descripti. si enim super data re-

γωνε· τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος [illegible] τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη· ἡ δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. κἀκεῖνο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρον εἰσὶν αὐξανομένων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει, ὁμοίως τῷ κύκλῳ.

Πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτὰς, ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ, διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν· ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους, ὡς εἰκὸς, τρόπους τῶν ἀποδείξεων. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ ἐπιστολῇ τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχειν ἀγωγὴν στοιχειώδη. ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχειν τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα· ταῦτα δέ ἐστιν ὅσα συμβαίνει παρὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· ἔχουσι γὰρ καὶ ἕτερά τινα παρακολουθήματα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ παρὰ τὰς διαμέτρους, καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους· καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. ὁ διορισμὸς ὅτι διττός ἐστι παντί που δῆλον· ὁ μὲν μετὰ τὴν ἔκθεσιν ἐφιστάνων τί ἐστι τὸ ζητούμενον· ὁ δὲ τὴν πρότασιν ὁ συγχωρῶν καθολικὴν εἶναι, λέγων δὲ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν συστῆναι τὸ προτεθὲν, οἷός ἐστιν ὁ ἐν τῷ εἰκοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως· "ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ "εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ "δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μετα"λαμβανομένας", ἐπεὶ δέδεικται ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. τὸ δὲ τρίτον τῶν κωνικῶν περιέχει, φησὶ, πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων. Ἐπιπέδους τόπους ἔθος τοῖς παλαιοῖς γεωμέτραις λέγειν, ὅτε τῶν προβλημάτων οὐκ ἀφ' ἑνὸς σημείου μόνον, ἀλλ' ἀπὸ πλειόνων γίνεται τὸ ποίημα· οἷον εἰ ἐπιτάξει, τῆς εὐθείας δοθείσης πεπερασμένης εὑρεῖν τι σημεῖον ἀφ' οὗ ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέσον ἀνάλογον γίνεται τῶν τμημάτων. Τόπον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον, οὐ μόνον γὰρ ἕν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὅλος ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κύκλου. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας

Ε Δ. καὶ πάλιν γεγονέτω ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Α Β ἡ Δ πρὸς τὴν Β Ζ, καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Η. φανερὸν δὲ καὶ ὅτι ἥτε Γ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς Ε Δ καὶ τῆς Δ, καὶ ἡ Η τῶν Α Ζ, Ζ Β. καὶ μὲν κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῇ Η κύκλος γεγράφθω ὁ Κ Θ, φανερὸν δή ὅτι τέμνει ἡ Κ Θ περιφέρεια τὴν Α Β εὐθεῖαν, ἡ γὰρ Η εὐθεῖα μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν Α Ζ, Ζ Β. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ Α, Θ Β, Θ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ Ζ τῇ Η, καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ ἡ Θ Ζ πρὸς τὴν Ζ Β. καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ Θ Ζ Β ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Ζ Θ τῷ Θ Ζ Β τριγώνῳ, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ Ζ Θ Β γωνία τῇ ὑπὸ Θ Α Β. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Β τῇ Α Θ παράλληλος ἡ Β Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Β, καὶ ὡς ἄρα πρώτη ἡ Α Ζ πρὸς τρίτην τὴν Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β ἡ Α Θ πρὸς Β Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ ἡ Α Θ πρὸς Β Λ. πάλιν ἐπεὶ ἴση





inter Ε Δ & Δ; itemque Η mediam proportionalem inter Α Ζ, Ζ Β *. quare si centro Ζ & intervallo Η circulus Κ Θ describatur, circumferentia Κ Θ rectam Α Β secabit; nam recta Η est media proportionalis inter Α Ζ, Ζ Β. Sumatur in circumferentia quodvis punctum Θ, & jungantur Θ Α, Θ Β, Θ Ζ; erit igitur Θ Ζ ipsi Η æqualis, & propterea ut Α Ζ ad Ζ Θ ita Θ Ζ ad Ζ Β. sunt autem circa eundem angulum Θ Ζ Β latera proportionalia: ergo [per 6. 6.] triangulum Α Ζ Θ simile est triangulo Θ Ζ Β, & angulus Ζ Θ Β angulo Θ Α Β æqualis. ducatur per Β ipsi Α Θ parallela Β Λ. & quoniam ut Α Ζ ad Ζ Θ ita est Θ Ζ ad Ζ Β; erit [per cor. 20. 6.] prima Α Ζ ad tertiam Ζ Β ut quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Θ Ζ. sed [per 4. 6.] ut Α Ζ ad Ζ Β ita Α Θ ad Β Λ: ergo ut quadratum ex Α Ζ ad quadratum ex Ζ Θ ita Α Θ ad Β Λ. rursus quoniam angulus

* Quoniam [per constr.] Ε est ad Α Β ut Δ ad Β Ζ; erit [per 12. 5.] Ε Δ ad Α Ζ ut Δ ad Β Ζ. Sed Δ est ad Β Ζ [per constr.] ut Γ ad Η: & ideo Ε Δ est ad Α Ζ ut Γ ad Η; unde [per 4. & 16. 5.] Γ est ad Ε Δ ut Η ad Α Ζ. Rursus [per constr.] Γ est ad Ε Δ, ut Δ ad Γ, ut Β Ζ ad Η: ergo Β Ζ est ad Η ut Η ad Α Ζ.

Β Θ Ζ

supponatur esse A M ad M B. ergo [per cor. 20. 6.] ut E Δ ad Δ ita quadratum ex E Δ ad quadratum ex Γ, & quadratum ex A M ad quadratum ex M B*. ut autem E Δ ad Δ ita posita est A Z ad Z B: quare ut A Z ad Z B ita quadratum ex A M ad quadratum ex M B. &, ex iis quæ sunt superius dicta, si à puncto B ducatur recta ipsi A M parallela; ut A Z ad Z B ita demonstrabitur quadratum ex A Z ad quadratum ex Z M. Sed modo demonstratum est ut A Z ad Z B ita quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Θ: ergo Z Θ ipsi Z M est æqualis. quod est impossibile.

Loci igitur plani ejusmodi sunt. *Solidi* vero *Loci* appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipsorum problemata construuntur, à solidorum sectione generationem habent, quales sunt coni sectiones, & complures aliæ. Sunt & alii *Loci ad Superficiem* dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impositum est. Invehitur deinde *Apollonius* in *Euclidem*, non, ut *Pappus* & alii nonnulli arbitrantur, quod duas medias proportionales non invenerit: siquidem *Euclides* recte invenit unam mediam proportionalem, & non infeliciter, ut ipse inquit; duas vero proportionales medias neque omnino in elementis investigare aggressus est, & *Apollonius* de duabus mediis proportionalibus in tertio libro nihil inquirere videtur: sed, ut verisimile est, *Euclidem* in alio libro de *Locis* conscripto, qui ad nos non pervenerit, reprehendit. Quæ vero deinceps subjungit de quarto libro perspicua sunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis [ad 7. & 8. 3.] didicimus, si ab aliquo puncto in circulum rectæ ducantur, earum quidem quæ ad concavam ipsius circumferentiam pertingunt, maximam esse quæ per centrum transit; earum vero quæ ad convexam, minimam esse quæ inter dictum punctum & diametrum interjicitur: ita & de coni sectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, septimi, & octavi libri propositum manifeste ab ipso *Apollonio* explicatur. Et hæc de epistola dicta sunto.

κείσθω ὡς ἡ Γ πρὸς Δ οὕτως ἡ Α Μ πρὸς Μ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β. ἀλλ' ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως (ὑπόκειται) ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β. καὶ διὰ τὰ προδεδειγμένα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Β τῇ Α Μ παράλληλον ἀγάγωμεν, δειχθήσεται ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ· ἴση ἄρα ἡ Ζ Θ τῇ Ζ Μ. ὅπερ ἀδύνατον.

Τόποι δὲ ἐπίπεδοι λέγονται τὰ τοιαῦτα. Οἱ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι, τὴν προσωνυμίαν ἐσχήκασιν, ἀπὸ τοῦ τὰς γραμμὰς δι' ὧν γράφονται τὰ κατ' αὐτοὺς προβλήματα ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν τὴν γένεσιν ἔχειν, οἷαί εἰσιν αἱ τοῦ κώνου τομαὶ καὶ ἕτεραι πλείους. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλοι τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν λεγόμενοι, οἳ τὴν ἐπωνυμίαν ἔχουσιν ἀπὸ τῆς περὶ αὐτοὺς ἰδιότητος. Μέμφεται δὲ ἑξῆς τῷ Εὐκλείδῃ, οὐχ ὡς οἴεται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες, διὰ τὸ μὴ εὑρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὅ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγιῶς εὗρε τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ, ὡς αὐτός φησιν, οὐκ εὐτυχῶς, περὶ δὲ τῶν δύο μέσων οὐδ' ὅλως ἐπεχείρησε ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχειώσει, αὐτός τε ὁ Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον φαίνεται ζητήσας ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ· ἀλλ' ὡς ἔοικεν ἐν ἑτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπιτιμᾷ, ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται. τὰ δὲ ἑξῆς περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου λεγόμενα σαφῆ ἐστι. τὸ δὲ πέμπτον φησὶ περιέχειν τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι ἀπό τινος σημείου ἀφ' οὗ τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ζητεῖ ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. τοῦ δὲ ἕκτου καὶ ἑβδόμου καὶ ὀγδόου βιβλίου σαφὴς ἡ πρόθεσις ὑπ' αὐτοῦ φέρεται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς.

* Ex hypothesi enim est A M ad M B ut Γ ad Δ; & ideo quadratum ex A M ad quadratum ex M B est ut quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ, hoc est (ut supra ostensum) ut E Δ ad Δ.

*

DE-

ϛ. Ἄξονα δὲ, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

ζ. Βάσιν δὲ, τὸν κύκλον.

η'. Ὀρθοὺς μὲν καλῶ, τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

θ'. Σκαληνοὺς δὲ, τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

ι'. [b] Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους, δίχα διαιρεῖ.

ια'. Κορυφὴν δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς, τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ιβ'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιγ'. [c] Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, διάμετρον καλῶ πλαγίαν μὲν, ἥτις εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς, πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει.

ιδ'. Κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν, τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου.

ιε'. Ὀρθίαν δὲ διάμετρον, εὐθεῖαν, ἥτις κει-

6. Axem vero, rectam lineam quæ à vertice ad circuli centrum ducitur.

7. Basim autem, circulum ipsum.

8. Rectos quidem conos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

9. Scalenos vero, qui axes non ad rectos angulos ipsis basibus habent.

10. [b] Omnis curvæ lineæ, in uno plano existentis, diametrum voco rectam lineam; quæ quidem ducta à linea curvâ omnes rectas in ipsa ductas, cuidam rectæ parallelas, bifariam dividit.

11. Verticem autem curvæ lineæ, terminum rectæ qui est in ipsa linea.

12. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

13. [c] Similiter & duarum curvarum linearum, in uno plano existentium, diametrum quidem transversam voco, rectam lineam; quæ, utramque lineam secans, rectas omnes in ipsis ductas, rectæ cuidam parallelas, bifariam dividit.

14. Vertices autem linearum, diametri terminos qui sunt in ipsis lineis.

15. Rectam vero diametrum, il-

rationem conicæ superficiei, non autem definitionem quæ quid res sit declarat: quanquam licebit utique iis, qui volent, & ex generatione ipsa definitionem colligere. At vero nos iis, quæ ab *Apollonio* dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

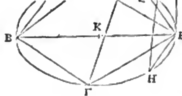
a Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, &c.] Sit circulus ΑΒ, cujus centrum Γ, & punctum aliquod sublime Δ, junctaque ΔΒ in infinitum ex utraque parte producatur ad Ε, Ζ. Si igitur manente Δ, ΔΒ feratur in circuli ΑΒ circumferentia, donec punctum Β rursus in eum locum restituatur, a quo cœpit moveri; describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad Δ punctum inter se connexis: eam voco conicam superficiem. dicit quod & augetur in infinitum, cum recta ΕΒ ipsam describens in infinitum producitur. verticem superficiei dicit punctum Δ; axem rectam ΔΓ; conum vero appellat figuram contentam circulo ΑΒ & ea superficie quam ΔΒ sola describit; coni verticem punctum Δ; axem ΔΓ; basim vero ΑΒ circulum. Et si ΔΓ ad circulum ΑΒ fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; sin minus, scalenum. Describitur autem conus scalenus, quando à centro circuli recta erigitur, quæ non est perpendicularis ad circuli planum; ab erectæ vero puncto, quod est in sublimi, ad circumferentiam recta ducitur, & manente puncto, circa ipsam convertitur: comprehensa etenim figura conus erit scalenus. constat igitur rectam circumductam in conversione quandoque majorem, quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonstrabimus.

φανείας, ἀλλ' οὐ τὸ τί ἐστι διορισμὸν παραδέδωκεν· ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς τὸν ὅρον λαμβάνειν. τὸ δὲ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ διὰ καταγραφῆς σαφὲς ποιήσομεν.

a *Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, καὶ τὰ ἑξῆς.*] Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒ, οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ σημεῖόν τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα μέρη, ὡς ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ἐὰν δή, μένοντος τοῦ Δ, ἡ ΔΒ φέρηται ἕως ἂν τὸ Β, ἐνεχθὲν κατὰ τῆς τοῦ ΑΒ κύκλου περιφερείας, ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, γεννήσει ἐπιφάνειάν τινα, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἁπτομένων ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ· ἣν καὶ καλεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. φησὶ δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὔξεται, διὰ τὸ καὶ τὴν γράφουσαν αὐτὴν εὐθεῖαν, οἷον τὴν ΕΒ, εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ Δ· ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ· κῶνον δὲ λέγει τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν μόνη γράφει ἡ ΔΒ εὐθεῖα· κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ· ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ· βάσιν δὲ τὸν ΑΒ κύκλον. καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ΑΒ κύκλῳ, ὀρθὸν καλεῖ τὸν κῶνον· ἐὰν δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, σκαληνόν. γεννᾶται δὲ κῶνος σκαληνὸς, ὅταν λαβόντες κύκλον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀναστήσωμεν εὐθεῖαν, μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀνασταθείσης εὐθείας ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν, καὶ περιαγάγωμεν τὴν ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον, τοῦ πρὸς τῷ μετεώρῳ σημείου τῆς ἀνασταθείσης μένοντος· τὸ γὰρ περιληφθὲν σχῆμα κῶνος ἔσται σκαληνός. δῆλον δὲ ὅτι ἡ περιαγομένη εὐθεῖα ἐν τῇ περιαγωγῇ μείζων καὶ ἐλάττων γίνεται, κατὰ δέ τινας θέσεις καὶ ἴση, πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου. ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο οὕτως,

Ἐὰν

φερείᾳ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ διάμετρος ἡ ΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΕ τῇ ΕΗΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ. κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται, ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ, ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΕΖ ὀρθή ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ. καὶ πάλιν μείζων ἐστὶν ἡ ΕΑ εὐθεῖα τῆς ΕΖ, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΖΑ τῆς ΕΖ περιφερείας, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΕ τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐδείχθη, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μὲν ἐστιν ἡ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΕ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν.



Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος πιπτέτω ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἡ ΔΕ· καὶ εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΘ. καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ, αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β, αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ εὐθεῖα τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ εὐθεῖα τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο δυσὶν ἴσαι,

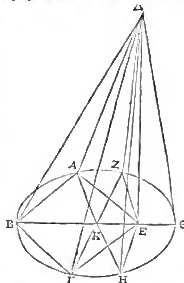
qualis est ipsi BΓ circumferentiæ, & est BE diameter circuli; reliqua AZE reliquæ EHΓ æqualis erit: quare & recta AE ipsi EΓ. sed ΔE communis est utrique, & ad rectos angulos: basis igitur ΔA æqualis est basi ΔΓ. Similiter etiam demonstrabuntur inter se æquales quæcunque ab ipsa ΔE vel ΔB æqualiter distant. rursus quoniam trianguli ΔEZ angulus ΔEZ rectus est, recta ΔZ [per 18. 1.] major erit quam ΔE. & rursus recta EA major est quam EZ, quoniam circumferentia EZA major est quam ipsa EZ circumferentia; communis vero & ad rectos angulos ΔE: basis ΔZ minor erit quam ΔA. eadem quoque ratione & ΔA minor quam ΔB. quoniam igitur ostensa est ΔE minor quam ΔZ, itemque ΔZ minor quam ΔA, & ΔA minor quam ΔB: ipsa quidem ΔE minima est, ΔB vero maxima, & ipsi ΔE propinquior remotiori semper est minor.

Sed cadat perpendicularis extra circulum ABΓ, ut in secunda figura ΔE; & rursus sumatur circuli centrum K, junctaque EK producatur ad B, & jungantur ΔB, ΔΘ. Sumantur præterea duæ circumferentiæ æquales ex utraque parte puncti Θ, quæ sint ΘZ, ΘH, & ex utraque parte ipsius B aliæ duæ sumantur AB, BΓ, & jungantur EZ, EH, ZK, HK, ΔZ, ΔH, AB, BΓ, KA, KΓ, ΔA, ΔB, ΔΓ. itaque quoniam æqualis est circumferentia ΘZ ipsi ΘH, & angulus ΘKZ angulo ΘKH [per 27. 3.] æqualis erit. Quoniam igitur recta ZK rectæ KH est æqualis, (ex centro enim sunt,) & KE communis: ergo basis ZE æqualis basi HE. quoniam igitur recta ZE est æqualis HE, communis vero & ad rectos angulos EΔ: basis ΔZ basi ΔH est æqualis. rursus quoniam circumferentia BA æqualis est BΓ, & angulus AKB ipsi ΓKB; & reliquus ex duobus rectis AKE reliquo ΓKE æqualis erit. quoniam igitur AK, ΓK inter se æquales sunt, (ex centro enim sunt,) communis vero KE, duæ duabus

duabus

ctos est ΕΔ: basis igitur ΔΖ minor est basi ΔΑ. rursus, quia est ΑΚ æqualis ΚΒ, & ΚΕ communis; erunt duæ ΑΚ, ΚΕ duabus ΕΚ, ΚΒ, hoc est toti ΕΚΒ, æquales. sed duæ ΑΚ, ΚΕ majores sunt quam ΑΕ; ergo & ΒΕ major quam ΑΕ. Rursus quoniam ΑΕ minor est quam ΒΕ, communis autem & ad rectos angulos ΕΔ; basis ΔΑ minor est basi ΔΒ. itaque cum ΔΘ minor sit quam ΔΖ, & ΔΖ minor quam ΔΑ, & ΔΑ quam ΔΒ: minima quidem erit ΔΘ, ΔΒ vero maxima, & ipsi ΔΘ propinquior, *&c.*

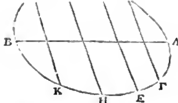
Postremo cadat perpendicularis ΔΕ intra circulum ΑΒΓΗΖ, ut in tertia figura, sumptoque circuli centro Κ, & juncta ΕΚ producatur in utramque partem ad puncta Β, Θ, & jungantur ΔΘ, ΔΒ. sumantur autem ex utraque parte puncti Θ circumferentiæ æquales ΘΖ, ΘΗ, & ex utraque parte puncti Β æquales ΑΒ, ΒΓ, & jungantur ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΚΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. Quoniam igitur ΘΖ circumferentia æqualis est circumferentiæ ΘΗ; angulus igitur ΘΚΖ [per 27. 3] angulo ΘΚΗ est æqualis. & quoniam ΚΖ æqualis ipsi ΚΗ, & ΚΕ communis, & angulus ΖΚΕ æqualis angulo ΗΚΕ; ergo & ΖΕ basis basi ΗΕ æqualis erit. Quoniam igitur ΖΕ æqualis ΗΕ, & ΔΕ communis, & angulus ΖΕΔ æqualis ΗΕΔ; basis igitur ΔΖ basi ΔΗ æqualis est. rursus quia circumferentia ΑΒ æqualis est circumferentiæ ΒΓ; angulus ΑΚΒ angulo ΓΚΒ æqualis erit: ergo & reliquus ex duobus rectis ΑΚΕ reliquo ΓΚΕ. quoniam igitur ΑΚ æqualis ΚΓ, commu-

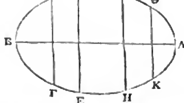


ΚΕ· δύο ἄρα αἱ ΑΚ, ΚΕ ταῖς ΕΚ, ΚΒ, τουτ᾽ ἔστιν ὅλῃ τῇ ΕΚΒ, εἰσὶν ἴσαι. ἀλλ᾽ αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῆς ΑΕ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶν, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μὲν ἔσται ἡ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, καὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΘ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος ΔΕ πιπτέτω ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Β, Θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΘ, ΔΒ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ Θ, ἡ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ᾽ ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΚΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΚΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τῇ ΚΓ ἐστὶν ἴση, κοινὴ

δὴ



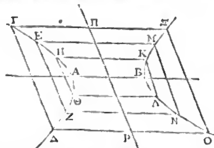


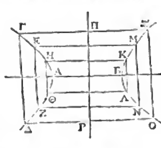
ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Β εὐθεῖα ἡ ΒΛ δίχα αὐτὰς τέμνουσα· φησὶν οὖν ὅτι τῆς ΑΒΓ γραμμῆς διάμετρον μὲν καλῶ τὴν ΒΛ· κορυφὴν δὲ τὸ Β· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΒΛ κατῆχθαι ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΛ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους, ἄξων καλεῖται.

c Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.] Ἐὰν νοήσωμεν τὰς Α, Β γραμμάς, καὶ ἐν αὐταῖς τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ παραλλήλους, καὶ τὴν ΑΒ διηγμένην ἐφ' ἑκάτερα, καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους δίχα·

recta, quæ ipsas parallelas bifariam fecet: lineæ igitur ΑΒΓ diametrum, inquit, voco rectam ΒΛ; & verticem punctum Β; ordinatim vero ad ipsam ΒΛ applicari dicitur unaquæque rectarum ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. si vero ΒΛ ipsas parallelas bifariam & ad rectos angulos fecet, axis appellatur.

c Similiter & duarum curvarum linearum, &c.] Si enim intellexerimus lineas Α, Β, & in ipsis parallelas ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, & rectam ΑΒ ex utraque parte productam, quæ bifariam parallelas dividat: ipsam quidem ΑΒ voco diametrum trans-





καὶ τὴν μὲν ΑΒ καλῶ πλαγίαν διάμετρον· κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ Α, Β σημεῖα· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων καλεῖται. ἐὰν δὲ διαχθῇ τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΠΡ, τὰς

versam; vertices linearum puncta Α, Β; ordinatim vero ad ΑΒ applicari dicuntur ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. at si ipsas bifariam & ad rectos angulos dividat, transversus axis appellatur. si vero recta ducatur, ut ΠΡ, rectas

ΓΞ,

culus autem, in quo ipsa ΔE fertur, sit EZ. itaque, si manente A, feratur ΔE in circuli EZ circumferentia; per B punctum transibit, atque erunt duarum rectarum iidem termini: quod est absurdum. non igitur à puncto A ad B ducta recta extra superficiem est: ergo in ipsa superficie erit. quod erat demonstrandum.

καθ' οὗ φέρεται ἡ ΔΕ, ὁ ΕΖ. ἐὰν δὲ μένοντος τοῦ Α σημείου, ἡ ΔΕ εὐθεῖα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφερείας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστί.

Corollarium.

Et constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra superficiem sunt, recta ducatur, illam intra superficiem conicam; & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπί τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· καὶ ἐὰν ἐπί τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

EUTOCIUS.

De figuris diversis vel casibus theorematum illud scire oportet, casum esse, quando ea quæ in propositione dantur positione data sunt: ipsorum enim differens transmutatio, eadem conclusione manente, casum facit. similiter etiam & à constructione transposita fit casus. cum igitur theoremata plures casus habeant, una eademque demonstratio omnibus congruit & iisdem elementis, præterquam in paucis quibusdam, ut deinceps explicabimus. statim nam-

Περὶ τῶν διαφόρων καταγραφῶν, ὅτι πλειόνων τῶν θεωρημάτων τοιοῦτον ἰστέον, ὅτι πτῶσις μέν ἐστιν, ὅτι τὰ ἐν τῇ προτάσει δεδομένα τῇ θέσει ἡ δέδοται· ἡ γὰρ διάφορος αὐτῶν μετάληψις, τοῦ αὐτοῦ συμπεράσματος ὄντος, ποιεῖ τὴν πτῶσιν. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς μετατιθεμένης γίνεται πτῶσις. πολλὰς δὲ πτώσεις ἐχόντων τῶν θεωρημάτων, ὅμως ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων, πλὴν βραχέων, ὡς ἑξῆς εἰσόμεθα. εὐ-

θὺς

... μὴ νεύει ἐπὶ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

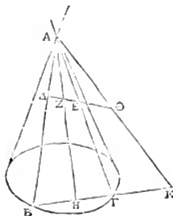
Ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ· ἔσται ἄρα ἡ ΒΓ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ΔΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ ΒΓΑ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖα ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

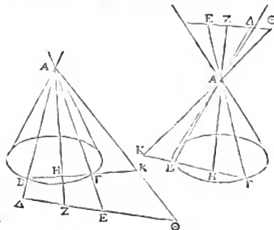
Ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ· λέγω δὴ ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

punctum A non vergat: dico ipsam ΔE intra superficiem cadere, & quæ est in directum ipsi, cadere extra.

Jungantur AE, AΔ, & producantur. cadent utique [per 1. 1.hujus] in circuli circumferentiam. cadant in puncta B, Γ; & jungatur BΓ: erit igitur [per 2.3.] BΓ intra circulum; quare & intra conicam superficiem. sumatur in ipsa ΔE quodvis punctum Z; junctaque AZ producatur: cadet hæc in rectam BΓ; nam [per 2. 11.] triangulum BΓA est in uno plano. cadat in H. quoniam igitur punctum H est intra conicam superficiem; & ipsa AH [per cor. 1. 1. huj.] intra conicam superficiem erit; adeoque & punctum Z. similiter demonstrabuntur & omnia puncta rectæ ΔE esse intra conicam superficiem.

Producatur ΔE ad Θ; dico EΘ extra conicam superficiem cadere.





Si

SIT conus, cujus vertex A, basis autem circulus ΒΓ, & per A secetur plano aliquo quod sectiones faciat in superficie lineas quidem AB, AΓ, & in basi rectam ΒΓ: dico ABΓ triangulum esse.

Quoniam enim à puncto A ad B ducta linea communis sectio est plani secantis, & superficiei conicæ; erit [per 1. 1. huj.] AB recta linea. eadem ratione & ipsa AΓ. est autem [per 3. 11.] & ΒΓ recta: quare ABΓ est triangulum.

Si igitur conus plano secetur per verticem, sectio triangulum erit. quod erat demonstrandum.

Ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ Α σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς ΑΒ, ΑΓ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν ΒΓ εὐθεῖαν· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα· τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ.

Ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUTOCIUS.

Tertium theorema casum non habet. oportet autem scire lineam AB rectam esse, cum sit communis sectio plani secantis, & superficiei conicæ, quæ à recta manentem terminum ad verticem habente describitur. neque enim omnis superficies secta plano facit sectionem rectam lineam; neque ipse conus, nisi planum secans per verticem transeat.

Τὸ τρίτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ δὲ ἐν αὐτῷ ἐπιστῆσαι ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖά ἐστι, διὰ τὸ κοινὴν τομὴν εἶναι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἥτις ὑπὸ εὐθείας ἐγράφετο τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας. οὐ γὰρ πᾶσα ἐπιφάνεια, ὑπὸ ἐπιπέδου τεμνομένη, τὴν τομὴν ποιεῖ εὐθεῖαν· οὐδὲ αὐτὸς ὁ κῶνος, εἰ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς ἔλθοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Prop. IV. *Theor.*

Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, plano secetur æquidistante circulo, per quem fertur recta superficiem describens: planum, quod superficie concluditur, circulus erit centrum in axe habens; figura vero contenta circulo, & ea parte superficiei conicæ quæ inter secans planum & verticem interjicitur, conus erit.

SIT conica superficies, cujus vertex A, circulus autem, in quo fertur recta superficiem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὁποτέρα τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα· τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἔσται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος· τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ, κῶνος ἔσται.

ΕΣΤΩ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν

[illegible] τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ παράλληλος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥτε ΖΒ πρὸς ΗΔ, καὶ ἡ ΖΓ πρὸς ΗΕ, καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ τρεῖς ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Η σημείου πρὸς τὴν ΔΕ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ γραμμή, κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

[illegible] munes ipsorum sectiones [per 16. 11.] parallelæ erunt: parallela est igitur ΔΕ ipsi ΒΓ. & eadem ratione ΗΘ est parallela ipsi ΖΚ: quare [per 4. 6.] ut ΑΖ ad ΑΗ, ita ΖΒ ad ΗΔ, ΖΓ ad ΗΕ, & ΖΚ ad ΗΘ. suntque tres rectæ ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ æquales inter sese: ergo [per 14. 5.] & ipsæ tres ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ inter sese æquales erunt. similiter quoque ostendentur æquales quæcunque à puncto Η ad lineam ΔΕ ducuntur. linea igitur ΔΕ est circulus, centrum in axe habens.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΔΕ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ πρὸς τῷ Α σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας, κῶνός ἐστι. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

Corollarium.

Constat [per 4. def. huj.] figuram contentam circulo ΔΕ, & ea parte superficiei conicæ quæ inter dictum circulum & punctum Α interjicitur, conum esse. simulque demonstratum est, communem sectionem plani secantis & trianguli per axem, diametrum esse ipsius circuli.

EUTOCIUS.

Πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος τρεῖς εἰσιν, ὥσπερ αὐτοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.

Casus hujus theorematis tres sunt, quemadmodum & primi & secundi.

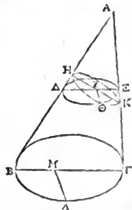
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ

PROP. V. *Theor.*

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, secceturque

vero & ZΘ ipsi ΛM parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod per ZΘ, ΔE transit, æquidistans est basi ipsius coni: & idcirco [per 4. 1. huj.] sectio ΔΘE circulus erit, cujus diameter ΔE: æquale est igitur rectangulum sub ΔZ, ZE quadrato ex ZΘ. & quoniam parallela est EΔ ipsi BΓ: angulus AΔE [per 29. 1.] æqualis est angulo ABΓ. & ponitur angulus AKH angulo ABΓ æqualis: ergo & AKH ipsi AΔE æqualis erit. sunt autem [per 15. 1.] & qui ad Z anguli æquales; sunt enim ad verticem: igitur [per 4. 6.] ΔZH triangulum simile est triangulo KZE. igitur ut EZ ad ZK ita HZ ad ZΔ: [c] rectangulum igitur EZΔ æquale est [per 16. 6.] rectangulo KZH. sed rectangulum EZΔ (hoc est sub ΔZ, ZE) demonstratum est æquale quadrato ex ZΘ: ergo & rectangulum sub KZ, ZH eidem æquale erit. Similiter demonstrabuntur & omnes, quæ à linea HΘK ad ipsam HK perpendiculares ducuntur, posse æquale ei quod sub segmentis ipsius HK continetur. [d] sectio igitur circulus est, cujus diameter [per 2. lem.] est HK.



παράλληλος ἡ ΔΖΕ. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΔΕ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ ΔΕ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΚΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΔΕ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΗ τρίγωνον τῷ ΚΖΕ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΚ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ· [c] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΖΗ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΔ (τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ) ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ ἠγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΗΚ. [d] κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ ΗΚ.

EUTOCIUS.

Quintum theorema casum non habet. Exordiens autem *Apollonius* expositionem, [a] Secetur, *inquit*, conus per axem plano ad basim recto. Sed quoniam in cono scaleno, juxta unicam solummodo positionem triangulum per axem ad basim rectum est, hoc ita faciemus. Sumentes namque basis centrum, ab eo erigemus rectam ad rectos angulos ipsi pla-

Τὸ πέμπτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἀρχόμενος δὲ τῆς ἐκθέσεως, φησί, [a] Τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὴν βάσιν. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ σκαληνῷ κώνῳ, κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο ποιήσομεν οὕτως. λαβόντες τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἀναστήσομεν ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως

πρὸς

ὡς δειχθήσεται ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΚΗ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσον δύνανται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων.

ᵈ Κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.] καὶ δυνατὸν μὲν ἐστιν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐχ ἥξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον, ἤτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ, ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. δείξομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἐπ' εὐθείας. ἔστω τις γραμμὴ ἡ ΗΘΚ, καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ ΚΗ, εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ ΖΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΖΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΟΠ τῷ ὑπὸ ΗΠΚ ἴσον· λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΟΚ γραμμή. τετμήσθω γὰρ ἡ ΗΚ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΘ, ΝΟ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ν, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΗΖΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΖΚ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ ΖΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ἴσα δὲ ἐστι τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ζ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΝΚ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΝΚ· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ.

Δυνατὸν δὲ ἐστιν, τὰς ΔΕ, ΗΚ διαμέτρους ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους εἶναι, οὐδέποτε μέντοι δίχα τέμνεσθαι ἀλλήλας. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΝΑ τῆς ΑΚ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΑΗ, διὰ τὴν ὑπεναντίαν τομήν· ὥστε τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴση λαμβανομένη μεταξὺ πίπτει τῶν σημείων Η, Ν. πιπτέτω ὡς ἡ ΑΞ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Ξ τῇ ΒΓ παράλληλος ἀγομένη τέμνει τὴν ΗΚ. τεμνέτω ὡς ἡ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

æquale est rectangulo H Z K. Similiter demonstrabuntur & omnes rectæ à linea H Θ K ductæ perpendiculares ad K H rectam, posse æquale ei quod sub ejus segmentis continetur.

ᵈ Sectio igitur est circulus, cujus diameter H K.] possumus autem hoc demonstrare per deductionem ad absurdum. Si enim circulus, qui circa H K describitur, non transit per Θ punctum; erit rectangulum sub K Z, Z H æquale quadrato, vel rectæ majoris ipsa Z Θ, vel minoris, contra hypothesin. Sed & illud idem directa demonstratione ostendemus. sit linea quædam H Θ K, cui subtendatur recta H K, sumantur autem in linea duo quævis puncta Θ, O, à quibus ad ipsam H K perpendiculares ducantur Θ Z, O Π; sitque quadratum ex Z Θ æquale rectangulo H Z K, & quadratum ex O Π æquale ipsi H Π K rectangulo: dico lineam H Θ O K circulum esse. secetur enim H K bifariam in puncto N, & jungantur N Θ, N O. Quoniam igitur recta linea H K secatur in partes æquales in N, & in partes inæquales in Z: rectangulum H Z K una cum quadrato ex N Z æquale erit [per 5. 2.] quadrato ex N K. sed rectangulum H Z K positum est æquale quadrato ex Z Θ; quadratum igitur ex Θ Z una cum quadrato ex N Z æquale est quadrato ex N K. æqualia autem sunt [per 47 1.] ex Θ Z, Z N quadrata ipsi quadrato ex N Θ; angulus enim ad Z est rectus: ergo quadratum ex NΘ quadrato ex NK æquale erit. similiter ostendemus quadratum ex N O æquale esse quadrato ex N K: linea igitur H Θ K circulus est, & ejus diameter H K.

Fieri autem potest ut diametri Δ E, H K quandoque æquales sint, quandoque inæquales; nunquam tamen sese bifariam secabunt. ducatur enim per K ipsi B Γ parallela N K. quoniam igitur major est B A quam A Γ: & ipsa N A quam A K major erit. eadem ratione & A K major est quam A H, propter subcontrariam sectionem: quare si à recta A N abscissa fuerit æqualis ipsi A K, inter puncta H, N cadet. cadat ut A Ξ: ergo per Ξ ducta parallela ipsi B Γ secabit H K. secet ut Ξ O Π. itaque

quoniam

Si conus plano per axem secetur; sumatur autem aliquod punctum in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem, & ab ipso ducatur recta parallela cuidam rectæ, quæ perpendicularis est à circumferentia circuli ad trianguli basim: triangulo per axem occurret, & ulterius producta, usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur.

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis autem circulus ΒΓ, seceturque conus plano per axem, atque communem sectionem faciat triangulum ΑΒΓ, & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in ΒΓ circumferentia, ut ab Μ, ducatur ΜΝ perpendicularis ad ipsam ΒΓ; sumatur vero in superficie coni punctum Δ, quod non sit in latere trianguli per axem, & per Δ ipsi ΜΝ parallela ducatur ΔΕ: dico ΔΕ productam occurrere plano trianguli ΑΒΓ; & ulterius productam ad alteram partem coni, quousque ejus superficiei occurrat, à trianguli ΑΒΓ plano bifariam secari.

Jungatur ΑΔ, & producatur; occurret [per 1. 1. huj.] circumferentiæ circuli ΒΓ. occurrat in Κ, & à puncto Κ ad ΒΓ perpendicularis ducatur ΚΘΛ: parallela est igitur [per 28. 1.] ΚΘ ipsi ΜΝ; quare [per 9. 11.] & ipsi ΔΕ. ducatur ab Α puncto ad Θ recta ΑΘ. itaque quoniam in triangulo ΑΘΚ, ipsi ΘΚ parallela est ΔΕ: conveniet ΔΕ producta cum ΑΘ. est autem ΑΘ in plano trianguli ΑΒΓ: ergo ΔΕ trianguli ΑΒΓ plano occurret; ipsique ΑΘ rectæ.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μὴ ἔστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθεία τινὶ, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου· συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας, τοῦ Μ, κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΜΝ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, ὃ μὴ ἔστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δι' ἄξονος τριγώνου, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΜΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ, καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΘΚ, τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΘ. ἡ δὲ ΑΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ τῇ ΑΘ εὐθείᾳ.

συμπιπτέτω

μέσα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Λ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ Α Λ Κ τῇ Κ Θ Λ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ Δ Η, καὶ διῆκταί τις ἀπὸ τοῦ Α, ἡ Α Ζ Θ· ἔστιν ὡς ἡ Κ Θ πρὸς Θ Λ ἡ Δ Ζ πρὸς Ζ Η. ἴση δὲ ἡ Κ Θ τῇ Θ Λ, ἐπείπερ ἐν κύκλῳ τῷ Β Γ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ Κ Λ· ἴση ἄρα καὶ ἡ Δ Ζ τῇ Ζ Η.

guli: ergo recta est quæ per Α, Η, Λ puncta transit. at cum in triangulo Α Λ Κ, ipsi Κ Θ Λ basi parallela ducta sit Δ Η, & à puncto Α ducatur Α Ζ Θ: erit * ut Κ Θ ad Θ Λ ita Δ Ζ ad Ζ Η. æqualis autem est [per 3. 3.] Κ Θ ipsi Θ Λ, quia in circulo Β Γ perpendicularis ad diametrum ducitur Κ Λ: ergo & Δ Ζ ipsi Ζ Η æqualis erit.

EUTOCIUS.

Προσέχειν χρὴ, ὅτι οὐ μάτην πρόσκειται ἐν τῇ προτάσει, τὸ δεῖν ἀγομένην εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ τῆς ἐπιφανείας σημείου παράλληλον μιᾷ τινι τῶν ἐν τῇ βάσει εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πάντως τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἄγεσθαι. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐ δυνατόν ἐστιν αὐτὴν δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ὅπερ ἐστὶ φανερὸν ἐκ τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. εἰ γὰρ ἡ Μ Ν, ᾗ παράλληλός ἐστιν ἡ Δ Ζ Η, μὴ πρὸς ὀρθὰς εἴη τῇ Β Γ, δῆλον ὅτι οὐδὲ δίχα τέμνεται ἡ Κ Λ. καὶ διὰ τῶν αὐτῶν λόγων συνάγεται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Κ Θ πρὸς Θ Λ οὕτως ἡ Δ Ζ πρὸς Ζ Η· καὶ ἡ Δ Η ἄρα εἰς ἄνισα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ. δυνατὸν δὲ κατωτέρω τοῦ κύκλου, καὶ ἔτι τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας τὰ αὐτὰ δείκνυσθαι.

Animadvertendum est, non frustra apponi in propositione, oportere rectam ductam à puncto superficiei, parallelam esse cuivis rectæ quæ à circuli circumferentia perpendicularis est ad basim trianguli per axem. nisi enim hoc ita sit, fieri non potest ut recta à triangulo bifariam secetur; quod quidem ex descripta figura manifeste apparet. nam si Μ Ν, cui parallela est Δ Ζ Η, ad ipsam Β Γ non sit perpendicularis: neque Κ Λ bifariam secabitur. eadem enim ratione colligimus, ut Κ Θ ad Θ Λ ita esse Δ Ζ ad Ζ Η: ergo & Δ Η in partes inæquales secabitur ad punctum Ζ. potest autem illud idem, tum infra circulum, tum in superficie, quæ est ad verticem, similiter demonstrari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν, ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ

Prop. VII. *Theor.*

Si conus plano per axem secetur, secetur autem & altero plano secante planum basis coni secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis, vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: rectæ quæ à sectione in superficie coni à plano facta ducuntur, paral-

* Nam (per 4. 6.) Κ Θ est ad Δ Ζ ut Α Θ ad Α Ζ; & Θ Λ est ad Ζ Η etiam ut Α Θ ad Α Ζ: quare (per 11. 5.) Κ Θ est ad Δ Ζ ut Θ Λ ad Ζ Η; unde (per 16. 5.) Κ Θ est ad Θ Λ ut Δ Ζ ad Ζ Η.

lelæ

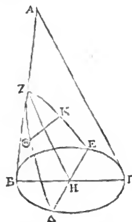
sit ZH, & sumatur in sectione ΔZE punctum quodvis Θ, à quo ΘK ipsi ΔE parallela ducatur: dico ΘK ipsi ZH occurrere, & ulterius productam ad alteram partem sectionis ΔZE, à recta ZH bifariam secari.

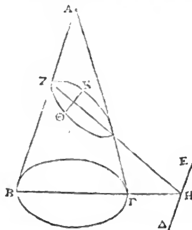
Quoniam enim conus, cujus vertex A punctum, & basis circulus BΓ, plano per axem secatur, atque sectionem facit ABΓ triangulum; sumitur autem in superficie punctum Θ quod non est in latere trianguli ABΓ, estque ΔH ad BΓ perpendicularis: ducta ergo per Θ recta ΘK ipsi ΔH parallela, triangulo ABΓ [per 6. huj.]

ΖΗ, ...

Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἡ ΘΚ συμβαλεῖ τῇ ΖΗ, καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τὸ Θ, καὶ ἔστιν κάθετος ἡ ΔΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΗ παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘΚ, συμβαλεῖ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ,





occurret; & ulterius producta ad alteram partem superficiei, à triangulo bifariam secabitur. quoniam igitur, quæ per Θ ducitur parallela ipsi ΔE, occurrit triangulo ABΓ; atque est in plano sectionis ΔZE: in communem sectionem plani secantis & trianguli ABΓ cadet. sed ZH est communis sectio plano-

καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπιπέδῳ· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομή ἐστι τῶν ἐπιπέδων

ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΒΓ κύκλος· ὁ ΒΓ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

18. 11.] & omnia, quæ per ipsam transeunt, plana ad ΑΒΓ triangulum recta sunt. planum vero, in quo est circulus ΒΓ, est unum ex iis quæ per ΔΕ transeunt: ergo circulus ΒΓ rectus est ad triangulum ΑΒΓ; ac propterea triangulum ΑΒΓ ad ΒΓ circulum rectum erit, contra hypothesin. non est igitur ΔΕ ad ΖΗ normalis.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι τῆς ΔΖΕ τομῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΗ, ἐπείπερ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΔΕ δίχα τέμνει· καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι, καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

Corollarium.

Hinc vero constat [per 10. def. huj.] rectam ΖΗ diametrum esse sectionis ΔΖΕ; cum rectas omnes, quæ in ipsa ducuntur, uni cuidam parallelas bifariam secet. constat præterea fieri posse, ut rectæ parallelæ à diametro ΖΗ bifariam quidem, non autem ad rectos angulos secentur.

EUTOCIUS.

Τὸ ἕβδομον θεώρημα πτώσεις ἔχει τέσσαρας· ἢ γὰρ οὐ συμβάλλει ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ, ἢ συμβάλλει τριχῶς, ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐντός, ἢ ἐπὶ Γ σημείου.

Septimum theorema quatuor casus habet: vel enim ΖΗ non occurrit ΑΓ; vel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipso Γ puncto.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η′.

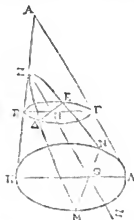
Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς, ἤτοι παρὰ μίαν ᾖ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προσεκβάλληται δὲ ἥ τε τοῦ κώνου

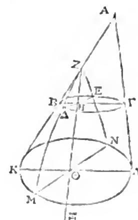
Prop. VIII. *Theor.*

Si conus plano secetur per axem, & secetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam quæ ad basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem sectionis factæ in superficie, vel sit parallela uni laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conveniat, & producantur in infinitum tum superficies

rallela est ipsi ΑΓ, vel producta, extra punctum Α cum ipsa convenit; lineæ ΖΗ, ΑΓ ad partes Η, Γ productæ nunquam convenient inter sese. producantur ergo, sumaturque in ΖΗ quodlibet punctum Θ, & per Θ ducatur ΚΘΛ ipsi ΒΓ parallela, ipsi vero ΔΕ parallela

λός ἐστιν, ἡ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου· αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Η μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΖΗ τυχὸν, τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω





ducatur ΜΘΝ: quare [per 15. 11.] planum, quod per ΚΛ, ΜΝ transit, parallelum est plano per ΒΓ, ΔΕ: & idcirco [per 4. huj.] ΚΛΜΝ planum circulus est. & quoniam puncta Δ, Ε, Μ, Ν sunt & in plano secante, & in superficie coni: ergo & in ipsa communi sectione erunt: sectio igitur ΔΖΕ aucta est usque ad puncta Μ, Ν. igitur si tum coni superficies, tum secans planum producantur ad ΚΛΜΝ circulum; & sectio ipsa ΔΖΕ usque ad Μ, Ν puncta augebitur. Eadem ratione demonstrabitur sectionem ΜΔΖΕΝ augeri in infinitum, si & superficies coni & planum secans in infinitum producantur. per-

ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ· κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Ε, Μ, Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὴ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστιν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου· ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται. καὶ

φανερὸν

[illegible] τὰ Δ, Ε, Η σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Η Ε Δ. εἰλήφθω δή τι ἐπὶ τῆς Δ Κ Ε γραμμῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ Ζ Η παράλληλος ἤχθω ἡ Κ Μ Λ. ἔσται δὴ ἴση ἡ Κ Μ τῇ Μ Λ· ἡ ἄρα Δ Ε διάμετρός ἐστι τοῦ Δ Κ Ε Λ κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Μ τῇ Β Γ παράλληλος ἡ Ν Μ Ξ. ἔστι δὴ καὶ ἡ Κ Λ τῇ Ζ Η παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν Ν, Ξ, Κ, Μ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν Β Γ, Ζ Η, τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω Ν Κ Ξ Λ. καὶ ἐπεὶ ἡ Ζ Η τῇ Β Η πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ Κ Μ τῇ Ν Ξ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Ν Μ Ξ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς Κ Μ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Μ Ε ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Κ Μ, κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ Δ Κ Ε Λ γραμμή, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ Δ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ν Μ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Δ Μ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ν Μ πρὸς Μ Δ οὕτως ἡ Ε Μ πρὸς Μ Ξ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ Μ Ν τρίγωνον τῷ Ξ Μ Ε τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ Δ Ν Μ γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ Μ Ε Ξ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ Δ Ν Μ γωνία τῇ ὑπὸ Α Β Γ ἐστὶν ἴση, παράλληλος γὰρ ἡ Ν Ξ τῇ Β Γ· καὶ ἡ ὑπὸ Α Β Γ ἄρα

in communi planorum sectione erunt: quare [per 3. 11.] H E Δ recta est. sumatur in linea Δ K E punctum aliquod K, & per K rectæ Z H parallela ducatur K M Λ. estque [per 6. huj.] K M ipsi M Λ æqualis: quare [per conv. 3. 3.] Δ E diameter est circuli Δ K E Λ. ducatur deinde per M recta N M Ξ ipsi B Γ parallela. est autem & K Λ parallela Z H: ergo [per 15. 11.] planum quod per N, Ξ, K, M ducitur, æquidistans est plano per B Γ, Z H, hoc est ipsi basi; adeoque [per 4. huj.] sectio circulus est. sit N K Ξ Λ. & quoniam Z H perpendicularis est ad B Γ H; sequitur [per 10. 11.] & K M ad N Ξ perpendicularem esse: quare [per 35. 3.] rectangulum N M Ξ æquale est quadrato ex K M. sed & rectangulum Δ M E æquale est quadrato ex K M; nam linea Δ K E Λ circulus ponitur cujus diameter Δ E: rectangulum igitur N M Ξ æquale est rectangulo Δ M E: & idcirco [per 16. 6.] ut N M ad M Δ ita E M ad M Ξ: quare [per 6. 6.] Δ M N triangulum simile est triangulo Ξ M E; & angulus Δ N M æqualis M E Ξ angulo. sed angulus Δ N M angulo A B Γ est æqualis; parallela enim est N Ξ ipsi B Γ: ergo & angulus A B Γ

puncta quædam sumuntur H, Θ, quæ non sunt in latere trianguli per axem: recta, quæ à puncto H ad Θ ducitur, non tendet ad A: ergo [per 2. huj.] recta conjungens puncta H, Θ intra conum, adeoque intra coni sectionem ΔZE cadet; & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra.

νος, εἰλήφθω δή τινα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ Η, Θ, ἃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὸ Α· ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Η,Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας, ἐκτὸς, ὥστε καὶ τῆς Δ Ζ Ε τομῆς.

EUTOCIUS.

Animadvertendum est decem hæc theoremata aptissime cohærentia inter sese & continuata esse. primum autem ostendit rectas lineas, quæ in superficie coni ad verticem tendunt, in eadem permanere. secundum conversum ostendit. tertium explicat coni sectionem quæ per verticem efficitur. quartum sectionem basi æquidistantem. quintum vero subcontrariam. sextum est tanquam lemma ad septimum, in illo ostenditur oportere communem sectionem plani secantis, & circuli qui est basis coni, ad ejus diametrum perpendicularem esse; atque, hoc ita habente, rectas omnes, quæ ipsi parallelæ ducuntur, à triangulo bifariam secari. septimum tres alias sectiones earumque diametrum ostendit, & rectas quæ ad ipsam diametrum ordinatim applicantur, et quæ in basi parallelas esse. in octavo demonstrat quod nos in principio diximus, videlicet parabolen & hyperbolen ex eorum numero esse quæ in infinitum augentur. in nono ostendit ellipsim, quæ in seipsam vergit ut circulus, quia planum secans cum utroque latere trianguli convenit, circulum non esse; subcontraria etenim aut parallela sectio circulum facit. sed & illud scire oportet, diametrum sectionis in parabola quidem unum duntaxat trianguli latus secare & ipsam basim: in hyperbola, secare & latus & rectam, quæ reliquo lateri ad partes verticis producto in rectum constituitur: in ellipsi vero, & utrumque latus & basim secare. posset fortasse quispiam arbitrari decimum theorema idem esse quod secundum sed res non ita se habet: illic enim in tota superficie duo quævis puncta sumi asserit; hic in ea tantum linea quæ à secante plano efficitur. at in tribus quæ deinceps sequuntur theorematibus unamquamque sectionem diligentius expendit, & principes earum proprietates declarat.

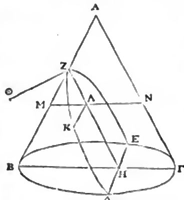
Χρὴ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰ δέκα ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχεται. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ νεύουσαι ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐν ταύτῃ μένουσι. τὸ δὲ δεύτερον τὸ ἀνάπαλιν. τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν. τὸ δὲ τέταρτον τὴν παράλληλον τῇ βάσει. τὸ πέμπτον τὴν ὑπεναντίαν. τὸ ἕκτον ὥσπερ προλαμβάνεται τοῦ ἑβδόμου, δεικνὺς ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς ὀφείλει πάντως εἶναι τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ ὅτι τούτου οὕτως ἔχοντος, αἱ παράλληλοι αὐτῇ δίχα τέμνονται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. τὸ δὲ ἕβδομον τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς ἔδειξε, καὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὰς ἐπ' αὐτὴν κατηγμένας παραλλήλους τῇ ἐν τῇ βάσει εὐθείᾳ. ἐν δὲ τῷ ὀγδόῳ δείκνυσιν, ὅπερ ἐν τοῖς προλεγομένοις εἴπομεν, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξομένων. ἐν δὲ τῷ ἐννάτῳ, ὅτι ἡ ἔλλειψις, συννεύουσα εἰς ἑαυτὴν ὁμοίως τῷ κύκλῳ, διὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτειν ἀμφοτέραις ταῖς πλευραῖς τοῦ τριγώνου, οὐκ ἔστι κύκλος· κύκλους γὰρ ἐποίει ὅτε ὑπεναντία τομὴ καὶ ἡ παράλληλος. καὶ δεῖ ἐπιστῆσαι ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τέμνει καὶ τὴν βάσιν· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς, τήν τε πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ λοιπῇ πλευρᾷ ἐκβαλλομένην πρὸς τῇ κορυφῇ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἀμφοτέρας τὰς πλευρὰς καὶ τὴν βάσιν. τὸ δὲ δέκατον ἀπλούστερον μέν τις ἐπιβάλλων ἴσως ἂν οἰηθείη ταὐτὸν εἶναι τῷ δευτέρῳ. τοῦτο μέντοι οὐχ ὡς ἔχει· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐπὶ πάσης τῆς ἐπιφανείας ἔλεγε ἐπιλαμβάνεσθαι τὰ δύο σημεῖα, ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῆς γινομένης γραμμῆς. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς τρισὶν ἀκριβέστερον ἑκάστην τῶν τομῶν τούτων διαιρεῖται, μετὰ τοῦ λέγειν καὶ τὰ ἰδιώματα αὐτῶν τὰ ἀρχικά.

ΠΡΟ-

ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν Δ Ε πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ Β Γ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν Δ Ζ Ε, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ Ζ Η παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ Α Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ Ζ Η εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ζ Θ, [a] καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ Β Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Α Γ οὕτως ἡ Ζ Θ πρὸς Ζ Α, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ Δ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ Κ Λ μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Κ Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Θ Ζ Λ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ Β Γ παράλληλος ἡ Μ Ν. ἔστι δὴ καὶ ἡ Κ Λ τῇ Δ Ε παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν Κ Λ, Μ Ν ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν Β Γ, Δ Ε ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· τὸ ἄρα διὰ τῶν Κ Λ, Μ Ν ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ Μ Ν. καί ἐστι κάθετος ἐπὶ τὴν Μ Ν ἡ Κ Λ, ἐπεὶ καὶ ἡ Δ Ε ἐπὶ τὴν Β Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Μ Λ Ν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Κ Λ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Α Γ οὕτως ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Α, [b] τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Β Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Α Γ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Β Γ πρὸς Γ Α, καὶ ἡ Β Γ πρὸς Β Α· ὁ ἄρα τῆς Θ Ζ

*

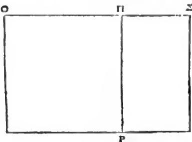


cetur altero plano secante basim coni secundum rectam lineam Δ E, quæ ad B Γ est perpendicularis, & faciat sectionem in superficie coni Δ Z E lineam; diameter autem sectionis Z H parallela sit uni laterum trianguli per axem, videlicet ipsi A Γ, atque à puncto Z rectæ Z H ad rectos angulos ducatur Z Θ, [a] & fiat ut quadratum ex B Γ ad rectangulum B A Γ ita Z Θ ad Z A, sumatur præterea in sectione quodlibet punctum K, & per K ducatur K Λ ipsi Δ E parallela, usque ad sectionis diametrum: dico quadratum ex K Λ rectangulo Θ Z Λ æquale esse.

Ducatur enim per Λ ipsi B Γ parallela M N. est vero K Λ parallela ipsi Δ E: ergo [per 15.11.] planum, quod transit per K Λ, M N, plano per B Γ, Δ E, hoc est ipsi basi coni, æquidistat: ideoque [per 4.huj.] planum per K Λ, M N est circulus, cujus diameter M N. est autem [per 10. 11.] K Λ ad M N perpendicularis, quia & Δ E ad B Γ: rectangulum igitur M Λ N [per 35. 3.] æquale est quadrato ex K Λ. & quoniam [ex hyp.] Θ Z ad Z A est ut quadratum ex B Γ ad rectangulum B A Γ; [b] quadratum autem ex B Γ ad B A Γ rectangulum [per 23.6.] rationem habet compositam ex ratione quam B Γ habet ad Γ A, & ex ea quam B Γ habet ad B A: ratio igitur Θ Z

ad

[a] Et fiat ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ ita ΖΘ ad ΖΑ.] Certum quidem est quod dicitur. sed, siquis hoc plenius adhuc declarare velit, sit rectangulo ΒΑΓ æquale rectangulum ΟΠΡ; quadrato autem ex ΒΓ æquale id quod ad ΠΡ adjacens latitudinem habet ΠΣ, & fiat ut ΟΠ ad ΠΣ ita ΑΖ ad ΘΖ: ergo factum jam erit quod quærebamus. quoniam enim ut ΟΠ ad ΠΣ ita ΑΖ ad ΖΘ: erit & invertendo ut ΣΠ ad ΠΟ ita ΘΖ ad ΖΑ. ut autem ΣΠ ad ΠΟ ita rectangulum ΣΡ ad ipsum ΡΟ, hoc est [per constr.] quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ. hoc autem & ad sequentia theoremata utile erit.



[a] ΚΑΙ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ.] Σαφὲς μὲν ἐστι τὸ λεγόμενον. πλὴν, εἴ τις καὶ κατανοῆσαι βούλοιτο, ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΟΠΡ, τῷ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον τὸ παρὰ τὴν ΠΡ παραβληθὲν πλάτος ποιοῦν τὴν ΠΣ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ ἡ ΑΖ πρὸς ΘΖ· γέγονεν ἄρα τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ τὸ ΣΡ πρὸς ΡΟ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ. τοῦτο χρήσιμον καὶ τοῖς ἑξῆς θεωρήμασι.

[b] Quadratum autem ex ΒΓ ad ΒΑΓ rectangulum rationem habet compositam &c.] Ostensum enim est in sexto libro elementorum, theoremate vigesimo tertio, æquiangula parallelogramma inter se rationem habere ex laterum rationibus compositam. sed, quoniam interpretes inductione magis quam necessaria argumentatione utuntur, visum est nobis illud ipsum investigare; quod tametsi scriptum est in commentariis nostris in quartum theorema secundi libri *Archimedis* de Sphæra & Cylindro, & in [*Theonis*] scholiis in primum librum Magnæ Constructionis *Ptolemæi*, nihilominus tamen & hoc loco non inepte repetetur; propterea quod fortasse non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt, tum etiam, quod universa fere conicorum tractatio eum argumentandi modum usurpat. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum* componentium *quantitates inter se multiplicatæ quantitatem* compositæ *faciunt* [per 5. def.6.]: per quantitatem intelligendo numerum, à quo ratio ipsa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer: in reliquis vero habitudinibus necesse est quantitatem numerum esse, & partem seu partes; nisi forte quispiam velit etiam ineffabiles esse habitudines, quales sunt magnitudinum incom-

[b] Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ.] Δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως, ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ἐπαγωγικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέχθη, ἐζητήσαμεν αὐτό, καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως, οὐκ ἄκαιρον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι· διὰ τὸ μὴ πάντας τοὺς ἀναγινώσκοντας κἀκείνοις ἐντυγχάνειν, καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος. ἐπὶ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι πηλικότητα· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων, ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι καὶ μόριον ἢ μόρια, εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀρρήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέ-

* Scribitur etiam sæpius ὀρθία in MS. qualem vocem Græca lingua non agnoscit: nos igitur ὀρθίαν ubique usurpabimus.

θη.

δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΥΠΕΡΒΟΛΗ.

cetur autem & altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quæ ad basim trianguli per axem fit perpendicularis, & sectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem extra verticem coni conveniat: recta linea, quæ à sectione ducitur parallela communi sectioni plani secantis & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium adjacens rectæ, ad quam ea, quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditurque angulo extra triangulum, eandem rationem habet quam quadratum rectæ, quæ diametro parallela à vertice sectionis usque ad basim trianguli ducitur, ad rectangulum sub basis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens rectam, quæ ex diametro abscinditur inter ipsam & verticem sectionis interjectam; excedensque figura simili & similiter posita ei, quæ continetur sub recta angulo extra triangulum subtensa, & ea juxta quam possunt quæ ad diametrum applicantur. vocetur autem hujusmodi sectio HYPERBOLA.

vero ipsi Ζ Λ parallela ducatur Ν Ο Ξ, & juncta Θ Λ, & ad Ξ producta, per puncta Λ,Ξ ipsi ΖΝ parallelæ ducantur Λ Ο, Ξ Π: dico Μ Ν posse spatium Ζ Ξ, quod quidem adjacet ipsi Ζ Λ, latitudinem habens Ζ Ν, excedensque figura Λ Ξ, simili similiterque positæ ei, quæ sub Θ Ζ, Ζ Λ continetur.

καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ Δ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝ, διὰ δὴ τοῦ Ν τῇ ΖΛ παράλληλος ἡ ΝΟΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ Λ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ Ζ Ν παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Λ Ο, Ξ Π· λέγω ὅτι ἡ Μ Ν δύναται τὸ Ζ Ξ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν Ζ Λ, πλάτος ἔχον τὴν Ζ Ν, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ Λ Ξ, ὁμοίῳ ὄντι καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν Θ Ζ, Ζ Λ.

Ducatur enim per Ν recta Ρ Ν Σ parallela Β Γ; est autem & Μ Ν ipsi Δ Ε parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod transit per Μ Ν, Ρ Σ æquidistat plano per Β Γ, Δ Ε, hoc est basi coni. si igitur planum per ΜΝ, Ρ Σ producatur, sectio circulus erit [per 4. huj.] cujus diameter Ρ Ν Σ; atque est ad ipsam perpendicularis Μ Ν: ergo [per 35. 3.] rectangulum Ρ Ν Σ æquale est quadrato ex Μ Ν. ac quoniam [ex hyp.] ut quadratum ex Α Κ ad rectangulum Β Κ Γ ita est Ζ Θ ad Ζ Λ; ratio autem quadrati ex Α Κ ad rectangulum Β Κ Γ [per 23.6.] componitur ex ratione quam habet Α Κ ad Κ Γ, & ex ea quam Α Κ habet ad Κ Β: ratio igitur Θ Ζ ad Ζ Λ composita erit ex ratione Α Κ ad Κ Γ, & ratione Α Κ ad Κ Β. sed [per 4.6.] ut Α Κ ad Κ Γ ita Θ Η ad Η Γ, hoc est Θ Ν ad Ν Σ; & ut Α Κ ad Κ Β ita Ζ Η ad Η Β, hoc est Ζ Ν ad Ν Ρ: ratio igitur Θ Ζ ad Ζ Λ componitur ex ratione Θ Ν ad Ν Σ, & Ζ Ν ad Ν Ρ. at [per 23.6.] ratio composita ex ratione Θ Ν ad Ν Σ, & Ζ Ν ad Ν Ρ, est ea quam Θ Ν Ζ rectangulum habet ad rectangulum Σ Ν Ρ: ergo ut rectangulum Θ Ν Ζ ad Σ Ν Ρ ita Θ Ζ ad Ζ Λ,

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ν τῇ Β Γ παράλληλος ἡ Ρ Ν Σ, ἔστι δὴ καὶ ἡ Μ Ν τῇ Δ Ε παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν Μ Ν, Ρ Σ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν Β Γ, Δ Ε, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν Μ Ν, Ρ Σ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ Ρ Ν Σ, καί ἐστιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ Μ Ν· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ρ Ν Σ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Μ Ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Α Κ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Κ Γ οὕτως ἡ Ζ Θ πρὸς Ζ Λ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς Α Κ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Κ Γ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Κ πρὸς Κ Γ, καὶ Α Κ πρὸς Κ Β· καὶ ὁ τῆς Ζ Θ ἄρα πρὸς τὴν Ζ Λ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Κ πρὸς Κ Γ, καὶ ἡ Α Κ πρὸς Κ Β. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α Κ πρὸς Κ Γ οὕτως ἡ Θ Η πρὸς Η Γ, τουτέστιν ἡ Θ Ν πρὸς Ν Σ, ὡς δὲ ἡ Α Κ πρὸς Κ Β οὕτως ἡ Ζ Η πρὸς Η Β, τουτέστιν ἡ Ζ Ν πρὸς Ν Ρ· ὁ ἄρα τῆς Θ Ζ πρὸς Ζ Λ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Θ Ν πρὸς Ν Σ, καὶ τοῦ τῆς Ζ Ν πρὸς Ν Ρ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς Θ Ν πρὸς Ν Σ, καὶ τῆς Ζ Ν πρὸς Ν Ρ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν Θ Ν Ζ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Σ Ν Ρ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Θ Ν Ζ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Σ Ν Ρ οὕτως ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Λ,

τουτέστιν

τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΕΛΛΕΙΨΙΣ.

num conveniant secundum rectam lineam quæ sit perpendicularis vel ad basim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: recta linea, quæ à sectione coni ducitur parallela communi sectioni planorum usque ad diametrum sectionis, poterit spatium adjacens rectæ, ad quam sectionis diameter eam rationem habeat quam quadratum rectæ diametro parallelæ, à vertice coni usque ad trianguli basim ductæ, habet ad rectangulum contentum sub basis partibus quæ inter ipsam & rectas trianguli lineas interjiciuntur, latitudinem habens rectam quæ ex diametro ab ipsa abscinditur ad verticem sectionis, deficiensque figura simili & similiter posita ei, quæ sub diametro, & recta juxta quam possunt, continetur. dicatur autem hujusmodi sectio ELLIPSIS.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου, μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ,

SIT conus, cujus vertex A punctum, basis circulus ΒΓ, & secetur plano per axem, atque sectionem faciat triangulum ΑΒΓ, secetur autem & altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, neque basi coni æquidistante, neque subcontrarie posito,

* Latus transversum & rectum (sive potius erectum) sic videtur dici, quod in delineanda Parabola, Hyperbola, vel Ellipsi, illud transversum sive à dextra ad sinistram est ducendum, hoc vero super latus transversum erigendum; eodem sc. sensu quo dicitur πλαγία φάλαγξ, ὀρθία φάλαγξ, quod de diametro transversa & recta similiter intelligendum. Consuetudini tamen & commodo situi consulentes schemata aliter aliquando delineamus.

catur, fiet [per 4. huj.] sectio circulus, cujus diameter ΠΡ; & est ΛΜ ad ipsam perpendicularis: ergo [per 35.3.] rectangulum ΠΜΡ æquale est quadrato ex ΛΜ. Et quoniam est [ex hyp.] ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita ΔΕ ad ΕΘ, & ratio quadrati ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ [per 23. 6.] componitur ex ratione quam habet ΑΚ ad ΚΒ, & ex ea quam ΑΚ habet ad ΚΓ. ut autem ΑΚ ad ΚΒ ita [per 4. 6.] ΕΗ ad ΗΒ, hoc est ΕΜ ad ΜΠ; & ut ΑΚ ad ΚΓ ita ΔΗ ad ΗΓ, hoc est ΔΜ ad ΜΡ: erit igitur ratio ΔΕ ad ΕΘ composita ex ratione ΕΜ ad ΜΠ, & ratione ΔΜ ad ΜΡ. sed ratio composita ex rationibus ΕΜ ad ΜΠ, & ΔΜ ad ΜΡ, est ea quam ΕΜΔ rectangulum habet ad rectangulum ΠΜΡ: igitur ut rectangulum ΕΜΔ ad ipsum rectangulum ΠΜΡ ita ΔΕ ad ΕΘ, sive ΔΜ ad ΜΞ. ut autem ΔΜ ad ΜΞ (sumpta ΜΕ com-

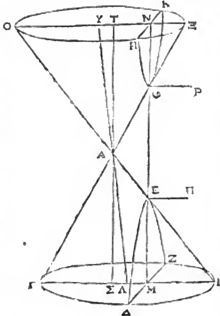
βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, καὶ ἔστι κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ· ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΕ κοι-

νειῶν τομὴ ἡ καλουμένη Ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἥτε διάμετρος αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ' ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμέναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθείᾳ ἴσαι, καὶ τοῦ εἴδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινὴ ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν. καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑΙ.

in utraque superficie sectio quæ vocatur Hyperbola, & duarum sectionum eadem erit diameter; rectæ vero, juxta quas possunt applicatæ ad diametrum parallelæ ei quæ est in basi coni, inter se æquales erunt; & figuræ transversum latus utrisque commune, quod scilicet inter sectionum vertices interjicitur. vocentur autem hujusmodi SECTIONES OPPOSITÆ.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

Ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἤχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ, κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΖΕΔ, ΗΘΚ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσονται δὴ παράλληλοι, ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ



SINT ad verticem superficies, quarum vertex A punctum; & secentur plano non per verticem, atque sectiones faciat in superficie lineas ΔΕΖ, ΗΘΚ: dico utramque sectionum ΔΕΖ, ΗΘΚ esse eam quæ Hyperbola appellatur.

Sit enim circulus ΒΔΓΖ, in quo fertur recta linea superficiem describens, ducaturque in superficie, quæ est ad verticem, planum ipsi æquidistans ΞΗΟΚ, & communes interfectiones sectionum ΖΕΔ, ΗΘΚ & circulorum sint ΖΔ, ΗΚ, quæ [per 16.11.] etiam parallelæ erunt; axis autem conicæ superficiei sit recta ΛΑΥ, & circulorum centra Λ, Υ; & a Λ ad ΖΔ perpendicularis ducta producatur ad Β, Γ

puncta;

sic BΘ ad ΘP. itaque quoniam conus, cujus vertex A & basis BΓ circulus, secatur plano per axem, quod sectionem facit triangulum ABΓ; secatur autem & altero plano secante basim coni secundum ΔMZ ad BΓ perpendicularem, quod sectionem facit in superficie lineam ΔEZ, diameterque ME producta cum uno latere trianguli per axem extra coni verticem convenit, & per punctum A diametro sectionis EM parallela ducitur AΣ, ab E vero ducitur EΠ ad rectos angulos ipsi EM, atque est ut quadratum ex AΣ ad rectangulum BΣΓ ita EΘ ad EΠ: erit [per 12. huj.] ipsa ΔEZ sectio hyperbola, & recta EM ea juxta quam possunt quæ ad EM ordinatim applicantur; transversum vero figuræ latus est recta ΘE. eadem ratione & HΘK hyperbola erit, cujus diameter ΘN; recta ΘP ea juxta quam possunt ordinatim ad ΘN applicatæ; ΘE vero transversum figuræ latus.

τως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΤΞ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποίηκε τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΜΖ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ πεποίηκε τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ΜΕ ἐκβαλλομένη συμπέπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΕΜ παράλληλος ἦκται ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΜ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΕΠ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΕΠ· ἡ μὲν ΔΕΖ ἄρα τομὴ ὑπερβολή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΠ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ.

Dico ΘP ipsi EΠ æqualem esse.

Quoniam enim parallelæ sunt BΓ, ΞO: ut AΣ ad ΣΓ ita erit [per 4.6.] AT ad TΞ; & ut AΣ ad ΣB ita AT ad TO. sed [per 23.6.] ratio AΣ ad ΣΓ, una cum ratione AΣ ad ΣB, est ea quam habet quadratum ex AΣ ad rectangulum BΣΓ, & ratio AT ad TΞ, una cum ratione AT ad TO, est quam habet quadratum ex AT ad rectangulum ΞTO: ergo ut quadratum ex

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΡ τῇ ΕΠ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΞΟ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΓ οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΞ, καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ. ἀλλ' ὁ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ· ὁ δὲ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΞ μετὰ τοῦ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΟ, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ

ἀχθεῖσα εὐθεῖα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἐφ' ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται. καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ' ἣν κατῆκται.

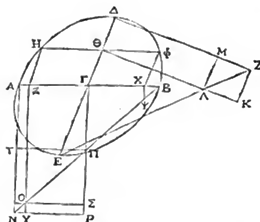
bifariam divisi, recta ordinatim ducta ex utraque parte ad sectionem producatur, & fiat ut producta ad diametrum ita diameter ad aliam: recta linea, quæ à sectione ducitur ad productam diametro parallela, poterit spatium adjacens tertiæ proportionali, latitudinem habens rectam quæ inter ipsam & sectionem interjicitur, deficiensque figura simili ei quæ continetur sub rectâ ad quam ducuntur & eâ juxta quam possunt. & si ulterius producatur ad alteram partem sectionis, bifariam secabitur ab ea ad quam applicata fuerit.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τεταγμένως καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς ἡ ΔΓΕ, καὶ ἀπὸ Δ σημείου τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ, πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΛΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΑΒ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ

SIT ellipsis, cujus diameter ΑΒ, seceturque ΑΒ bifariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicata ex utraque parte ad sectionem producatur, quæ sit ΔΓΒ; à puncto autem Δ ipsi ΔΕ ad rectos angulos ducatur ΔΖ, fiatque ut ΔΕ ad ΑΒ ita ΑΒ ad ΔΖ; & sumpto quolibet puncto Η in sectione, per Η ducatur ΗΘ ipsi ΑΒ parallela, & jungatur ΕΖ; deinde per Θ ipsi ΔΖ parallela ducatur ΘΛ, & per Ζ, Λ puncta ducantur ipsi ΘΔ parallelæ ΖΚ, ΛΜ: dico ΗΘ posse spatium ΔΛ, quod quidem adjacet rectæ ΔΖ, latitudinem habens ΔΘ, deficiensque figura ΛΖ simili ei quæ sub ΕΔΖ continetur.

Sit enim ΑΝ ea juxta quam possunt ordinatim applicatæ ad ΑΒ, junganturque ΒΝ; & per Η quidem



rectangulo ΑΟ una cum ΠΟ rectangulo: quare ΠΑ rectangulum superat rectangulum ΑΟ ipso ΟΠ. est autem [per 13.huj.] ΑΠ rectangulum æquale quadrato ex ΓΔ: rectangulumq; ΑΟ æquale quadrato ex ΞΗ, & ΟΠ ei quod sub ΟΣΠ continetur: ergo quadratum ex ΓΔ superat quadratum ex ΗΞ ipso ΟΣΠ rectangulo. & quoniam recta ΔΕ secatur in partes æquales in Γ puncto, & in partes inæquales in Θ: rectangulum ΕΘΔ una cum quadrato ex ΓΘ, hoc est ex ΞΗ, æquale erit [per 5.2.] quadrato ex ΓΔ: quadratum igitur ex ΓΔ superat quadratum ex ΞΗ rectangulo ΕΘΔ. superabat autem quadratum ex ΓΔ ipsum quadratum ex ΗΞ rectangulo ΟΣΠ: rectangulum igitur ΕΘΔ rectangulo ΟΣΠ est æquale. &

ΑΟ μετὰ τοῦ ΠΟ· ὥστε ΠΑ τοῦ ΑΟ ὑπερέχει τῷ ΟΠ. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΑΟ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΗ, τὸ δὲ ΟΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΟΣΠ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστι τοῦ ΞΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΗ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ. ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΗΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ

ἐπεὶ

[illegible]
ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΧΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΧΞ πρὸς ΧΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΧΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΓ τῇ ΓΧ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ΗΘ τῇ ΘΦ. ἡ ἄρα ΗΘ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΘ.

[illegible]
[per 16. 6.] ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΧΑ ad ΑΞ. & est ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΞΒ ad ΒΧ: ut ergo ΧΑ ad ΑΞ ita ΞΒ ad ΒΧ; & [per 17. 5.] dividendo, ut ΧΞ ad ΞΑ ita ΞΧ ad ΧΒ: æqualis igitur est [per 9. 5.] ΑΞ ipsi ΧΒ. est autem ΑΓ æqualis ΓΒ: quare & reliqua ΞΓ reliquæ ΓΧ: & idcirco ΗΘ ipsi ΘΦ est æqualis. recta igitur ΗΘ producta ad alteram sectionis partem ab ipsa ΔΘ bifariam secabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

Ἔστωσαν γὰρ παρ' ἃς δύνανται αἱ τεταγμένως καταγόμεναι, αἱ ΑΕ, ΒΖ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΖ, ΒΕ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν Η, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ τῶν ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

Prop. XVI. *Theor.*

Si per punctum, quod transversum latus oppositarum sectionum bifariam dividit, recta ducatur ordinatim applicatæ parallela; erit hæc ipsarum diameter, priori diametro conjugata.

Sint oppositæ sectiones, quarum diameter ΑΒ; seceturque ΑΒ bifariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicatæ parallela ducatur ΓΔ: dico ΓΔ diametrum esse conjugatam ipsi ΑΒ.

Sint enim ΑΕ, ΒΖ juxta quas possunt ordinatim applicatæ, & junctæ ΑΖ, ΒΕ producantur, sumpto autem in altera sectione quovis puncto Η, ducatur per Η ipsi ΑΒ parallela ΗΘ, & à punctis Η, Θ ordinatim applicentur ΗΚ, ΘΛ; deinde à punctis Κ, Λ ipsis ΑΕ, ΒΖ parallelæ ducantur ΚΜ, ΛΝ. quoniam igitur æqualis est [per 34. 1.] ΗΚ ipsi ΘΛ: erit quadratum ex ΗΚ quadrato ex ΘΛ æquale. sed [per 12. hujus] quadratum ex ΗΚ æquale est rectangulo ΑΚΜ, & quadratum ex ΘΛ rectangulo ΒΛΝ: ergo ΑΚΜ rectangulum rectangulo

L ΒΛΝ

ipſum ΑΛΒ; & [per 16. 5.] permutando ut ΜΚΛ rectangulum ad rectangulum ΝΛΒ ita ΒΚΛ rectangulum ad rectangulum ΑΛΒ. eſt autem [ut modo oſtenſum] rectangulum ΜΚΛ æquale rectangulo ΝΛΒ: ᵃquare & ΒΚΛ rectangulum æquale rectangulo ΑΛΒ; & propterea ΛΚ ipſi ΛΒ æqualis erit. eſtque ΑΓ æqualis ΓΒ: ergo & tota ΚΓ toti ΓΛ: & ideo ΗΞ ipſi ΞΘ æqualis. recta igitur ΗΘ ab ipſa ΞΓΔ bifariam ſecabitur, atque eſt ipſi ΑΒ parallela: ergo [per 17. def.] diameter erit & ΞΓΔ conjugata ipſi ΑΒ.

τας τὸ ὑπὸ ΝΛΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΛΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΚΛ τῷ ὑπὸ ΝΛΒ· ᵃἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚΛ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἡ ΛΚ τῇ ΛΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ ὅλῃ τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ τῇ ΞΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ, καὶ ἔστι παράλληλος τῇ ΑΒ· διάμετροι ἄρα εἰσὶ, καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

EUTOCIUS.

ᵃ Quare & ΒΚΛ rectangulum æquale rectangulo ΑΛΒ; & propterea ΛΚ ipſi ΛΒ æqualis erit.] Quoniam enim rectangulum ΒΚΛ ipſi ΑΛΒ rectangulo eſt æquale; erit [per 16. 6.] ut ΚΒ ad ΑΛ ita ΛΒ ad ΛΚ, permutandoque ut ΚΒ ad ΒΛ ita ΑΛ ad ΛΚ, & componendo ut ΚΛ ad ΛΒ ita ΚΛ ad ΚΛ: æqualis igitur eſt ΚΛ ipſi ΒΛ.

Scire autem oportet, in quintodecimo & ſexto decimo theoremate *Apollonio* propoſitum fuiſſe, ut ſecundas, & conjugatas quas vocant, diametros inquireret ellipſis, & hyperbolæ, & oppoſitarum ſectionum: parabola enim ejuſmodi diametrum non habet. ſed & illud notatu dignum eſt, diametros ellipſis intra recipi; hyperbolæ vero & oppoſitarum ſectionum diametros deſcribi extra. oportet autem rectas juxta quas poſſunt ordinatim applicatæ, ſeu recta latera, & quæ ipſis æquidiſtant ad rectos angulos aptare; ordinatim vero applicatas, & ſecundas diametros non ſemper. maxime tamen debent in acuto angulo applicari, ut longe aliæ & diverſæ ab eis quæ recto lateri ſunt parallelæ, deprehendantur.

ᵃ Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΛ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΛΒ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΚΛ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ ἐστὶν ἴσον· ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΑΛ ἡ ΛΒ πρὸς ΛΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΛ ἡ ΑΛ πρὸς ΛΚ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΒ ἡ ΚΛ πρὸς ΚΛ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΒΛ.

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ καὶ ἑκκαιδεκάτῳ θεωρήματι σκοπὸν ἔχει ζητῆσαι τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως, καὶ τῆς ὑπερβολῆς, καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἡ γὰρ παραβολὴ οὐκ ἔχει τοιαύτην διάμετρον. παρατηρητέον δὲ, ὅτι αἱ μὲν τῆς ἐλλείψεως διάμετροι ἐντὸς ἀπολαμβάνονται, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτὸς καταγράφονται. δεῖ δὲ τὰς μὲν παρ' ἃς δύνανται, ἤγουν τὰς ὀρθίας πλευρὰς, πρὸς ὀρθὰς τιθέναι, καὶ δηλονότι καὶ τὰς παραλλήλους αὐταῖς· τὰς δὲ τεταγμένως κατηγμένας, καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους, οὐ πάντως. μάλιστα γὰρ ἐν ὀξείᾳ γωνίᾳ δεῖ κατάγειν αὐτὰς, ἵνα σαφεῖς ὦσιν τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἕτεραι οὖσαι τῶν παραλλήλων τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I. PUNCTUM, quod hyperbolæ & ellipſis diametrum bifariam dividit, centrum ſectionis dicatur.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α΄. ΤΗΣ ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου, κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω.

β΄. Ἡ δὲ

τομῆς εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι, καὶ δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῆς ἀπείρου προστεθείσῃ εὐθείᾳ ἀφελεῖν ἴσην. τὸ δὲ Ζ κέντρον καλεῖ, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίως αὐτῇ, ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τομὴν προσπιπτούσας, ἐκ τοῦ κέντρου. ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων. καὶ φανερὸν ὅτι πεπερασμένη ἐστὶν ἑκατέρα τῶν διαμέτρων, ἡ μὲν πρώτη αὐτόθεν ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα διότι μέση ἀνάλογόν ἐστι πεπερασμένων εὐθειῶν, τῆς τε πρώτης διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως οὔπω δῆλον τὸ λεγόμενον. ἐπειδὴ γὰρ εἰς ἑαυτὴν συννεύει καθάπερ ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς ἀπολαμβάνει πάσας τὰς διαμέτρους, καὶ περατουμένας αὐτὰς ἀποφαίνεται· ὥστε οὐ πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἡ μέση ἀνάλογον τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς τομῆς περατοῦται. δυνατὸν δὲ αὐτὴν συλλογίζεσθαι διὰ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐκεῖ δέδεικται, ἐπὶ τὴν ΔΕ καταγόμεναι, παράλληλοι τῇ ΑΒ, δύνανται τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν τρίτην αὐτῶν ἀνάλογον γινομένην, τουτέστι τὴν ΖΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΑΒ πρὸς ΔΖ· ὥστε μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΒ τῶν ΕΔ, ΔΖ· καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΒ, παράλληλοι τῇ ΔΕ, δύνανται τὰ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενα τῶν ΔΕ, ΑΒ, τουτέστι τὴν ΑΝ. διὰ δὴ τοῦτο μέση ἀνάλογον γίνεται ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ΒΑ, ΑΝ,

in infinitum produci possit, atque à recta infinita cuilibet datæ rectæ æqualis facile abscindatur. punctum autem Z vocat centrum, & rectam ZB & alias quæ similiter à puncto Z ad sectionem ducuntur, ex centro appellat; atque hæc in hyperbola & oppositis sectionibus. constat ergo utramque diametrum terminatam esse; primam quidem per se ex generatione sectionis; secundam vero, quod media proportionalis sit inter rectas terminatas, videlicet inter primam diametrum, & eam juxta quam possunt quæ ad diametrum ordinatim applicantur.

Sed in ellipsi id quod dictum est nondum apparet. quoniam enim illa in seipsam vergat instar circuli, & omnes diametros intra recipiat atque terminet: non semper in ellipsi, media proportionalis inter figuræ latera, ducta per centrum sectionis, & à diametro bifariam divisa, ab ipsa sectione terminatur. hoc autem ex iis quæ dicta sunt in quinto decimo theoremate ostendere possumus. quoniam enim, ut demonstratum est, quæ ad rectam ΔE applicantur, parallelæ ipsi AB, possunt spatia tertiæ proportionali ipsis, videlicet rectæ ZΔ adjacentia: erit ut ΔE ad AB ita AB ad ΔZ: quare AB media proportionalis est inter EΔ, ΔZ: & idcirco, quæ applicantur ad AB, ipsi ΔE parallelæ, poterunt spatia adjacentia tertiæ proportionali ipsis ΔE, AB, hoc est rectæ AN. ergo secunda diameter ΔE est media proportionalis inter figuræ

rallela, [per 7.huj.] diametro A B occurrit, atque ab ipsa bifariam secatur: quare A Γ producta bifariam secabitur à recta A B; quod est absurdum: A Γ enim producta [per 10.huj.] extra sectionem cadit. non igitur recta, quæ à puncto A ducitur ordinatim applicatæ parallela, cadet intra sectionem: ergo extra cadet; & propterea sectionem ipsam necessario continget.

B

[illegible] μέτρῳ, καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς· ἡ Α Γ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς Α Β, ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ Α Γ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται, διόπερ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

EUTOCIUS.

Euclides in quinto decimo theoremate tertii libri elementorum ostendit rectam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra atque circulum ipsum contingere: *Apollonius* autem hoc loco universale quoddam demonstrat, quod tum tribus coni sectionibus, tum circulo convenit. hoc enim differt circulus à coni sectionibus, quod in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares sunt ad diametrum; neque enim aliæ rectæ parallelæ à diametro circuli bifariam dividuntur: at in tribus sectionibus, perpendiculares non semper ducuntur, præterquam ad solos axes.

Ὁ μὲν Εὐκλείδης ἐν τῷ δεκάτῳ πέμπτῳ θεωρήματι τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως ἔδειξεν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἐκτός τε πίπτει καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τούτῳ καθολικόν τι δείκνυσι δυνάμενον ἐφαρμόσαι ταῖς τρισὶ τοῦ κώνου τομαῖς καὶ τῷ κύκλῳ. τούτῳ γὰρ διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ὅτι ἐπ' ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἄγονται τῇ διαμέτρῳ, οὐδὲ γὰρ ἄλλαι εὐθεῖαι παράλληλοι ἑαυταῖς ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου διχοτομοῦνται· ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν τομῶν οὐ πάντως πρὸς ὀρθὰς ἄγονται, εἰ μὴ ἐπὶ μόνους τοὺς ἄξονας.

PROP. XVIII. *Theor.*

Si recta linea coni sectioni occurrat, productaque in utramque partem extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum intra sectionem, & per ipsum ei quæ sectioni occurrit parallela ducatur: ducta recta & producta ex utraque parte sectioni occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ· ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

SIT coni sectio, atque ipsi occurrens recta A B Z, quæ producta in utramque partem extra sectionem cadat; sumpto autem intra se-

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ, καὶ συμπίπτουσα αὐτῇ ἡ Α Β Ζ εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς

τομῆς

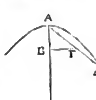
τῶν τομῶν. δεῖ δὲ ἐπισκέψασθαι, ὅτι, κἂν ἡ Α Ζ Β τέμνῃ τὴν τομήν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει.

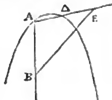
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Β, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ Β Γ· λέγω ὅτι ἡ Β Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, ἔστι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ Α Δ, καὶ ἔστι τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἡ Β Γ· καὶ ἡ Β Γ ἄρα συμπεσεῖται τῇ Α Δ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Α, Δ σημείων, φανερὸν ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ Δ, ὡς κατὰ τὸ Ε, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.





que parte, necessario ipsam secabit. sciendum autem est eandem congruere demonstrationem, etiam si A Z B secet ipsam sectionem.

Prop. XIX. *Theor.*

In omni sectione coni, recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum sectione conveniet.

Sit coni sectio, cujus diameter A B, sumaturque aliquod punctum B in diametro; & per B ducatur B Γ parallela ordinatim applicatæ: dico B Γ productam cum sectione convenire.

Sumatur enim quodlibet punctum Δ in sectione; est autem & punctum A in sectione: ergo [per 10. huj.] à puncto A ad Δ ducta recta intra sectionem cadet. & quoniam [per 17. huj.] quæ ab A ducta est ordinatim applicatæ parallela, cadit extra sectionem, & cum ipsa convenit recta A Δ, itemque B Γ parallela est ordinatim applicatæ: sequitur quod B Γ etiam cum A Δ conveniet. & si quidem convenit inter puncta A, Δ; perspicuum est eam cum sectione quoque convenire. si vero extra Δ, ut ad punctum E, prius conveniet cum sectione. ergo recta linea, quæ à puncto B ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum sectione conveniet.

quare ut quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Γ B ita rectangulum Z A H ad rectangulum E A H. ut autem rectangulum Z A H ad rectangulum E A H, ita [per 1.6.] linea Z A ad lineam A E: ergo ut quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Γ E, ita erit Z A ad A E.

ὡς τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E, οὕτως τὸ ὑπὸ Z A H πρὸς τὸ ὑπὸ E A H. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ Z A H πρὸς τὸ ὑπὸ E A H, οὕτως ἡ Z A πρὸς A E· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Γ E, οὕτως ἡ Z A πρὸς A E.

EUTOCIUS.

Ab hoc theoremate incipiens *Apollonius* deinceps in omnibus accidentia, quæ ipsi parabolæ insunt & non alii cuipiam, ostendit: sicut plerumque eadem hyperbolæ, ellipsi, & circulo convenire demonstrat. Quoniam autem non inutile visum est iis qui mechanica tradunt, ob instrumentorum penuriam, sæpenumero per continuata puncta coni sectiones in plano describere: ex hoc theoremate suppeditatur modus sumendi ea puncta continuata, per quæ parabola regulæ adminiculo designabitur. si enim exponamus rectam ut A B, & in ea sumamus puncta continuata E, Z, à quibus ad rectos angulos ipsi A B rectas E Γ, Z Δ ducamus *, sumpto in E Γ quolibet puncto Γ, longius quidem ab E si latiorem parabolam facere libuerit, si vero angustiorem propius; & fiat ut A E ad A Z ita quadratum ex E Γ ad quadratum ex Z Δ: puncta Γ, Δ in sectione erunt. Pari modo sumentur & alia puncta per quæ parabola describetur.

Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος ἀρξάμενος ἐφεξῆς ἐν πᾶσι τοῖς συμπτώμασι τῆς παραβολῆς αὐτῇ δείκνυσιν ὑπάρχοντα καὶ οὐκ ἄλλῃ τινί· ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ τῇ ὑπερβολῇ, καὶ τῇ ἐλλείψει, καὶ τῷ κύκλῳ τὰ αὐτὰ δείκνυσιν ὑπάρχοντα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἄχρηστον φαίνεται τοῖς τὰ μηχανικὰ γράφουσι, διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων, καὶ πολλάκις διὰ συνεχῶν σημείων γράφειν τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος ἔστι πορίσασθαι συνεχῆ σημεῖα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολὴ κανόνος παραθέσει. ἐὰν γὰρ ἐκθῶμαι εὐθεῖαν, ὡς τὴν A B, καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβω συνεχῆ σημεῖα, ὡς τὰ E, Z, καὶ ἐπ' αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ A B, καὶ ποιήσω ὡς τὰς E Γ, Z Δ, λαβὼν ἐπὶ τῆς E Γ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, εἰ μὲν εὐρυτέραν βουληθείην ποιῆσαι παραβολὴν, πόῤῥω τοῦ E, εἰ δὲ στενωτέραν, ἐγγύτερον, καὶ ποιήσω ὡς τὴν A E πρὸς A Z, οὕτως τὸ ἀπὸ E Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Δ· τὰ Γ, Δ σημεῖα ἐπὶ τῆς τομῆς ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα ληψόμεθα δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολή.

PROP. XXI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spatia contenta sub rectis, quæ inter ipsas & vertices transversi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus ad transversum inter sese vero, ut spatia quæ interjectis, ut diximus, rectis continentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἄλληλα δὲ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

* Non opus est ut rectæ E Γ, Z Δ, &c. sint ad rectos angulos ipsi A B, sufficit ut sint inter se parallelæ.

Ἔστω

πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, οὕτως ΓΑ πρὸς ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ.

BHA: erit [per 11.5.] ut ΓA ad AB, ita rectangulum KHA (hoc est quadratum ex ZH) ad rectangulum BHA. eadem ratione demonstrabitur etiam ut quadratum ex ΔE ad rectangulum BEA, ita ΓA ad AB: ergo [per 11.5.] ut quadratum ex ZH ad rectangulum BHA, ita quadratum ex ΔE ad BEA rectangulum; & permutando, ut quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔE, ita rectangulum BHA ad rectangulum BEA.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα σαφῶς ἔκκειται, καὶ πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ παρ' ἣν δύνανται, τουτέστιν ἡ ὀρθία πλευρά, ἐπὶ τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. εἰ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ. δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι αἱ κατηγμέναι ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς ὀρθάς εἰσι πάντως τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἐπ' εὐθείας γίνονται ταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΓ.

Theorema manifeste exponitur, & casum non habet. oportet autem scire lineam juxta quam possunt, videlicet rectum figuræ latus, in circulo quidem diametro æquale esse. quoniam enim ut quadratum ex ΔE ad rectangulum AEB ita est ΓA ad AB; quadratum autem ex ΔE rectangulo AEB in circulo est æquale; sequitur quod & ΓA æqualis sit ipsi AB. Sed illud quoque sciendum est, lineas, quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares esse, atque in iisdem rectis lineis in quibus sunt parallelæ ipsi AΓ.

Διὰ δὲ τούτου τοῦ θεωρήματος, τῷ αὐτῷ τρόπῳ τοῖς ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἰρημένοις προσέχοντες, γράφομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν ὀργάνου παραδόσει. ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ΑΗ τὰ Ε, Η, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ, καὶ γινέσθω τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΘ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΕ· διὰ γὰρ τῶν Α, Δ, Ζ ἥξει ἡ ὑπερβολή. ὁμοίως δὲ κατασκευάσομεν καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως.

Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum est in parabola, hyperbolam & ellipsim regulæ adminiculo describemus. exponatur enim recta linea AB, & in infinitum producatur ad H; à puncto autem A ad rectos angulos ipsi AB ducatur AΓ: junctaque BΓ & producta, sumantur in linea AH puncta quædam E, H, & à punctis E, H ipsi AΓ parallelæ ducantur EΘ, HK, & fiat AHK rectangulum æquale quadrato ex ZH, & rectangulum AEΘ æquale ipsi quadrato ex ΔE; & transibit hyperbola per puncta A, Δ, Z. similiter eadem & in ellipsi construemus.

Prop.

linea ΓΕ major ipsa ΔΒ. & sunt inter sese parallelæ: ergo recta ΓΔ producta cum diametro ΑΒ extra sectionem conveniet. sed sit sectio hyperbola. itaq; quoniam [per 21. huj.] in hyberbola ut quadratum ex ΓΕ ad quadratum ex ΔΒ, ita est rectangulum ΖΕΑ ad rectangulum ΖΒΑ; quadratum ex ΓΕ majus erit quadrato ex ΔΒ. & sunt parallelæ: igitur ΓΔ producta cum diametro sectionis extra sectionem conveniet.

καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒΑ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

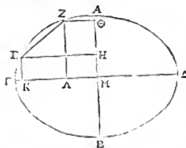
Prop. XXIII. *Theor.*

Si ellipsim recta linea secet inter duas diametros sita: producta cum utraque earum extra sectionem conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ μεταξὺ κειμένη τῶν διαμέτρων· ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

SIT ellipsis, cujus diametri ΑΒ, ΓΔ; & secet quædam recta sectionem, videlicet ipsa ΕΖ, inter duas diametros ΑΒ, ΓΔ interjecta: dico ΕΖ productam convenire cum utraque earum extra sectionem.



Applicentur enim à punctis Ε, Ζ ordinatim ad diametrum quidem ΑΒ rectæ ΗΕ, ΖΘ; ad ΔΓ vero ΕΚ, ΖΛ: est igitur [per 21. huj.] ut quadratum ex ΕΗ ad quadratum ex ΖΘ, ita rectangulum ΒΗΑ ad rectangulum ΒΘΑ. ut autem quadratum ex ΖΛ ad quadratum ex ΕΚ, ita rectangulum ΔΛΓ ad

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετροι ΑΒ, ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ ΕΖ μεταξὺ κειμένη τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

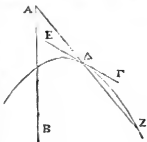
Κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΔΓ αἱ ΕΚ, ΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΑ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΓ.

:

Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα, καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ.

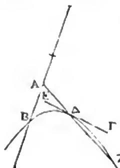
Si parabolæ vel hyperbolæ recta linea, in uno puncto occurrens, producta ex utraque parte extra sectionem cadat: cum diametro conveniet.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ.



Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· ἡ ΔΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστι μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΔΑ ἡ ΔΕ· ἡ ΓΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

SIT parabola vel hyperbola, cujus diameter AB; occurratque ipsi recta ΓΔΕ in puncto Δ, quæ producta ex utraque parte extra sectionem cadat: dico ΓΔΕ cum diametro AB convenire.



Sumatur enim aliquod punctum Z in sectione; & jungatur ΔZ: ergo [per 22. hujus] ΔZ producta conveniet cum diametro extra sectionem. conveniat autem in A puncto, & recta ΔE est inter sectionem & ΔA. recta igitur ΓΔE producta cum diametro extra sectionem conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς

PROP. XXV. *Theor.*

Si ellipsi recta linea occurrens inter duas diametros *, producta ex utraque

* Nempe conjugatos ut in XXIII.

parte

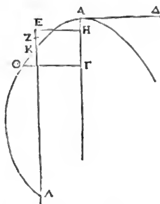
nea ducatur diametro sectionis parallela: in uno tantum puncto cum sectione conveniet.

τὴν διάμετρον τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

SIT primum parabola, cujus diameter ΑΒΓ, rectum autem latus ΑΔ; & ipsi ΑΒ parallela ducatur ΕΖ: dico ΕΖ productam cum sectione convenire.

ΕΣΤΩ πρότερον παραβολὴ, ἧς διάμετρος ΑΒΓ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Sumatur enim in ipsa ΕΖ aliquod punctum Ε, à quo ducatur ΕΗ ordinatim applicatæ parallela, & quadrato ex ΗΕ majus sit rectangulum ΔΑΓ; à puncto autem Γ ordinatim applicetur ΓΘ: ergo [per 11. huj.] quadratum ex ΘΓ æquale est rectangulo ΔΑΓ. atque est rectangulum ΔΑΓ majus quadrato ex ΕΗ: quadratum igitur ex ΘΓ quadrato ex ΕΗ majus erit; & idcirco linea ΘΓ major linea ΕΗ. & sunt parallelæ inter se: ergo ΕΖ producta secabit ΘΓ; proptereaque conveniet cum sectione. conveniat in Κ. dico in uno tantum puncto Κ convenire. si enim fieri potest, conveniat etiam in Λ. quoniam igitur parabolam recta linea secat in duobus punctis, si producatur [per 22. huj.] conveniet cum diametro sectionis; quod est absurdum. positum enim est ipsi esse parallelam. ergo ΕΖ producta in uno tantum puncto cum sectione conveniet.



Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ, τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ μεῖζον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΓΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΘΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΓ τῆς ΕΗ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ΘΓ, ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ. λέγω δὴ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Κ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ.

Ἔστω

cum sectione conveniet.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ταύτην τεμνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἤχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ ΓΔ τῇ ΑΕ παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Μὴ ἔστω δὲ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀλλ' ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ ΑΕ κατὰ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐπὶ τὰ μέρη ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Ε, φανερόν. εἰ γὰρ τῇ ΑΕ συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν. λέγω πάλιν ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ ΜΑ, καὶ τεταγμένως κατηγμένη ἡ ΗΖ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΖ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΒ συμπιπτέτω τῇ ΔΓ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΒ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΔ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐπειδὴ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ

SIT parabola, cujus diameter AB; & ipsam AB secet quæpiam recta ΓΔ intra sectionem: dico ΓΔ productam in utramque partem cum sectione convenire.

Ducatur enim à puncto A ordinatim applicatæ parallela AE; ergo [per 17. huj.] AE extra sectionem cadet: itaque vel ΓΔ ipsi AE parallela est, vel non. & si quidem sit parallela, ordinatim applicata est: quare [per 19. huj.] producta in utramque partem conveniet cum sectione.

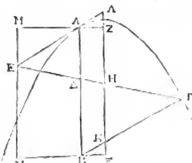
Sed non sit parallela, verum producatur & conveniat cum AE in E puncto. constat igitur ipsam cum sectione convenire ad partes E. si enim convenit cum AE, multo prius sectioni occurrit. dico rursus eandem & ad alteras partes productam convenire cum sectione. sit enim MA linea juxta quam possunt, & HZ ordinatim applicetur, quadratum autem ex AΔ æquale sit rectangulo BAZ; & ordinatim applicatæ parallela BΓ conveniat cum ΔΓ in Γ puncto. quoniam igitur rectangulum ZAB æquale est quadrato ex AΔ; erit [per 17. 6.] ut AB ad AΔ ita ΔA ad AZ: quare [per 19. 5.] & reliqua BΔ ad reliquam ΔZ est ut BA ad AΔ: & propterea [per 22. 6.] ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΔ, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ. rursus quoniam quadratum ex AΔ æquale est rectangulo BAZ,

In aliquibus exemplaribus vigesimiseptimi theorematis talis legitur demonstratio.

SIT parabola cujus diameter A B, & hanc secet recta quædam H Δ intra sectionem: dico H Δ productam ad utrasque partes cum sectione convenire.

Ducatur enim per A punctum ordinatim applicatæ parallela A E: ergo [per 17. huj.] A E cadet extra sectionem; itaque vel H Δ ipsi A E parallela erit, vel non. & siquidem H E sit parallela, ipsa ordinatim applicata est, ideoque [per 19. huj.] si producatur ad utrasque partes, bifariam secta à diametro conveniet cum sectione. sed non sit ipsi A E parallela, sed producta conveniat cum A E in E puncto. perspicuum est ipsam, si cum A E convenit, multo prius sectioni occurrere.

Dico etiam ad alteras partes productam cum sectione convenire. sit enim M A linea juxta quam possunt, & in directum ipsi producatur A Z: ergo M A ad A B est perpendicularis. fiat ut quadratum ex A E ad triangulum A E Δ sic linea M A ad A Z; & per puncta M, Z ipsi A B parallelæ ducantur Z H K, M N. cum igitur quadrilaterum sit Λ A Δ H, & positione datur Λ A; ducatur Γ K B ipsi Λ A parallela, quæ abscindat Γ K H triangulum quadrilatero Λ A Δ H æquale, & per B ipsi Z A M parallela ducatur Ξ B N. itaque quoniam [per constr.] ut quadratum ex A E ad triangulum A E Δ ita est M A ad A Z, & ut quadratum ex A E ad A E Δ triangulum ita quadratum ex Γ B ad triangulum Δ Γ B; ete-



Εν τισιν ἀντιγράφοις τοῦ εἰκοσιεβδόμου θεωρήματος φέρεται τοιαύτη ἀπόδειξις.

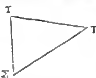
Εστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ ταύτην τεμνέτω εὐθεῖά τις ἡ H Δ ἐντὸς τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ H Δ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ηχθω γάρ τις διὰ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ A E· ἡ A E ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ H Δ τῇ A E παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστι τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα, ἐπεὶ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἔστω δὴ μὴ παράλληλος τῇ A E, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ A E κατὰ τὸ E. δῆλον εἰ μὲν τῇ A E συμβάλλει, ὅτι πολὺ πρότερον τεμεῖ τὴν τομήν.

Λέγω ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ M A, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἡ A Z· ἡ M A ἄρα τῇ A B πρὸς ὀρθάς ἐστι. πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως ἡ M A πρὸς τὴν A Z, καὶ διὰ τῶν M, Z τῇ A B παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Z K, M N. τετραπλεύρου ἓν ὄντος τοῦ Λ A Δ H, καὶ θέσει δοθείσης τῆς Λ A, ἤχθω τῇ Λ A παράλληλος ἡ Γ K B, ἀποτέμνουσα τὸ Γ K H τρίγωνον τῷ Λ A Δ H τετραπλεύρῳ ἴσον, καὶ διὰ τοῦ B τῇ Z A M παράλληλος ἤχθω ἡ Ξ B N. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως ἡ M A πρὸς A Z· καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ A E πρὸς τὸ A E Δ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς Δ Γ B τρίγωνον, παράλληλος γάρ

ΑΕ, καὶ τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ χωρίον τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ἴσον παραβάλλω, ἕξω τὸ ζητούμενον.

b Τετραπλεύρου ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ, καὶ θέσει οὔσης τῆς ΛΑ, ἤχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ, ἀποτέμνουσα τὸ ΓΚΗ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον.] Τοῦτο δὴ ποιήσομεν οὕτως. ἐὰν γάρ, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ὅμοιον τὸ αὐτὸ συστησώμεθα τὸ ΣΤΥ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΣΥ τῇ ΑΔ, καὶ ἀπολάβωμεν τῇ μὲν ΥΣ ἴσην τὴν ΗΚ, τῇ δὲ ΤΥ ἴσην τὴν ΗΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΚ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Υ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Δ γωνίᾳ, τουτέστι τῇ Η· ἄρα τοῦτο ἴσον καὶ ὅμοιον τὸ ΓΗΚ τῷ ΣΤΥ. καὶ ἴση ἡ Γ γωνία τῇ Ε, καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΑΕ. φανερὸν δὲ ὅτι ὅταν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν, ἡ ΜΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ὅταν δὲ μὴ ἄξων, τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται πάντως τῇ διαμέτρῳ.



describentes quadratum lineæ AE, ipsius lateri apposuerimus [per 44.1.] spatium triangulo AEΔ æquale, factum jam erit quod quæritur.

b Cum igitur quadrilaterum sit ΛΑΔΗ, & positione data ΛΑ, ducatur ΓΚΒ ipsi ΛΑ parallela, quæ abscindat ΓΚΗ triangulum quadrilatero ΛΑΔΗ æquale.] Hoc ita faciemus. Si enim, ut in elementis [ad 25.6] didicimus, dato rectilineo, videlicet quadrilatero ΛΑΔΗ, æquale & triangulo dato ΑΕΔ simile constituerimus triangulum ΣΤΥ, ita ut latus ΣΥ lateri ΑΔ respondeat, & [per 3.1.] fecerimus ΗΚ ipsi ΥΣ æqualem, & ΗΓ æqualem ΤΥ, & junxerimus ΓΚ; factum erit quod quæritur. quoniam enim angulus ad Υ æqualis est angulo ad Δ, hoc est ei qui ad Η; erit triangulum ΓΗΚ æquale ac simile triangulo ΣΤΥ, & angulus Γ angulo Ε æqualis, & alterni sunt: linea igitur ΓΚ [per 27.1.] est parallela ipsi ΑΕ. perspicuum autem est, quod, quando ΑΒ sit axis, linea ΜΑ tangit sectionem; quando vero non sit axis, secat, & ad diametrum omnino perpendicularis ducitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεῖα· ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι ὧν ἡ ΑΒ διάμετρος, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si recta linea unam oppositarum sectionum contingat, sumatur autem punctum intra alteram sectionem, & per ipsum recta contingenti parallela ducatur: producta ad utrasque partes cum sectione conveniet.

SINT oppositæ sectiones, quarum diameter AB; & sectionem, in qua est A, contingat quævis

H N in directum producatur. itaque quoniam K Λ ipsi M N est parallela; & K Θ ipsi H N; & est Λ M una eademque recta: triangulum K Θ Λ [per 9. 1. & 4. 6] simile est triangulo H M N. est autem Λ Θ æqualis H M: quare & K Λ ipsi M N æqualis erit: ideoque quadratum ex K Λ æquale quadrato ex M N. rursus quoniam Λ Θ æqualis est H M & Λ Θ ipsi B H, communis autem A B; erit B Λ æqualis A M; & propterea rectangulum B Λ A rectangulo A M B æquale: ut igitur rectangulum B Λ A ad quadratum ex K Λ, ita rectangulum A M B ad quadratum ex M N. sed [per 21. huj.] ut rectangulum B Λ A ad quadratum ex Λ K, ita transversum figuræ latus ad rectum: quare ut rectangulum A M B ad quadratum ex M N ita erit latus transversum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum N in sectione esse: ergo E Z producta cum sectione conveniet in puncto N. similiter ostendemus, si ex altera parte producatur, cum sectione convenire.

ίως κατηγμένη ἤχθω ἡ Μ Ν, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ Η Ν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Κ Λ τῇ Μ Ν, ἡ δὲ Κ Θ τῇ Η Ν, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ Λ Μ, ὅμοιόν ἐστι τὸ Κ Θ Λ τρίγωνον τῷ Η Μ Ν τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ Λ Θ τῇ Η Μ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Λ τῇ Μ Ν· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ Κ Λ τῷ ἀπὸ Μ Ν ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Λ Θ τῇ Η Μ, ἡ δὲ Λ Θ τῇ Β Η, κοινὴ δὲ ἡ Α Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β Λ τῇ Α Μ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Β Λ Α τῷ ὑπὸ Α Μ Β· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Β Λ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Λ οὕτως τὸ ὑπὸ Α Μ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Ν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ Β Λ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Κ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Α Μ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Ν οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· τὸ Ν ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν· ἡ Ε Ζ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ Ν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

EUTOCIUS.

Quod si Γ Δ hyperbolam secet, eadem sequentur, quemadmodum in decimo octavo theoremate.

Ὅτι κἂν ἡ Γ Δ τέμνῃ τὴν ὑπερβολήν, τὰ αὐτὰ συμβήσεται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ δεκάτου ὀγδόου.

Prop. XXIX. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus recta linea per centrum ducta occurrat uni sectioni; ulterius producta alteram quoque secabit sectionem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεῖα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν, ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὴν ἑτέραν τομήν.

Sint sectiones oppositæ, quarum diameter A B, centrum autem Γ; & recta Γ Δ sectionem A Δ secet: dico sectionem Γ Δ alteram quoque secare.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ Γ Δ τεμνέτω τὴν Α Δ τομήν· λέγω ὅτι καὶ τὴν ἑτέραν τομὴν τεμεῖ.

Τεταγμένως

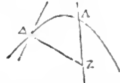
E αὐτῶν ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ Δ Γ Ε· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Γ Δ τῇ Γ Ε.

Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ Δ Ζ, Ε Η. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ Β Ζ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ Α Η Β πρὸς τὸ ἀπὸ Η Ε οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Β Ζ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ οὕτως τὸ ὑπὸ Α Η Β πρὸς τὸ ἀπὸ Η Ε· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ Β Ζ Α πρὸς τὸ ὑπὸ Α Η Β οὕτως τὸ ἀπὸ Δ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Η Ε. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Δ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Η οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Η· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Β Ζ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ Α Η Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Η· καὶ [a] ὡς ἄρα (ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι) τὸ ἀπὸ Α Γ πρὸς τὸ

S diameter A B, centrum Γ; & per Γ ducatur recta Δ Γ E: dico Γ Δ ipsi Γ B æqualem esse.

Ordinatim enim applicentur Δ Z, E H. & quoniam ut rectangulum B Z A ad quadratum ex Z Δ ita est [per 21. huj.] transversum latus ad rectum; & ut rectangulum A H B ad quadratum ex H E, ita latus transversum ad rectum: erit [per 11. 5.] ut rectangulum B Z A ad quadratum ex Z Δ, ita rectangulum A H B ad quadratum ex H E; & permutando [per 16. 5.] ut rectangulum B Z A ad rectangulum A H B ita quadratum ex Δ Z ad quadratum ex H E. ut autem quadratum ex Δ Z ad quadratum ex E H ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex Z Γ ad quadratum ex Γ H: ergo permutando, ut rectangulum B Z A ad quadratum ex Γ Z ita rectangulum A H B ad quadratum ex Γ H. [a] ut igitur (in ellipsi componendo, in oppositis vero sectionibus invertendo & per conversionem rationis) quadratum ex A Γ ad quadratum ex





Γ & in partes inæquales ad Z) ita rectangulum ΑΗΒ una cum quadrato ex ΗΓ ad quadratum ex ΗΓ; hoc est, propter eandem caussam, quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΗΓ. & [per 16 5.] permutando ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΗΓ. At vero in sectionibus oppositis: quoniam est ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΖΓ ita rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΓ; erit invertendo ut quadratum ex ΖΓ ad rectangulum ΒΖΑ ita quadratum ex ΗΓ ad rectangulum ΑΗΒ, & per conversionem rationis, ut quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΑ ita quadratum ex ΗΓ ad quadratum ex ΓΒ. nam cum linea ΑΒ bifariam secetur in Γ, atque ei adjiciatur ΖΑ, erit [per 6. 2.] rectangulum ΒΖΑ una cum quadrato ex ΑΓ æquale quadrato ex ΓΖ: quare quadratum ex ΓΖ superat rectangulum ΒΖΑ ipso quadrato ex ΑΓ. pulchre igitur dictum est sequi illud per conversionem rationis.

τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται ἡ ΖΑ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ. ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΖ τοῦ ὑπὸ ΒΖΑ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΑΓ. καὶ καλῶς εἴρηται τὸ ἀναστρέψαντι.

Prop. XXXI. *Theor.*

Si in transverso figuræ latere hyperbolæ sumatur aliquod punctum, non minorem abscindens ad verticem sectionis quam sit dimidia transversi lateris figuræ, & ab ipso ducta recta sectioni occurrat: si producatur cadet intra sectionem, versus ulteriora ejus.

SIT hyperbola, cujus diameter ΑΒ; & in ipsa sumatur punctum aliquod Γ, non minorem abscindens rectam ΓΒ, quam sit ipsius ΑΒ dimidia; & occurrat sectioni quævis recta ΓΔ: dico ΓΔ productam intra sectionem cadere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ληφθῇ τι σημεῖον, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπίπτῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν· ἡ προσεκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς σημεῖόν τι τὸ Γ, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τὴν ΓΒ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεῖα πρὸς τὴν τομὴν ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Ei

ᵃΔιελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ.] Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΒΗ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΗ τοῦ ὑπὸ ΑΗΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν αἰτίαν καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ὑπὸ ΑΘΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε ὀρθῶς εἴρηται τὸ διελόντι.

ᵃ Ergo dividendo, quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ΑΗΒ majorem habet rationem, quam quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ΑΘΒ.] Quoniam enim recta linea ΑΒ bifariam secatur in Γ, & ipsi adjicitur linea ΒΗ, rectangulum ΑΗΒ una cum quadrato ex ΓΒ [per 6. 2.] æquale est quadrato ex ΓΗ: ergo quadratum ex ΓΗ superat rectangulum ΑΗΒ quadrato ex ΓΒ. & propter eandem causam quadratum ex ΓΘ superat rectangulum ΑΘΒ ipso quadrato ex ΓΒ. recte igitur dixit dividendo illud concludi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ΄.

Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάψεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ πρότερον ἡ καλουμένη παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΑΓ· ὅτι μὲν οὖν ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ

Prop. XXXII. *Theor.*

Si per verticem sectionis coni recta linea ordinatim applicatæ parallela ducatur, sectionem continget: & in locum, qui inter coni sectionem & rectam interjicitur, altera recta non cadet.

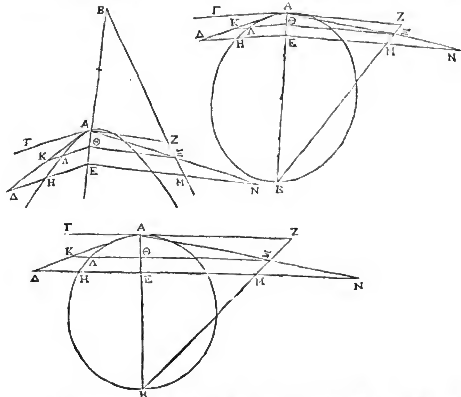
SIT coni sectio prius parabola, cujus diameter ΑΒ; & à puncto Α ducatur ΑΓ ordinatim applicatæ parallela: cadet ΑΓ extra sectionem, quod [ad 17. huj.] supra demonstratum est. dico in locum, qui inter ΑΓ & sectionem interjicitur, alteram rectam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat, ut ΑΔ; sumaturque in ipsa quodvis punctum Δ; & ordinatim applicetur ΔΕ. sit autem ΑΖ, juxta quam possunt quæ à sectione ordinatim ducuntur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ majorem rationem habet quam

ad quadratum ex Θ Λ sic quadratum ex Κ Θ ad quadratum ex Θ Λ: æqualis est igitur [per 11.5.] linea Κ Θ ipsi Θ Λ; quod est absurdum. quocirca in locum inter rectam lineam Α Γ & sectionem altera recta linea non cadet.

ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ὅπερ μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Verum sit sectio hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter Α Β, & rectum



figuræ latus Α Ζ; juncta autem Β Ζ producatur; & à puncto Α ordinatim applicatis parallela ducatur Α Γ, quæ extra sectionem cadet, ut [per 17.huj.]

Ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΖ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς δέδεικται.

[illegible] ἀγομένη, τῆς τομῆς ἐφάψεται. ἐνταῦθα δὲ τὸ ἐν τοῖς στοιχείοις ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου δειχθὲν καθολικώτερον ἐπὶ πάσης κώνου τομῆς ὑπάρχον ἐπιδείκνυσι. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐκεῖ ἐδείχθη ὅτι καμπύλην μὲν ἴσως γραμμὴν οὐδὲν ἄτοπόν ἐστιν ἐμπίπτειν μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, εὐθεῖαν δὲ ἀμήχανον· τεμεῖ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν καὶ οὐκ ἐφάψεται· δύο γὰρ ἐφαπτομένας εὐθείας κατὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀδύνατον. πολυτρόπως δεδειγμένου τοῦ θεωρήματος ἐν διαφόροις ἐκδόσεσιν, ἡμεῖς τὴν ἁπλουστέραν καὶ σαφεστέραν ἐποιήσαμεν.

rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, sectionem ipsam contingere. hoc autem loco, id quod in elementis de circulo tantum demonstratur, universe de omni coni sectione ostendit. oportet autem scire, quod & illic demonstratum est, nullum fortasse sequi absurdum, si ponatur linea curva inter sectionem & rectam cadere. at vero ut cadat recta linea fieri non potest: secabit etenim ipsa, non continget sectionem; quoniam duæ rectæ in eodem puncto contingentes esse non possunt. cum autem hoc theorema multifariam demonstretur in diversis editionibus, nos simpliciorem & manifestiorem demonstrationem adscripsimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς· ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si in parabola sumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & ei, quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum ab ejus extremitate: recta linea, quæ à puncto sic invento ducitur ad illud quod sumptum fuerat, sectionem continget.

Ἔστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντός, ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ' ὡς

SIT parabola, cujus diameter ΑΒ; & recta ΓΔ ordinatim applicetur, & ipsi ΕΔ æqualis ponatur ΑΕ, & jungatur ΑΓ: dico ΑΓ productam extra sectionem cadere.

Si enim fieri potest, cadat intra, ut ΓΖ; & ΗΒ ordinatim applicetur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΗΒ ad quadratum ex ΓΔ majorem rationem habet quam quadratum ex ΖΒ ad quadratum ex ΓΔ, & [per 4. & 22. 6.] ut

quadratum

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum; ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & quam rationem habent lineæ interjectæ inter applicatam & terminos tranſverſi lateris figuræ, eandem habeant inter ſe partes lateris tranſverſi, ita ut quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant: recta linea, conjungens punctum quod in tranſverſo latere ſumitur & punctum quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget.

Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κατάχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα· ἡ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐφάψεται τῆς τομῆς.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB; ſumaturque aliquod punctum in ſectione, quod ſit Γ; & ab eo ΓΔ ordinatim applicetur; fiat autem ut BΔ ad ΔA ſic BE ad EA; & jungatur EΓ: dico lineam ΓE ſectionem contingere.

Si enim fieri poteſt, ſecet, ut EΓZ: & ſumpto in ea aliquo puncto Z ordinatim applicetur HZΘ; per puncta vero A, B ducantur AΛ, BK ipſi EΓ parallelæ: & junctæ ΔΓ, BΓ, HΓ ad puncta K, Ξ, M producantur. itaque quoniam ut BΔ ad ΔA ita eſt BE ad EA; & ut BΔ ad ΔA ſic [per 4. 6.] BK ad AN; ut autem BE ad AE ita [per 2. 6.] BΓ ad ΓΞ, hoc eſt [per 4. 6.] BK ad ΞN: erit ut BK ad AN ita BK ad NΞ. æqualis eſt igitur [per 9. 5.] AN ipſi NΞ: * & propterea [per 5.2.] rectangulum ANΞ majus eſt rectangulo AOΞ: quare [per 16. 6.] linea NΞ ad ΞO majorem habet ra-

ἜΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BE πρὸς EA, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ· λέγω ὅτι ἡ ΓE ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτω ὡς ἡ EΓZ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Z, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ HZΘ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν A, B τῇ EΓ παράλληλοι αἱ AΛ, BK, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΔΓ, BΓ, HΓ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ K, Ξ, M σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BE πρὸς EA, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BK πρὸς AN, ὡς δὲ ἡ BE πρὸς AE οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΞ, τουτέστιν ἡ BK πρὸς ΞN· ὡς ἄρα ἡ BK πρὸς AN οὕτως ἡ BK πρὸς NΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AN τῇ NΞ· * τὸ ἄρα ὑπὸ ANΞ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ AOΞ· ἡ NΞ ἄρα πρὸς ΞO μείζονα

ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΖΗ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΓ τέμνει τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

ΗΕ; & permutando [per 16. 5.] rectangulum ΒΔΑ ad rectangulum ΒΗΑ majorem habet rationem quam quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ. sed [per 21. huj.] ut rectangulum ΒΔΑ ad ipsum ΑΗΒ ita quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΗΘ, & [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ sic quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΘΗ majorem rationem habet quam quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: & idcirco [per 9. 5.] ΘΗ minor est ipsa ΗΖ; quod fieri non potest. igitur ΕΓ sectionem non secat: quare sectionem ipsam contingat necesse est.

EUTOCIUS.

Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΓΔ καταγομένη ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὰς ΔΒ, ΔΑ ὁρίζουσα, τὴν ΒΑ καταλιμπάνει ὀφείλουσαν τμηθῆναι εἰς τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ λόγον· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἀνάπαλιν, τὴν ΒΑ τέμνουσα εἰς ὡρισμένον λόγον τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἐπιζητεῖν ἡμᾶς ποιεῖ τὸν τῶν ΒΕ, ΕΑ· οὐδὲ γὰρ δυσχερὲς

Sciendum est ΓΔ, quæ ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem terminare lineas ΔΒ, ΔΑ, cadens extra ipsam ΒΑ, quæ in ratione linearum ΒΔ, ΔΑ secari debet: in ellipsi vero & circuli circumferentia contrarium evenit, nam cum secet ipsam ΒΑ, necesse est ut inquiramus ΒΕ, ΕΑ in determinata ratione, in qua videlicet sunt ΒΔ, ΔΑ. neque enim diffi-

lelas, ut A N ad E Γ ita est [per 4.6.] …
ut autem E Γ ad K B ita E Δ ad Δ B: quare ex æquali ut A N ad K B ita A Δ ad Δ B, & propterea [per 1.6.] ut quadratum ex A N ad rectangulum sub A N, K B, ita quadratum ex A Δ ad rectangulum A Δ B sed ut quadratum ex E Γ ad quadratum ex A N ita quadratum ex E Δ ad quadratum ex Δ A: ergo ex æquali, ut quadratum ex E Γ ad rectangulum sub A N, K B, ita quadratum ex E Δ ad rectangulum A Δ B; & invertendo, ut rectangulum sub K B, A N ad quadratum ex E Γ, ita rectangulum B Δ A ad quadratum ex E Δ.

… ἡ ΑΝ πρὸς … ἡ ΕΓ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingat, conveniens cum diametro extra sectio-

:

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς· ἡ ἀπὸ

ϛ

ἀνήχθω ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς· ὥστε συμπεσεῖται τῇ ΔΓ, καὶ δυεῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

natim applicetur: ergo [per 33. huj.] à puncto Δ ad Ζ ducta recta continget ſectionem; quare producta extra ipſam cadet: & propterea conveniet cum ΔΓ, eruntque duarum rectarum iidem termini; quod eſt abſurdum. non igitur in locum, qui eſt inter ſectionem & ΑΓ, alia recta cadet.

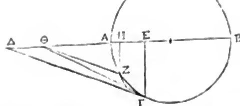
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

PROP. XXXVI. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conveniens cum tranſverſo figuræ latere, & à tactu recta ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut recta, quæ interjicitur inter contingentem & terminum tranſverſi lateris ad interjectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita quæ eſt inter ordinatim applicatam & terminum lateris ad eam quæ eſt inter eandem & alterum terminum, adeo ut continuatæ inter ſe ſint quæ ſibi ipſis reſpondent; & in locum, qui inter contingentem & ſectionem coni interjicitur, altera recta non cadet.

SIT



Dico etiam in locum, qui inter sectionem & ΓΔ interjicitur, nullam rectam cadere.

Si enim fieri potest, cadat ΓΘ; & ut BΘ ad ΘA ita fiat BH ad HA, & HZ ordinatim applicetur: juncta ergo ΘZ, si producatur, [per 34. huj.] conveniet cum ipsa ΘΓ; atque erunt duarum rectarum iidem termini; quod fieri non potest. non ergo inter sectionem & ΓΔ altera recta cadet.

ΛΕΓΩ ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΓΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΑ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΗΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΘΓ· δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si recta linea hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: quæ interjicitur inter applicatam & centrum sectionis, una cum interjecta inter contingentem & sectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato rectæ quæ est ex centro sectionis: sed una cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium, quod ad quadratum ordinatim applicatæ eandem rationem habet quam transversum figuræ latus ad rectum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, μετὰ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς· μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέχει χωρίον, λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.

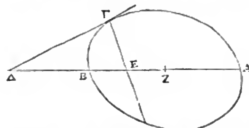
ΕΣΤΩ

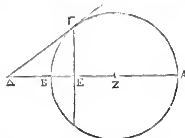
τὴν ὀρθίαν.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΔ, ΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΖ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ

ad quadratum Γ E ita transversum latus ad rectum.

In ellipsi vero, & circuli circumferentia hoc modo. sed utriusque ΑΔ, ΔΒ dimidia est ΔΖ; & ipsius ΑΒ dimidia ΖΒ: ergo ut ΖΔ ad ΔΒ ita ΖΒ ad ΒΕ; & [per cor. 19. 5.] per conversionem rationis, ut ΔΖ ad ΖΒ ita ΒΖ ad ΖΕ: rectangulum igitur ΔΖΕ [per 17. 6.] æquale est quadrato ex ΒΖ. At vero [per 3. 2.] rectangulum ΔΖΕ rectangulo ΔΕΖ una cum quadrato ex ΖΕ est æquale; & [per 5. 2.] quadratum ex ΒΖ æquale est





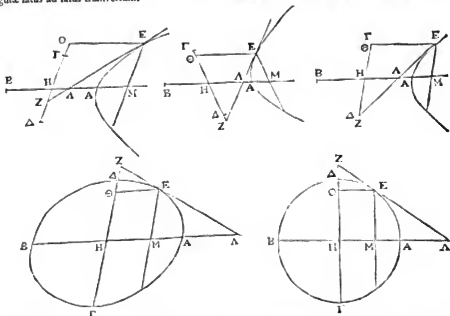
μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλὰ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

rectangulo ΑΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ. commune auferatur quadratum ex ΖΕ: reliquum igitur rectangulum ΔΕΖ reliquo ΑΕΒ æquale erit: ut igitur rectangulum ΔΕΖ ad quadratum ex ΓΕ, ita [per 7. 5.] rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΓΕ. sed [per 21. huj.] ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΓΕ ita transversum latus ad rectum: ergo ut rectangulum ΔΕΖ ad quadratum ex ΕΓ ita transversum latus ad rectum.

R EUTO-

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A H B, secunda diameter Γ H Δ; recta vero sectionem contingens sit E Λ Z, quæ conveniat cum Γ Δ in Z; & Θ E ipsi A B sit parallela: dico rectangulum Z H Θ quadrato ex Γ H æquale esse; & ut rectangulum H Θ Z ad quadratum ex Θ E ita rectum figuræ latus ad latus transversum.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ A H B, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ Γ H Δ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ E Λ Z συμπίπτουσα τῇ Γ Δ κατὰ τὸ Z, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ A B ἡ Θ E· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Z H Θ τῷ ἀπὸ H Γ ἴσον ἐστίν, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ H Θ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Θ E οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.



Ordinatim namque applicatâ M E, erit [per 37. huj.] ut rectangulum H M Λ ad quadratum ex M E ita transversum latus ad rectum. sed [per def. 2de diam.] ut transversum latus B A ad Γ Δ ita Γ Δ ad latus rectum: ergo [per cor. 20. 6.]

Ἤχθω τεταγμένως ἡ M E· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ H M Λ πρὸς τὸ ἀπὸ M E οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ἔστιν ὡς ἡ πλαγία B A πρὸς Γ Δ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία

των ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

[per 23. 6.] quam habet rectangulum ΖΘΗ ad quadratum ex ΘΕ: ergo ut rectangulum ΖΘΗ ad quadratum ex ΘΕ ita rectum latus ad transversum.

* Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς κατηγμένης, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως ἡ μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ αὐτοῦ πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

Iisdem positis ostendendum est, ut recta, quæ inter tangentem & terminum secundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam, quæ inter tangentem & alterum terminum secundæ diametri; ita esse rectam, quæ est inter alterum terminum & applicatam, ad eam quæ inter eundem terminum & applicatam.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΗΔ, ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ, καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων. ἔστι δὲ διπλασία τῆς ΗΖ [ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως τῆς ὑπερβολῆς ἡ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὑπεροχὴ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας] συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΗ τῇ ΗΔ, τῆς δὲ ΗΓ διπλασία ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα [ἡ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὑπεροχὴ ἢ] συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, καὶ [συνθέντι ἐπὶ τῆς πρώτης πτώσεως, ἢ ἐπὶ τῆς δευτέρας] διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ.

Quoniam enim [ex sup. prop.] æquale est rectangulum ΖΗΘ quadrato ex ΗΓ, hoc est rectangulo ΓΗΔ; nam linea ΓΗ æqualis est ipsi ΗΔ: erit [per 16. 6.] ut ΖΗ ad ΗΔ ita ΓΗ ad ΗΘ; & [per cor. 19. 6.] per conversionem rationis, ut ΖΗ ad ΖΔ ita ΗΓ ad ΓΘ, & antecedentium dupla. est autem dupla ipsius ΗΖ differentia inter ΓΖ, ΖΔ, in primo casu hyperbolæ, at in secundo utraque ΓΖ, ΖΔ simul sumpta, ob æquales ΓΗ, ΗΔ; ac ΓΔ dupla est ipsius ΗΓ: ut igitur differentia vel summa ipsarum ΓΖ, ΖΔ ad ΖΔ ita ΓΔ ad ΓΘ, ac componendo in primo casu vel dividendo in secundo fiet ΓΖ ad ΖΔ sicut ΔΘ ad ΘΓ.

* Hæc demonstratio hyperbolæ tantum competit, sed levi mutatione ad ellipsin & circulum transferri potest, & in quibusdam codicibus theorema hoc sic reperitur enunciatum, convenientius nempe ellipsi & circulo, Ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένῃ, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ αὐτοῦ πέρατος, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης. Ut intercepta inter contingentem & terminum secundæ diametri ad partes applicatæ, ad interceptam inter applicatam & dictum terminum, ita intercepta inter contingentem & alterum terminum secundæ diametri ad interceptum inter hunc alterum terminum & applicatam; hoc est ut ΓΖ ad ΖΔ ita ΓΘ ad ΘΔ: id quod ex trigesima sexta hujus manifestum est.

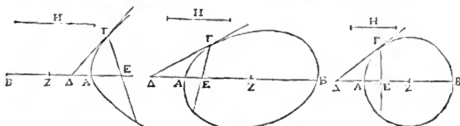
Carol.

diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: sumptâ quâvis rectâ ex duabus, quarum altera interjicitur inter applicatam & centrum sectionis, altera inter applicatam & contingentem, habebit ad eam applicata rationem compositam ex ratione quam habet altera dictarum rectarum ad applicatam, & ex ratione quam rectum figuræ latus habet ad transversum.

καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστὶν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia cujus diameter AB, centrum autem Z; ducaturque ΓΔ sectionem contingens, & ΓΕ ordinatim applicetur: dico ΓΕ ad alteram rectarum ΖΕ, ΕΔ rationem habere compositam ex ratione, quam habet rectum figuræ latus ad transversum, & ex ea quam altera dictarum rectarum ΖΕ, ΕΔ habet ad ipsam ΕΓ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΖΕ, ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ.



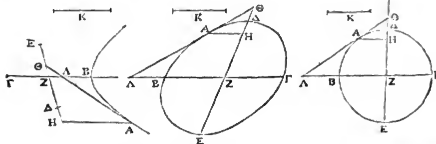
Sit enim rectangulum ΖΕΔ æquale rectangulo sub ΕΓ & recta Η: & quoniam [per 37. huj.] ut rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΓΕ ita transversum latus ad rectum; atque rectangulum ΖΕΔ rectangulo sub ΕΓ & Η æquale est: erit ut

Ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΕΓ καὶ τῆς Η· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ

ctarum rectarum habet ad applicatam.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖΓ, δευτέρα δὲ ἡ ΔΖΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΘΛΑ, καὶ τῇ ΓΒ παράλληλος ἡ ΑΗ· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘΗ, ΖΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΗ, ΘΗ πρὸς τὴν ΗΑ.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia A B, cujus diameter B Z Γ, & secunda diameter Δ Z E; ducaturque recta sectionem contingens Θ Λ A, & ipsi Γ B parallela ducatur A H: dico A H ad alteram rectarum Θ H, H Z rationem habere compositam ex ratione quam habet transversum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum rectarum Z H, Θ H habet ad ipsam H A.



Ἔστω τὸ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΑ, Κ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ· καὶ τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τουτέστιν ἡ Κ πρὸς ΑΗ, ἐστὶν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς Κ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς ΗΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΗΑ πρὸς Κ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ Κ πρὸς ΗΖ οὕτως

Sit enim rectangulum Θ H Z rectangulo quod fit sub H A & K æquale. itaque quoniam [per 38.huj.] ut rectum latus ad transversum ita rectangulum Θ H Z ad quadratum ex H A; rectangulo autem Θ H Z æquale est [ex hyp.] id quod fit sub H A & K: erit rectangulum sub H A & K ad quadratum ex H A, hoc est [per 1. 6.] K ad A H, ut latus rectum ad transversum: & quoniam A H ad H Z compositam habet rationem ex ratione quam habet A H ad K & ex ea quam K habet ad H Z; estque ut H A ad K ita transversum latus ad rectum; & [per 16. 6.] ut K ad H Z ita

quæ ex centro; in ellipsi vero & circuli circumferentia, una cum parallelogrammo quod fit ab applicata æquale est parallelogrammo facto ab ea quæ ex centro.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, centrum E; & ordinatim applicetur Γ Δ; à lineis autem E A, Γ Δ æquiangula parallelogramma describantur, quæ sint A Z, Δ H; & habeat Γ Δ ad Γ H rationem compositam ex ratione quam habet A E ad E Z & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad transversum: dico in hyperbola parallelogrammum quod fit ex E Δ, simile ipsi A Z, parallelogrammis A Z, H Δ æquale esse: in ellipsi vero & circuli circumferentia, parallelogrammum quod fit ex Δ E, simile A Z, una cum parallelogrammo H Δ ipsi A Z esse æquale.

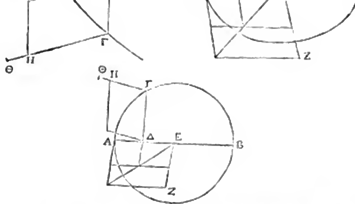
Fiat enim ut rectum figuræ latus ad transversum ita Δ Γ ad Γ Θ. & quoniam [ex hyp.] ut Δ Γ ad Γ Θ ita rectum latus ad transversum; ut autem Δ Γ ad Γ Θ ita [per 1. 6.] quadratum ex Δ Γ ad rectangulum Δ Γ Θ; & [per 21. huj.] ut rectum latus ad transversum ita quadratum ex Δ Γ ad rectangulum B Δ A: erit [per 9. 5.] rectangulum B Δ A rectangulo Δ Γ Θ æquale. rursus quoniam Δ Γ ad Γ H rationem habet compositam ex ratione quam habet A E ad E Z & ex ea quam rectum latus ad transversum, hoc est quam Δ Γ habet ad Γ Θ. sed & Δ Γ ad Γ H compositam rationem habet ex ratione Δ Γ ad Γ Θ & ex ratione Θ Γ ad Γ H: erit igitur ratio composita ex ratione A E ad E Z & ex ratione Δ Γ ad Γ Θ eadem quæ componitur ex ratione Δ Γ ad Γ Θ & ex ratione Θ Γ ad Γ H. communis auferatur, ratio scilicet Δ Γ ad Γ Θ: reliqua igitur ratio A E ad E Z ea-

κέντρου εἴδει· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε Α, Γ Δ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ Α Ζ, Δ Η, καὶ ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Γ Η τὸν συγκείμενον ἐχέτω λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Ε πρὸς Ε Ζ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ ἀπὸ τῆς Ε Δ εἶδος, τὸ ὅμοιον τῷ Α Ζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς Α Ζ, Η Δ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ ἀπὸ τῆς Ε Δ, ὅμοιον τῷ Α Ζ, μετὰ τοῦ Η Δ ἴσον ἐστὶ τῷ Α Ζ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλ' ὡς ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ Θ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ Δ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Δ Α· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Β Δ Α τῷ ὑπὸ Δ Γ Θ. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ Γ πρὸς Γ Η τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Ε πρὸς Ε Ζ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ· ἔτι δὲ ἡ Δ Γ πρὸς Γ Η τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Γ πρὸς Γ Η· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Ε πρὸς Ε Ζ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ Γ πρὸς Γ Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Γ πρὸς Γ Η. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς Γ Δ πρὸς Γ Θ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς Α Ε

πρὸς



τὸ ἀπὸ Ε Α οὕτως τὸ Η Δ πρὸς Α Ζ. λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς· ὡς τὸ ὑπὸ Β Δ Α μετὰ τοῦ ἀπὸ Α Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Α Ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α, οὕτως τὰ Η Δ, Α Ζ πρὸς τὸ Α Ζ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ Α Ζ πρὸς τὸ Α Ζ· ὡς ἄρα τὰ Η Δ, Α Ζ πρὸς τὸ Α Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ εἶδος ὅμοιον τῷ Α Ζ πρὸς τὸ Α Ζ· τὸ ἀπὸ Ε Δ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ Α Ζ ἴσον ἐστὶ τοῖς Η Δ, Α Ζ.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Α Ε πρὸς ὅλον τὸ Α Ζ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Α Δ Β πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ Δ Η, καὶ λοιπόν ἐστι πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀπὸ Ε Α ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ Β Δ Α, λοιπόν ἐστι τὸ ἀπὸ

tum ex A E ita parallelogrammum H Δ ad ipsum A Z. itaque dicendum in hyperbola: ut rectangulum B Δ A una cum quadrato ex A E ad quadratum ex A E, hoc est [per 6. 2.] quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A, sic parallelogramma H Δ, A Z ad parallelogrammum A Z. sed [per 20. 6.] ut quadratum ex E Δ ad quadratum ex E A sic parallelogrammum quod fit ex E Δ, simile & similiter descriptum ipsi A Z, ad parallelogrammum A Z: ut igitur parallelogramma Δ H, A Z ad parallelogrammum A Z, sic parallelogrammum à E Δ descriptum & simile ipsi A Z ad A Z: ergo parallelogrammum à Δ E factum & simile ipsi A Z æquale est parallelogrammis H Δ, A Z.

In ellipsi vero & circuli circumferentia dicemus. quoniam ut totum, quadratum scilicet ex A E, ad totum parallelogrammum A Z, sic ablatum rectangulum A Δ B ad ablatum parallelogrammum Δ H: erit [per 19. 5.] reliquum ad reliquum sicut totum ad totum. quod si à quadrato ex E A auferatur rectangulum B Δ A, relinquetur

sper

rallelogrammum ΑΖ æquale esse parallelogrammo ΔΗ. quoniam enim in superioribus ostensum est, ut quadratum ex ΑΔ ad parallelogrammum ΑΖ ita esse rectangulum ΑΔΒ ad parallelogrammum ΔΗ: erit permutando, ut quadratum ex ΑΔ ad rectangulum ΑΔΒ ita parallelogrammum ΑΖ ad parallelogrammum ΔΗ. sed quadratum ex ΑΔ æquale est rectangulo ΑΔΒ: ergo parallelogrammum ΑΖ parallelogrammo ΔΗ æquale erit.

πρὸς τὸ πλάγιον· λέγω ὅτι τὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΗ. ἐπεὶ γὰρ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν δέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ΔΗ· φημὶ ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ οὕτως τὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΗ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ ΔΗ.

PROP. XLII. *Theor.*

Si recta parabolam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur; sumpto autem quovis puncto in sectione, applicentur ad diametrum duæ rectæ, altera quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ à tactu ordinatim applicata est: triangulum quod ab ipsis constituitur æquale erit parallelogrammo contento ab ordinatim à tactu applicata, & ea quæ interjicitur inter parallelam & verticem sectionis.

SIT parabola, cujus diameter ΑΒ, ducaturque linea ΑΓ sectionem contingens, & ΓΘ ordinatim applicetur; à quovis autem puncto Δ applicetur ΔΖ, & per Δ quidem ducatur ΔΕ ipsi ΑΓ parallela, per Γ vero ΓΗ parallela ipsi ΒΖ; denique per Β ducatur ΒΗ ipsi ΘΓ parallela: dico triangulum ΔΕΖ æquale esse parallelogrammo ΖΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβʹ.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένης, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΘ, καὶ ἀπό τινος σημείου τυχόντος κατήχθω ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΖ ἡ ΓΗ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΘΓ ἡ ΒΗ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ

παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

ΕΔΖ; & [per 1. 6.] ut ΘΒ ad ΒΖ ita parallelogrammum ΗΘ ad parallelogrammum ΗΖ: erit [per 11.5.] ut triangulum ΑΓΘ ad triangulum ΕΔΖ ita ΘΗ parallelogrammum ad parallelogrammum ΗΖ; & permutando, ut ΑΓΘ triangulum ad parallelogrammum ΗΘ ita triangulum ΕΔΖ ad parallelogrammum ΗΖ. sed triangulum ΑΓΘ æquale est parallelogrammo ΗΘ: ergo triangulum ΕΔΖ parallelogrammo ΗΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πτώσεις ἕνδεκα, μίαν μὲν ἐὰν ἐσωτέρω λαμβάνηται τὸ Δ τοῦ Γ· δῆλον γὰρ ὅτι καὶ παράλληλοι ἐσωτέρω πεσοῦνται τῶν ΑΓ, ΓΘ. ἑτέρας δὲ πέντε οὕτως, ἐὰν τὸ Δ ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ, ἡ μὲν ΔΖ παράλληλος δηλονότι ἐξωτέρω πεσεῖται τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β, ἢ ἐπὶ τὸ Β, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ, ἢ ἐπὶ τὸ Θ, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ· τοῦ γὰρ Α ἐξωτέρω πεσεῖν αὐτὴν ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ Δ ἐξωτέρω ἐστὶ τοῦ Γ, καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀγομένη τῇ ΑΓ ἐσωτέρω τοῦ Α πεσεῖται. ἐὰν δὲ τὸ Δ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη παραληφθῇ τῆς τομῆς, ἢ ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ τῶν Β, Θ παραπεσοῦνται, ἢ μὲν ΔΖ ἐσωτέρω τῆς ΘΓ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ· ἢ τῆς ΔΖ ὡσαύτως μενούσης, τὸ Ε ἐξωτέρω τοῦ Θ ληφθήσεται. τοῦ δὲ Ε πάλιν ἐξωτέρω πίπτοντος, τὸ Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται, ὡς εἶναι τὰς ΓΘΔ μίαν εὐθεῖαν, (εἰ καὶ μὴ σώζεται κυρίως τότε τὸ τῆς παραλλήλου ἰδίωμα) ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ. δεῖ δέ, ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν τελευταίων πέντε πτώσεων, τὴν ΔΖ ἐκβάλλειν ἕως τῆς τομῆς καὶ τῆς ΗΓ παραλλήλου, καὶ οὕτως ποιεῖσθαι τὴν ἀπόδειξιν. δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλην μίαν καταγραφὴν ἐπινοεῖν ἐκ τούτου, ὅταν διὰ λαμβανομένου ἑτέρου σημείου αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι ποιῶσι τὸ λεγόμενον. ἀλλὰ τοῦτο θεώρημά ἐστιν, οὐ πτῶσις.

Hoc theorema undecim habet casus, unum quidem si Δ intra Γ sumatur; constat enim rectas parallelas cadere intra ipsas ΑΓ, ΓΘ. alios autem quinque casus habet si Δ sumatur extra Γ: nam recta parallela ΔΖ cadet extra ΘΓ, & ΔΕ vel inter Α & Β cadet, vel in ipso Β, vel inter Β & Θ, vel in Θ, vel extra Θ; ut enim extra Α cadat fieri non potest, quoniam cum Δ sit extra Γ, & quæ per ipsum rectæ ΑΓ parallela ducitur, intra Α cadet. quod si Δ sumatur ex altera parte sectionis; vel utræque parallelæ inter Β & Θ cadent, vel ΔΖ quidem cadet intra ΘΓ, punctum vero Ε in Θ; vel, ΔΖ hunc situm retinente, punctum Ε cadet extra Θ. puncto vero Ε cadente extra Θ, punctum Ζ vel in Θ cadet, ita ut ΓΘΔ sit recta linea (quanquam tunc non exacte parallelarum proprietas servetur) vel extra Θ cadet. oportet autem in demonstratione quinque casuum postremorum rectam ΔΖ usque ad sectionem & ad ipsam parallelam ΗΓ producere, atque sic demonstrationem absolvere. sed ex his aliam quandam descriptionem mente concipere possumus; cum nempe per sumptum aliud punctum, quæ in principio supponebantur rectæ efficiant rem propositam. sed hoc theorema est, non casus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ,

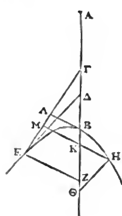
Prop. XLIII. *Theor.*

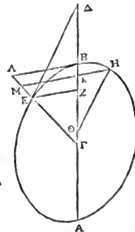
Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens

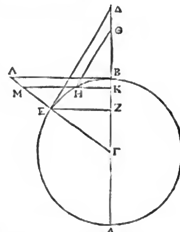
T gens

ne H, & ducatur recta HΘ contingenti parallela, & HKM ordinatim applicetur; per B vero ordinatim applicetur recta BΛ: dico triangulum KMΓ differre à triangulo ΓΛB triangulo HKΘ.

παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΚΜ, διὰ δὲ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΛ· λέγω ὅτι τὸ ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΓΛΒ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΚΘ τριγώνῳ.







Quoniam enim linea EΔ sectionem contingit, ordinatim vero applicata est EZ; [per 39. huj.] habebit BZ ad ZΔ rationem compositam ex ratione ΓZ ad ZE, & ex ratione recti lateris ad transversum. sed [per 4. 6.] ut EZ ad ZΔ ita HK ad KΘ; & ut ΓZ ad ZE ita ΓB ad BΛ: ergo HK ad KΘ rationem habebit compositam ex ratione ΓB ad BΛ, & ex ratione recti lateris ad transversum: quare, ex iis quæ in quadragesimo primo theoremate ostendimus, triangulum ΓKM à triangulo BΓΛ differt triangulo HΘK; etenim in parallelogrammis triangulorum istorum duplis hæc demonstrata sunt.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται μὲν ἡ ΕΔ, κατηγμένη δὲ ἐστιν ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ· ἕξει ἄρα ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι, τὸ ΓΚΜ τρίγωνον τοῦ ΒΓΛ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΘΚ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται.

EU-

...πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον· ὁμοίως καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΑΓΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ τετράπλευρον· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΒΚΛ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΗΘΚ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ οὕτως τὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΕΛΒΖ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ τῷ ΜΛΒΚ τετραπλεύρῳ· τὸ ἄρα ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΗΘΚ διαφέρει τῷ ΓΑΒ τριγώνῳ.

Ἐπιστῆσαι δεῖ ἐν ταύτῃ τῇ δείξει, (ὀλίγην γὰρ ἀσάφειαν ἔχει ἐν τοῖς ἀναλογίαις τῆς ἐλλείψεως) ἵνα τὰ διὰ τὴν συντομίαν τοῦ ῥητοῦ ἡμῖν λεγόμενα διῃρημένως ποιήσωμεν. οἷόν φησι * [Ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΒ· ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν.] ἔστι γὰρ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΕΖΓ· ἀναστρέψαντι δὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ (τοῦτ᾽ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Γ τῆς ΑΒ) οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΖΑ τετράπλευρον, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον. Ἔχει δὲ πτώσεις, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ἕνδεκα, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν ὅταν τὸ ἐπὶ τῆς Η λαμβανόμενον σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Ε. τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ΕΔΖ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΑΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ΓΕΖ· δέδεικται μὲν γὰρ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΒΖΕ τοῦ ΓΕΖ τριγώνου διαφέρει τῷ ΑΒΓ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τὸ αὐτό ἐστι τὸ Η τῷ Ε, ἢ ἐσωτέρω λαμβάνεται τοῦ Ε· καὶ δῆλον ὅτι ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ πίπτουσι τῶν Δ, Ζ, ὡς

militer ut quadratum ex ΓB ad rectangulum AKB ita triangulum AΓB ad quadrilaterum MΛBK: ergo ex æquali, ut rectangulum AZB ad rectangulum AKB ita EΛBZ quadrilaterum ad quadrilaterum MBKΛ. ut autem rectangulum AZB ad rectangulum AKB ita [per 21. huj.] quadratum ex EZ ad quadratum ex HK: & ut quadratum ex EZ ad quadratum ex HK ita triangulum EΔZ ad triangulum HΘK: quare ut triangulum EΔZ ad triangulum HΘK ita quadrilaterum EΛBZ ad quadrilaterum MΛBK; & permutando ut triangulum EΔZ ad quadrilaterum EΛBZ ita triangulum HΘK ad quadrilaterum MΛBK. sed triangulum EΔZ ostensum est [supra] æquale quadrilatero EΛBZ; ergo & triangulum HΘK quadrilatero MΛBK est æquale: triangulum igitur KMΓ à triangulo ΓAB differt triangulo HΘK.

Sed cum hæc demonstratio obscuritatem quandam habeat in proportionibus ellipseos, enitendum est ut ea quæ breviter dicta sunt latius explicentur. * [Quoniam, *inquit*, ut quadratum ex ZΓ ad quadratum ex ΓB ita triangulum EΓZ ad triangulum AΓB, erit invertendo & per conversionem rationis rursusque invertendo.] est enim invertendo ut quadratum BΓ ad quadratum ex ΓZ ita ABΓ triangulum ad EZΓ: & per conversionem rationis, ut quadratum ex BΓ ad rectangulum AZB (hoc est, ad excessum quo quadratum ex ΓB excedit quadratum ex ΓZ, quia punctum Γ lineam AB bifariam secat) ita triangulum ABΓ ad quadrilaterum EBZA: & invertendo, ut rectangulum AZB ad quadratum ex BΓ ita quadrilaterum EΛBZ ad BΛΓ triangulum. Habet autem in hyperbola casus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, & præterea alium quendam; cum scilicet punctum quod in H sumitur idem sit quod E. tunc enim contingit triangulum EΔZ una cum triangulo ABΓ æquale esse triangulo ΓEZ; etenim ostensum est triangulum EΔZ quadrilatero ABZE æquale esse, quadrilaterum autem ABZE à triangulo ΓEZ ipso ABΓ triangulo differt. sed in ellipsi vel punctum H idem est quod E vel intra E sumitur: & tunc utrasque parallelas inter Δ & Z cadere perspicuum

mo theoremate.

Quod si ducta per H parallela ipsi E Z cadat inter Γ & A, producatur quidem quousque linea Γ E cum ipsa conveniat; & punctum Θ septem casus efficiet. vel enim inter B & Δ cadit, vel in B, vel inter B & Z, vel in Z, vel inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A: & in his casibus contingit differentiam triangulorum A B Γ, H Θ K constitui à rectis A Γ, Γ B infra Γ productis. si vero H sumatur in altera parte sectionis, & ea quæ per H ducitur ipsi E Z parallela inter B & Z cadat, producetur ob demonstrationem, quousque secet ipsam A Γ; & punctum Θ faciet septem casus: vel inter B & Z cadens, vel in Z, vel inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A, vel in A, vel infra A. si vero H K cadat inter Z & Γ, punctum Θ quinque casus efficiet. vel enim erit inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A, vel in A, vel infra A. sed si H K in centrum Γ cadat, punctum Θ casus efficiet tres: vel inter Γ & A cadens vel in A vel extra A. atque in his casibus rursus contingit triangulum H Θ K æquale esse triangulo A B Γ. si vero H K cadat inter Γ & A, punctum Θ vel cadet inter Γ & A, vel in A, vel extra A. itaque in ellipsi casus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia; ita ut hujus theorematis casus omnes sint nonaginta sex.

Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ Ε Ζ παράλληλος ἀγομένη μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, ἐκβληθήσεται μὲν ἕως ὅτε ἡ Γ Ε αὐτῇ συμπίπτει· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ἑπτά. ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Δ, ἢ ἐπὶ τὸ Β πίπτει, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν Α Β Γ, Η Θ Κ τριγώνων κατασκευάζεσθαι ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β εὐθειῶν ὑπὸ τὸ Γ ἐκβαλλομένων. ἐὰν δὲ τὸ Η ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ Ε Ζ παράλληλος μεταξὺ πίπτῃ τῶν Β, Ζ, ἐκβληθήσεται μὲν διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἕως ἂν τέμῃ τὴν Α Γ· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει ζ΄ πτώσεις· ἢ μεταξὺ ὂν τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ πίπτον, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ Η Κ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ ποιήσει πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ Η Κ ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις τρεῖς· ἢ μεταξὺ πίπτον τῶν Α, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει πάλιν τὸ Η Θ Κ τρίγωνον ἴσον γίνεσθαι τῷ Α Β Γ τριγώνῳ. ἐὰν δὲ ἡ Η Κ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. συμβαίνει οὖν ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως τὰς πάσας πτώσεις εἶναι μβ΄, καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας· ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ϟϛ΄.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, à tactu vero ad diametrum recta ordinatim applicetur; atque huic parallela ducatur per verticem alterius sectionis, ita ut conveniat cum recta

*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ΄.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ

τῆς

μετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ· τῇ ΖΗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ. ἡ δὲ ΝΚ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΔ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΝΚ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΕ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ κατηγμένη ἡ ΕΞ, καὶ τῇ ΕΞ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀφ' οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔΕ ἡ ΚΝ· τὸ ἄρα ΝΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΜΓ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΑ τριγώνῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ τρίτῳ θεωρήματι δέδεικται.

BE, quarum diameter AB; & recta ZΓE per centrum ducitur; & ZH, EΔ sectiones contingunt: erit ΔE ipsi ZH parallela. est autem [ex hyp.] NK parallela ipsi ZH: ergo & NK ipsi EΔ; & MΘ ipsi BA parallela est. quoniam igitur hyperbola est BE, cujus diameter AB, centrum Γ; & recta ΔE sectionem contingit, ordinatimque applicata est EΞ; & ipsi EΞ parallela est BA; sumitur autem in sectione punctum N, & ab eo ordinatim applicatur NΘ, & ipsi ΔE parallela ducitur KN: erit triangulum NΘK minus quam triangulum ΘMΓ ipso ΓBA triangulo. hoc enim in quadragesimo tertio theoremate ostensum est.

EUTOCIUS.

ᵃ Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ· παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ.] Ἐπεὶ γὰρ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ, καὶ κατηγμένη ἡ ΖΟ· ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ἀπὸ ΓΑ, διὰ τὸ λζ΄. θεώρημα. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΞΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστὶν ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ὑπὸ ΞΓΔ. καὶ ἔστιν ἡ ΟΓ τῇ ΓΞ ἴση· καὶ ἡ ΗΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΓ ἴση τῇ ΓΕ, διὰ τὸ λ΄·

ᵃ Itaque quoniam oppositæ sectiones sunt ZA, BE, quarum diameter AB, & recta ZΓE per centrum ducitur, & ZH, ΔE sectiones contingunt; erit ΔE ipsi ZH parallela.] Quoniam enim hyperbola est AZ, rectaque ZH sectionem contingit, & applicata est ZO; erit rectangulum OΓH æquale quadrato ex ΓA, ex trigesimo septimo theoremate. & similiter rectangulum ΞΓΔ quadrato ex ΓB æquale est: igitur ut rectangulum OΓH ad quadratum ex AΓ ita rectangulum ΞΓΔ ad quadratum ex BΓ; & permutando, ut rectangulum OΓH ad rectangulum ΞΓΔ ita quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB; quare rectangulum OΓH æquale est rectangulo ΞΓΔ. estque linea OΓ æqualis ipsi ΓΞ, ergo & HΓ ipsi ΓΔ. sed ZΓ ipsi ΓE est æqualis, ex trigesimo theoremate: lineæ igi-

basis est recta contingens & vertex centrum sectionis; in ellipsi vero & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso, æquale est triangulo cujus basis recta contingens & vertex sectionis centrum.

ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia ΑΒΓ, cujus diameter ΑΘ, secunda diameter ΔΘΛ, & centrum Θ; recta vero ΓΜΛ sectionem contingat in Γ, ducaturque ΓΔ ipsi ΑΘ parallela, & juncta ΓΘ producatur; sumpto deinde in sectione quovis puncto Β, ducantur ad secundam diametrum rectæ ΒΕ, ΒΖ, quæ ipsis ΛΓ, ΓΔ sint parallelæ: dico triangulum ΒΕΖ, in hyperbola quidem, majus esse quam triangulum ΗΘΖ triangulo ΛΓΘ; in ellipsi vero & circulo, triangulum ΒΕΖ unà cum ΖΗΘ æquale esse triangulo ΓΛΘ.

Ducantur enim ΓΚ, ΒΝ parallelæ ipsi ΔΘ. & quoniam recta ΓΛΜ sectionem contingit; atque applicata est ΓΚ; habebit [per 39. huj.] ΓΚ ad ΚΘ rationem compositam ex ratione quam habet ΜΚ ad ΚΓ & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad transversum. ut autem ΜΚ ad ΚΓ ita [per 4. 6.] ΓΔ ad ΔΛ: ergo ΓΚ ad ΚΘ rationem compositam habet ex ratione ΓΔ ad ΔΛ & ex ratione recti lateris ad transversum. atque est triangulum ΓΔΛ figura quæ fit ex ΚΘ; & triangulum ΓΘΚ, hoc est ΓΔΘ, figura quæ fit ex ΓΚ, hoc est ex ΔΘ: quare triangulum ΓΔΛ, in hyperbola quidem, majus est quam triangulum ΓΚΘ, triangulo facto ex ΑΘ, simili ipsi ΓΔΛ; in ellipsi vero & circulo triangulum ΓΚΘ una cum ipso ΓΔΛ eidem triangulo est æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis, in quadragesimo primo theoremate, demonstratum est. itaque quoniam triangulum ΓΔΛ à triangulo ΓΚΘ, vel ΓΔΘ,

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΘ, δευτέρα δὲ ΔΘΛ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν ΓΜΛ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΓΔ ἤχθω παρὰ τὴν ΑΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΓ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΖ, παρὰ τὰς ΛΓ, ΓΔ, ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τοῦ ΗΘΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΛΓΘ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ ΒΖΕ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΛΘ.

Ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΓΚ, ΒΝ παρὰ τὴν ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΛΜ, κατῆκται δὲ ἡ ΓΚ· ἡ ΓΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε οὗ ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ ὃν ἔχει τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΛ· ἡ ΓΚ ἄρα πρὸς ΚΘ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΛ καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καί ἐστι τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ εἶδος, τὸ δὲ ΓΚΘ, τουτέστι τὸ ΓΔΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ· τὸ ΓΔΛ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ ΓΚΘ μετὰ τοῦ ΓΔΛ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ, ἤτοι τοῦ ΓΔΘ,

διαφέρει

τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ κατηγμένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ.

ΒΖΕ, quod fit ex ΝΘ inter applicatam & centrum interjecta; triangulum vero ΗΖΘ, quod fit ex applicatâ ΒΝ, hoc est ex ΖΘ: igitur ex iis, quæ prius [ad 41. huj.] ostensa sunt, triangulum ΒΖΕ à triangulo ΗΘΖ differt triangulo, quod fit ex ΛΘ, simili ipsi ΓΔΛ; quare & triangulo ΓΛΘ.

EUTOCIUS.

Ἐπιστῆσαι χρὴ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει εἴκοσι. τὸ γὰρ ἀντὶ τοῦ Β λαμβανόμενον σημεῖον ἢ ταυτόν ἐστι τῷ Γ, ἢ ταυτὸν τῷ Λ· καὶ τότε συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΔΛΓ ταυτὸν εἶναι τῷ ἀποτεμνομένῳ τριγώνῳ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῶν ΔΛ, ΛΓ. ἐὰν δὲ μεταξὺ ληφθῇ τὸ Β σημεῖον τῶν Λ, Γ, καὶ τὰ Δ, Λ ἀνωτέρω ὦσι τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, γίνονται πτώσεις τρεῖς· τὰ γὰρ Ζ, Ε ἢ ἀνωτέρω τῶν περάτων φέρονται, ἢ ἐπ' αὐτά, ἢ κατωτέρω. ἐὰν δὲ τὰ Δ, Λ ἐπὶ τὰ πέρατα ὦσι τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε κατωτέρω ἐνεχθήσονται. ὁμοίως

Attendendum est hoc theorema plures habere casus: in hyperbola enim viginti habet. nam punctum quod pro Β sumitur, vel idem est quod Γ, vel idem quod Λ; & tunc contingit, triangulum factum ex ΛΘ simile ipsi ΔΓΛ idem esse quod à lineis parallelis ipsi ΔΛ, ΛΓ abscinditur. si vero Β sumatur inter Λ, Γ, & puncta Δ, Λ sint supra terminos secundæ diametri, fient tres casus: nam puncta Ζ, Ε vel supra terminos ferentur, vel in ipsos, vel infra. si vero Δ, Λ sint in terminis secundæ diametri, Ζ, Ε infra terminos erunt. Similiter si Β sumatur

quovis puncto Λ, ducatur ΛΝΖΕ ipsi ΑΓ parallela: dico ΛΝ ipsi ΝΖ æqualem esse.

Ducantur enim ordinatim ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. & quoniam ex iis, quæ in quadragesimo secundo theoremate demonstravimus, triangulum ΕΛΔ æquale est parallelogrammo ΒΜ, & triangulum ΕΖΗ parallelogrammo ΒΚ: parallelogrammum igitur reliquum ΗΜ æquatur quadrilatero ΛΖΗΔ. commune auferatur ΜΔΗΖΝ quinquelaterum: reliquum igitur triangulum ΚΖΝ reliquo ΛΜΝ erit æquale. sed ΚΖ [ex hyp.] parallela est ipsi ΛΜ: ergo [per 4. 6. & 14. 5.] ΖΝ ipsi ΛΝ æqualis erit.

τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΛΝΖΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΛΝ τῇ ΖΝ.

Ηχθωσαν τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΖΗΚ, ΛΜΔ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μβ΄. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΛΔ τρίγωνον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΕΖΗ τῷ ΒΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΜ παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ ΛΖΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΔΗΖΝ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΝ τρίγωνον τῷ ΛΜΝ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΚΖ τῇ ΛΜ, ἴση ἄρα ἡ ΖΝ τῇ ΛΝ.

EUTOCIUS.

Hoc theorema plures casus habet. demonstrabimus autem habita ratione casuum quadragesimi secundi theorematis; ut exempli causa, si Ζ cadat in Β, ita dicemus. Quoniam triangulum ΒΛΔ [per 42. huj.] æquale est parallelogrammo ΘΒΔΜ, commune auferatur ΝΜΔΒ; erit reliquum ΛΜΝ triangulo ΘΝΒ æquale.

In reliquis autem sic. Quoniam triangulum ΛΕΔ parallelogrammo ΘΒΔΜ est æquale, & triangulum ΗΖΕ parallelogrammo ΘΒΗΚ: erit reliquum ΖΛΔΗ æquale reliquo ΚΗΔΜ. commune auferatur ΝΜΔΗΖ, ac reliquum ΛΝΜ triangulo ΚΖΝ æquale est.

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτώσεις ἔχει πλείους. δείξομεν δὲ ἀκολουθοῦντες τῇ πτώσει τοῦ μβ΄. ὑποδείγματος δὲ χάριν, ἐὰν τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Β πίπτοι, αὐτόθεν ἐροῦμεν. ἐπεὶ τὸ ΒΛΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΒΔΜ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΝΜΔΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΜΝ τῷ ΘΝΒ ἐστὶν ἴσον.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐροῦμεν. ἐπειδὴ τὸ ΛΕΔ τῷ ΘΒΔΜ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ ΗΖΕ τῷ ΘΒΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛΔΗ λοιπῷ τῷ ΚΗΔΜ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΝΜΔΗΖ· καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΛΝΜ τῷ λοιπῷ ΚΖΝ ἴσον ἐστί.

ΠΡΟ-

Κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ· διὰ τὰ δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγʹ. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘΝΖ τρίγωνον τῷ ΛΒΖΞ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΛΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΞ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΞΟ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

Applicentur enim ordinatim ΞNZ, BΛ, HMK: ergo, ex demonstratis in quadragesimo tertio theoremate, triangulum ΘNZ æquale erit quadrilatero ΛBZΞ, & HΘK triangulum quadrilatero ΛBKM: reliquum igitur NHKZ quadrilaterum reliquo MKZΞ est æquale. commune auferatur ONZKM quinquelaterum: atque erit reliquum triangulum OMH æquale reliquo OΞN. atque est MH parallela ipsi NΞ: ergo [per 4.6. & 14.5.] NO ipsi OH est æqualis.

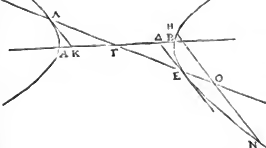
EUTOCIUS.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτώσεις ἔχει ὅσας τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχε· τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν ποιησόμεθα, προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μγʹ. θεωρήματος· καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὰς ἀποδείξεις ἐκ τῶν πτώσεων τοῦ μγʹ. οἷον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς, τοῦ Η σημείου ἐκτὸς εἰλημμένου. ἐπειδὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΑΓ τρίγωνον τοῖς ΘΗΩ, ΩΓΜ,

Hoc theorema in hyperbola tot habet casus quot habebat præcedens in parabola: demonstrationes autem eorum faciemus, attendentes ad casus quadragesimi tertii theorematis: pariterque in ellipsi, ut in subjecta figura, cum punctum H extra sumitur. quoniam triangulum ΛAΓ æquale est triangulis ΘHΩ, ΩΓM, hoc est triangu-

ctione puncto N, per N ducatur N H, parallela ipsi Λ K: dico N O ipsi O H æqualem esse.

Ducatur enim per E sectionem contingens E Δ, & erit [ex 30. huj.] E Δ ipsi Λ K parallela; quare & ipsi N H. quoniam igitur hyperbola est B E N, cujus centrum Γ, & Δ E sectionem contingit, & juncta est Γ E; sumitur autem in sectione punctum N, per quod ipsi Δ E parallela ducta est N H: ex iis quæ in hyperbola [per propositionem præced.] ostendimus, erit N O ipsi O H æqualis.



εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ Λ Κ παράλληλος ἤχθω ἡ Ν Η· λέγω ὅτι ἡ Ν Ο τῇ Ο Η ἐστὶν ἴση.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Ε Δ· ἡ Ε Δ ἄρα τῇ Λ Κ παράλληλός ἐστι, ὥστε καὶ τῇ Ν Η. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ Β Ε Ν, ἧς κέντρον τὸ Γ καὶ ἐφαπτομένη ἡ Δ Ε, καὶ ἐπέζευκται ἡ Γ Ε, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἦκται ἡ Ν Η· διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἴση ἐστὶν ἡ Ν Ο τῇ Ο Η.

EUTOCIUS.

Hujus etiam theorematis casus ita se habent, ut in quadragesimo septimo theoremate dictum est de hyperbolæ descriptione.

Καὶ τούτου αἱ πτώσεις ὁμοίως ἔχουσι ταῖς σεσημειωμέναις ἐπὶ τοῦ μζ΄. κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν.

Prop. XLIX. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum ducatur recta diametro parallela; à vertice vero ducatur parallela ordinatim applicatæ; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum interjecta ad portionem parallelæ itidem inter tactum & applicatam interjectæ, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à sectione ducta fuerit parallela contingenti, ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ΄.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένη,

παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ οὕτω τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ οὕτως τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ.

* ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΛΓ est æquale. angulus autem ΔΛΠ [per 15.1.] æqualis est angulo ΚΛΝ: quare [per *Pappi* lem. 8.] rectangulum ΚΛΝ duplum est rectanguli ΛΔΓ: quoniam igitur [ex hyp.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita est linea Η ad duplam ipsius ΓΔ, & [per 4. 6.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita ΚΛ ad ΛΝ; erit ut Η ad duplam ΓΔ ita ΚΛ ad ΛΝ. sed [per 1. 6.] ut ΚΛ ad ΛΝ ita quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ; & ut Η ad duplam ΓΔ ita rectangulum sub Η & ΔΛ ad duplum rectanguli ΓΔΛ: quare ut quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ ita rectangulum sub Η & ΔΛ ad duplum ipsius ΓΔΛ rectanguli; & [per 16. 5.] permutando. est autem [ex modo ostensis] ΚΛΝ rectangulum æquale duplo rectanguli ΓΔΛ: ergo [per 14. 5.] quadratum ex ΚΛ rectangulo sub Η & ΔΛ æquale erit.

EUTOCIUS.

* Λοιπὸν ἄρα ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΛΠΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ γωνίᾳ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ.] ἐκκείσθω γὰρ χωρὶς τὸ ΚΛΝ τρίγωνον, καὶ τὸ ΔΛΠΤ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΠ παραλληλογράμμῳ, ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΛΝ ἡ ΚΡ· παραλλη-



* Ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΔΛΠΓ est æquale. angulus autem ΔΛΠ æqualis est angulo ΚΛΝ: quare rectangulum ΚΛΝ duplum est rectanguli ΛΔΓ.] Triangulum enim ΚΛΝ seorsim describatur, itemque parallelogrammum ΔΛΠΓ. & quoniam triangulum ΚΛΝ æquale est parallelogrammo ΔΠ, ducatur per Ν ipsi ΛΚ parallela ΝΡ, & per Κ ducatur ΚΡ parallela ipsi ΛΝ: parallelogrammum igitur

Prop. L. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum recta producatur; à vertice autem ordinatim applicata conveniat cum ea quæ ducitur per tactum & centrum; fiatque ut portio contingentis inter tactum & applicatam interjecta ad portionem ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à sectione ducitur contingenti parallela ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit spatium rectangulum quod adjacet inventæ rectæ, latitudinem habens interjectam inter ipsam & tactum; in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ sub duplâ ejus quæ est inter centrum & tactum & inventâ lineâ; in ellipsi vero & circulo, eâdem deficiens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην, δυνήσεται τὸ χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, ἐλλεῖπον.

SIT hyperbola, vel ellipsis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, centrum Γ; & Δ E sectionem contingat; juncta vero Γ E producatur ad utrasque partes; ponaturque Γ K ipsi E Γ æqualis; & per B ordinatim applicetur B Z H; deinde per E ad rectos angulos ipsi E Γ ducatur E Θ; fiatque ut Z E ad E H ita E Θ ad duplam ipsius E Δ, & juncta Θ K

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ Δ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Γ Ε ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ Ε Γ ἴση ἡ Γ Κ, καὶ διὰ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Β Ζ Η, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ Ε Γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ε Θ, καὶ γινέσθω ὡς ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Η οὕτως ἡ Ε Θ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Ε Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα

ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τῷ ΛΝΞ· κοινῶν ἀφαιρεθέντων, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου· τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἥ τε ΜΞ πρὸς ΔΕ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ· ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ· καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς ΕΣ οὕτω συναμφότερος ἡ ΜΞΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφότερον τὴν ΞΜ, ΕΔ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΜΞ, ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ

ΣΕ ad ΕΔ. ſed cum demonſtratum ſit [in 43. 1. huj.] triangulum ΡΝΓ in hyperbola quidem majus eſſe quam triangulum ΗΒΓ, hoc eſt quam triangulum ΓΔΕ; in ellipſi vero & circulo minus, ipſo ΛΝΞ triangulo: communibus ablatis, in hyperbola ſcilicet triangulo ΕΓΔ & ΝΡΜΞ quadrilatero, in ellipſi autem & circulo, triangulo ΜΞΓ; erit ΛΜΡ triangulum quadrilatero ΜΕΔΞ æquale. atque eſt [ex hyp.] ΜΞ parallela ipſi ΔΕ, & [per 15. 1.] angulus ΛΜΡ æqualis angulo ΕΜΞ; ergo [ex lem. *Pappi* 8.] rectangulum ΛΜΡ æquale eſt rectangulo ſub ΕΜ & utraque ipſarum ΕΔ, ΜΞ contento. & quoniam [per 4. 6.] ut ΜΓ ad ΓΕ ita & ΜΞ ad ΔΕ & ΜΟ ad ΕΣ: ut igitur ΜΟ ad ΕΣ ita ΜΞ ad ΔΕ; & componendo [per 18. 5.] ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad ΕΣ ita utraque ΜΞ, ΔΕ ad ΕΔ: quare permutando, ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΞΜ, ΕΔ ita ΣΕ ad ΕΔ. ſed ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΜΞ, ΔΕ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub utraque ΜΟ, ΣΕ & ipſa ΕΜ ad contentum ſub utraque

Si quamlibet oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum & centrum recta producatur uſque ad alteram ſectionem; à vertice vero ducatur recta parallela ordinatim applicatæ, convenienſque cum recta per tactum & centrum ducta; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem ductæ per tactum & centrum quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ in altera ſectione ducitur parallela contingenti ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum quod adjacet inventæ lineæ, latitudinem habens interceptam inter ipſam & tactum, excedens vero figura ſimili ei quæ ſub linea inter oppoſitas ſectiones interjectâ & inventâ rectâ continetur.

Ἐὰν ὁποτέρας οὖν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἑτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν προσπορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσπορισθείσης εὐθείας.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, centrum E; & ducatur Γ Δ ſectionem B contingens, junctaque Γ E producatur; ordinatim vero applicetur B Λ H, & fiat ut Λ Γ ad Γ H ita quædam recta K ad duplam Γ Δ: itaque perſpicuum eſt [ex præced.] in ſectione B Γ lineas parallelas ipſi Γ Δ, quæ ducuntur ad rectam E Γ productam, poſſe ſpatia adjacentia rectæ K, latitudinemque habentia lineam quæ eſt inter ipſas & tactum, & excedentia figura ſimili contentæ ſub linea Γ Z & K; dupla eſt enim Z Γ ipſius Γ E. dico igitur idem evenire in ſectione Z A.

*

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἤχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Γ Ε καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ Β Λ Η, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Λ Γ πρὸς Γ Η οὕτως εὐθεῖά τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ Δ· ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ Β Γ τομῇ παράλληλοι τῇ Γ Δ ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ Ε Γ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Γ Ζ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστιν ἡ Ζ Γ τῆς Γ Ε. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν τῇ Ζ Α τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

Ἤχθω

...ῇ παραβολῇ, αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται· ἐν τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἴδει· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἴδει· καὶ διότι πάντα ὅσα προδέδεικται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα, συμπαραλαμβανομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

cuntur: ideoq; in parabola quidem [per 49.huj.] applicatas ad unamquamque diametrum parallelas contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia; in hyperbola & oppositis sectionibus [per 50. & 51. huj.] posse rectangula adjacentia ipsi quæ excedunt eadem figurâ; in ellipsi autem [per 50. huj.] quæ eadem deficiunt: igitur quæcunque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis diametris assumptis eadem quoque contingent.

EUTOCIUS.

Τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον λέγει τὴν γινομένην ἐν τῷ κώνῳ κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. καί φησιν ὅτι πάντα τὰ δεδειγμένα συμπτώματα τῶν τομῶν ἐν τοῖς προειρημένοις θεωρήμασιν, ὑποτεθεισῶν τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, συμβαίνειν δύναται καὶ τῶν ἄλλων πασῶν διαμέτρων ὑποτιθεμένων.

Diametrum ex generatione vocat communem sectionem plani secantis & trianguli per axem quæ in ipso cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. dicit autem omnia accidentia sectionum, quæ in superioribus theorematibus demonstrata sunt competere principalibus diametris, & aliis quibuscunque diametris assumptis etiam contingere.

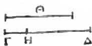
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϐ'.

Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ καθ' ἓν σημεῖον πεπερασμένης, εὑρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἧς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας· ἥτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ πε-

Prop. LII. *Probl.*

Rectâ datâ in plano ad unum punctum terminatâ, invenire in plano coni sectionem quæ parabola appellatur, cujus diameter erit data recta & vertex rectæ terminus; quæ vero à sectione ad diametrum in dato angulo applicatur, poterit rectangulum

22.1.] super E A constituatur triangulum E A Z [per prop. 12.11.] rectum ad subjectum planum, ita ut E A æqualis sit A Z & Θ æqualis Z E; ducaturque [per 31. 1.] A K parallela ipsi E Z, & Z K ipsi E A. deinde intelligatur conus, cujus vertex Z punctum, basis autem circulus circa diametrum K A, rectus ad planum quod per A Z K transit: erit igitur conus ille rectus, quoniam A Z æqualis est Z K. itaque secetur conus plano quod circulo K A æquidistet; faciatque [per 4. huj.] sectionem circulum M N Ξ, rectum videlicet ad planum transiens per M Z N: & sit circuli M N Ξ & trianguli M Z N communis sectio M N: quare M N circuli diameter est. communis autem sectio plani subjecti & circuli sit Ξ Λ. quoniam igitur circulus M N Ξ rectus est ad triangulum M N Ξ, rectumque est subjectum planum ad triangulum M Z N; communis ipsorum sectio Ξ Λ [per 19. 11.] ad triangulum M Z N, hoc est ad K Z A, perpendicularis erit: quare & ad omnes rectas lineas quæ in triangulo ipsam contingunt, adeoque ad utramque ipsarum M N, A B. rursus quoniam conus basim habens circulum M N Ξ, verticem vero punctum Z, secatur plano ad triangulum M Z N recto, quod sectionem facit circulum M N Ξ; & secatur altero plano subjecto secante basim coni secundum rectam Ξ Λ perpendicularem ipsi M N, quæ communis est sectio circuli M N Ξ & trianguli M Z N: communis autem sectio subjecti plani & trianguli M Z N, videlicet A B, parallela est lateri coni Z K M: erit [per 11. huj.] coni sectio in subjecto plano facta parabola, cujus diameter A B, & rectæ à sectione





... ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν E A τῇ A Z, τὴν δὲ Θ τῇ Z E· καὶ ἤχθω τῇ μὲν Z E παράλληλος ἡ A K, τῇ δὲ E A ἡ Z K. νενοήσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Z σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν K A κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν A Z K ἐπίπεδον· ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος, ἴση γὰρ ἡ A Z τῇ Z K. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ K A κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν M N Ξ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν M Z N ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ M N Ξ κύκλου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ M N· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ Ξ Λ. ἐπεὶ οὖν ὁ M N Ξ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, ὀρθὸν δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον· ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ Ξ Λ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, τουτέστι τὸ K Z A· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ, ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν M N, A B. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ M N Ξ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ M Z N τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν M N Ξ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν Ξ Λ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ M N, ἥ κοινή ἐστι τομὴ τοῦ τε M N Ξ κύκλου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου· ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ M Z N τριγώνου ἡ A B παράλληλός ἐστι τῇ Z K M πλευρᾷ τοῦ κώνου· ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ A B, αἱ δὲ καταγόμεναι

… ἀπὸ Λ Λ τῷ ὑπὸ Λ Κ Μ, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ Ε Λ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν Ε Κ τῇ Κ Λ, καὶ ἔστιν ἡ Θ Λ τῇ Ε Κ Λ παράλληλος· ἡ Θ Α Β ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, καὶ αἱ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ Α Ε δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς Α Β, καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Θ Α Ε. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Ε Θ γωνία τῇ ὑπὸ Α Η Ζ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Α· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Θ Ε τρίγωνον τῷ Α Η Ζ· ὡς ἄρα ἡ Θ Α πρὸς Ε Α οὕτως ἡ Ζ Α πρὸς Α Η· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς Α Θ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Ε οὕτως ἡ Ζ Α πρὸς Α Η. ἡ δὲ Γ Δ τῆς Θ Α διπλῆ· ὡς ἄρα ἡ Ζ Α πρὸς Α Η οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Ε, διὰ δὴ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ ἐνάτῳ θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ Γ Δ.

Λ Λ, vertex Κ, & rectum latus Κ Μ: transibit autem ea per Λ [per 11. huj.] propterea quod quadratum ex Λ Λ rectangulo Λ Κ Μ est æquale; & [per 33. huj.] linea Ε Λ sectionem continget, quoniam Κ Λ æqualis est Ε Κ, & Θ Λ est parallela ipsi Ε Κ Λ: ergo [per 46. huj.] Θ Α Β diameter erit sectionis; & à sectione ad eam applicatæ ipsi Α Ε parallelæ bifariam dividentur à linea Α Β; & [per 29. 1.] in angulo Θ Α Ε applicabuntur. quoniam igitur angulus Α Ε Θ æqualis est angulo Α Η Ζ, & communis qui ad Α; triangulum Α Θ Ε simile est [per 4. 6.] Α Η Ζ triangulo: ut ergo Θ Α ad Ε Α ita Ζ Α ad Α Η; & ideo ut dupla Α Θ ad duplam Α Ε ita Ζ Α ad Α Η. sed cum Γ Δ sit dupla ipsius Θ Α, erit ut Ζ Α ad Α Η ita Γ Δ ad duplam ipsius Α Β: quare, per ea quæ in theoremate quadragesimo nono ostensa sunt, erit Γ Δ rectum sectionis latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, τῆς ἑτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταὐτὰ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ· εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος ᾖ τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἥτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον, γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείσῃ, δυνήσεται παρακείμενον

Prop. LIII. *Probl.*

Datis duabus rectis terminatis quæ ad rectos inter se angulos constituantur, & altera producta ad easdem partes ad quas angulus rectus: invenire in recta producta coni sectionem quæ hyperbola dicitur, in eodem plano in quo sunt datæ rectæ, ita ut producta diameter sectionis sit, & vertex punctum quod ad angulum consistit; quæ vero à sectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, possit

Z rectangulum

habeat quam A B ad B Γ; & [per 30.3.] secetur A E B circumferentia bifariam in E; ducaturque [per 10. 1.] à puncto E ad A B perpendicularis E K, quæ ad Λ producatur: ergo E Λ diameter est circuli. quod si ut A B ad B Γ ita fuerit E K ad K Λ, usi essemus puncto Λ: sin minus, fiat [per 12.6.] ut A B ad B Γ ita E K ad minorem ipsâ K Λ, quæ sit K M; & per M [per 31. 1.] ducatur M Z parallela ipsi A B; junctisque A Z, E Z, Z B, per B ducatur B Ξ ipsi Z E parallela. itaque quoniam angulus A Z E æqualis est [per 27. 3.] angulo E Z B; angulus autem A Z E [per 29. 1.] angulo A Ξ B, & E Z B ipsi Ξ B Z: erit & Ξ B Z ipsi Z Ξ B æqualis; quare [per 6. 1.] & Z B æqualis ipsi Z Ξ. intelligatur conus cujus vertex Z, & basis circulus circa diametrum B Ξ, rectus ad Z B Ξ triangulum: erit itaque is conus rectus, quia Z B æqualis est Z Ξ. producantur Z B, Z Ξ, M Z; & secetur conus plano, quod circulo B Ξ æquidistet; erit igitur [per 4. huj.] ea sectio circulus, qui sit H Π Θ P, cujus circuli diameter est H Θ. communis autem sectio circuli H Θ & subjecti plani sit Π Δ P: erit igitur Π Δ P ad utramque ipsarum H Θ, Δ B perpendicularis: (uterque enim circulorum Ξ B, Θ H rectus est ad triangulum Z H Θ; sed & subjectum planum ad Z H Θ rectum est: ergo [per 19. 11.] communis ipsorum sectio Π Δ P erit & ad Z H Θ perpendicularis, ac proinde ad omnes rectas,

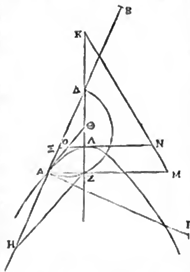
Α Ζ Β, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ Α Β πρὸς Β Γ· καὶ τετμήσθω ἡ Α Ε Β δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν Α Β κάθετος ἡ Ε Κ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Λ. εἰ μὲν οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Ε Κ πρὸς Κ Λ, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα· εἰ δὲ μή, γινέσθω ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Ε Κ πρὸς ἐλάσσονα τῆς Κ Λ τὴν Κ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ Α Β παράλληλος ἤχθω ἡ Μ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Ζ, Ε Ζ, Ζ Β, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ Ζ Ε παράλληλος ἡ Β Ξ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Ζ Ε γωνία τῇ ὑπὸ Ε Ζ Β, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ Α Ζ Ε τῇ ὑπὸ Α Ξ Β ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ Ε Ζ Β τῇ Ξ Β Ζ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ Ξ Β Ζ ἄρα τῇ ὑπὸ Ζ Ξ Β ἐστὶν ἴση· καὶ ἄρα ἡ Ζ Β τῇ Ζ Ξ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν Β Ξ διάμετρον κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ Β Ζ Ξ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθός, ἴση γὰρ ἡ Ζ Β τῇ Ζ Ξ. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ Ζ Β, Ζ Ξ, Μ Ζ, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ Β Ξ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ Η Π Θ Ρ· ὥστε διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου ἡ Η Θ· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ Η Θ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ Π Δ Ρ· ἔσται δὴ ἡ Π Δ Ρ πρὸς ἑκατέραν τῶν Η Θ, Α Β Δ ὀρθή· (ἑκάτερος γὰρ τῶν Ξ Β, Θ Η κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ Ζ Η Θ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ Ζ Η Θ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ Π Δ Ρ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ Ζ Η Θ, καὶ πρὸς πάσας

ἄρα

ἄρα ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ Ο πρὸς τὸ ὑπὸ Η Ο Θ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ Ζ Ο τῇ Α Δ· πλαγία ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ Α Β, ὀρθία δὲ ἡ Β Γ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ δωδεκάτῳ θεωρήματι δέδεικται.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἡ Α Β, Α Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν Β Α Θ· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ Α Β, ὀρθία δὲ ἡ Α Γ, αἱ δὲ κατηγμέναι ἐν τῇ ὑπὸ Θ Α Β γωνίᾳ τεταγμένως κατάχθήσονται.

Τετμήσθω ἡ Α Β δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῆς Α Δ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ Α Ζ Δ, καὶ ἤχθω εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ Α Θ ἡ Ζ Η, ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Η Α λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Α Γ πρὸς Α Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ζ Θ Δ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῶν Ζ Δ, Δ Θ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ Λ, καὶ κείσθω τῇ Λ Δ ἴση ἡ Δ Κ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Λ Ζ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ Λ Ζ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Κ Μ, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ Κ Ζ ἡ Λ Ν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ο, Ξ· καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν



est igitur ut A B ad B Γ ita quadratum ex Z O ad H O Θ rectangulum. atque [per constr.] est Z O parallela ipsi A Δ: sequitur ergo A B esse transversum figuræ latus & B Γ rectum; etenim hæc in duodecimo theoremate ostensa sunt.

Non sit autem datus angulus rectus, sintque rectæ datæ A B, A Γ; & datus angulus æqualis sit angulo B A Θ: oportet igitur describere hyperbolam, ita ut ejus diameter sit A B, & rectum latus A Γ, ductæ vero ordinatim ad diametrum in angulo Θ A B applicentur.

Secetur [per 10. 1.] A B bifariam in Δ: & [b] super Λ Δ describatur semicirculus Λ Z Δ, & ducatur quædam recta Z H ad semicirculum parallela ipsi Λ Θ; ita ut fiat ratio quadrati ex Z H ad rectangulum Δ H Λ eadem quam habet recta Λ Γ ad rectam Λ B; & juncta Z Θ Δ producatur; inter ipsas autem Z Δ, Δ Θ media proportionalis sit [per 13. 6.] recta Δ Λ, ponaturque ipsi Λ Δ æqualis Δ K; & [ope 11.6.] quadrato ex Λ Z æquale fiat rectangulum Λ Z M, & jungatur K M; deinde per Λ ad rectos angulos ipsi K Z ducatur Λ N ad quæ O, Ξ producatur: datis autem duabus

rectis

[per 4. 6.] ZH ad HΔ: habebit ΓA ad AB rationem compositam ex ratione ΓA ad duplam AΘ & ex ratione ZH ad HΔ. habet autem & quadratum ex ZH ad rectangulum ΔHA rationem compositam ex ratione ZH ad HΔ & ex ratione ZH ad HA: ratio igitur composita ex ratione ΓA ad duplam AΘ & ex ratione ZH ad HΔ, eadem est ac ratio composita ex ratione ZH ad HΔ & ex ratione ZH ad HA. communis auferatur ratio ZH ad HΔ: ergo ut ΓA ad duplam AΘ ita ZH ad HA, & [per 4. 6.] ut ZH ad HA ita OA ad AΞ: ut igitur ΓA ad duplam AΘ ita OA ad AΞ. quod cum ita sit, erit AΓ ea juxta quam possunt quæ à sectione ducuntur: hoc enim in quinquagesimo theoremate demonstratum est.

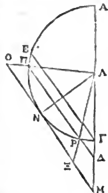
AΘ πρὸς ΔA, τουτέστιν ἡ ZH πρὸς HΔ· ἡ ΓA ἄρα πρὸς AB τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΓA πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AΘ καὶ τοῦ τῆς ZH πρὸς HΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ ΔHA τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ZH πρὸς HΔ καὶ ἡ ZH πρὸς HA· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς ΓA πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AΘ καὶ τοῦ τῆς ZH πρὸς HΔ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ, ἔκ τε τοῦ τῆς ZH πρὸς HA καὶ τοῦ τῆς ZH πρὸς HΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ZH πρὸς HΔ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AΘ οὕτως ἡ ZH πρὸς HA. ὡς δὲ ἡ ZH πρὸς HA οὕτως ἡ OA πρὸς AΞ· ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AΘ οὕτως ἡ OA πρὸς AΞ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, παρ' ἣν δύνανται ἔσται ἡ AΓ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν΄. θεωρήματι.

EUTOCIUS.

[a] Et super AB planum erigatur, rectum ad subjectum planum, in quo circa AB describatur circulus AEBZ, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione AEB comprehenditur, ad partem comprehensam in portione AZB non majorem rationem habeat quam AB ad BΓ.] Sint duæ rectæ lineæ AB, BΓ, & oporteat circa AB circulum describere, cujus diameter à linea AB ita dividatur, ut pars ipsius, quæ est ad Γ, ad reliquam partem non majorem rationem habeat, quam AB ad BΓ. ponatur jam eandem habere; seceturque AB bifariam in Δ, & per Δ ad rectos angulos ipsi AB ducatur EΔZ, & fiat ut AB ad BΓ ita EΔ ad ΔZ; atque EZ bifariam secetur: constat ergo, si

[a] Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς AB ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν AB γεγράφθω κύκλος ὁ AEBZ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ AEB τμήματι, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ AZB τμήματι, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ AB πρὸς BΓ.] Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ τὴν AB κύκλον γράψαι, ὥστε τὴν διάμετρον αὐτοῦ τεμνομένην ὑπὸ τῆς AB οὕτως ὥστε τὸ πρὸς τὸ Γ μέρος αὐτῆς πρὸς τὸ λοιπὸν μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς AB πρὸς BΓ. ὑποκείσθω μὲν νῦν τὸν αὐτὸν ἔχειν, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ Δ πρὸς ὀρθὰς τῇ AB ἤχθω ἡ EΔZ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ AB πρὸς BΓ οὕτως ἡ EΔ πρὸς ΔZ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ EZ· δῆλον

ἤχθω ἐπ' αὐτὴν κάθετος, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΜ· ἐφάψεται ἄρα τοῦ κύκλου. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, καὶ κείσθω τῇ ΝΞ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΛΞ, ΛΟ τεμνέτωσαν τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὰ Ρ, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΡΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΝΞ τῇ ΝΟ, κοινή τε καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΛ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΟ τῇ ΛΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΠ ἴση τῇ ΛΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΠΟ τῇ ΡΞ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΡΔ τῇ ΜΟ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΟΞ πρὸς ΞΜ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς ΖΕ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς ΜΞ, τουτέστιν ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ. ὡς δὲ ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΔΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΔΡ τῷ ὑπὸ ΛΔΓ· ὡς ἄρα ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΖΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΔΓ.



cularis ducatur, quæ producta occurrat circuli circumferentiæ in N, & per N ipsi ΓB parallela sit NM: ergo [per 16.3.] NM circulum continget. itaque fiat [per 10. 6.] ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad NΞ, & ipsi NΞ æqualis ponatur NO; jungantur autem ΛΞ, ΛO quæ semicirculum in punctis P, Π secent, & ducatur ΠPΔ. quoniam igitur NΞ æqualis est NO, communisque & ad rectos angulos NΛ; erit [per 4.1.] ΛO ipsi ΛΞ æqualis. sed ΛΠ est æqualis ΛP; ergo & reliqua ΠO reliquæ PΞ; & propterea [per 2.6.] ΠPΔ ipsi MO est parallela. est autem ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad ΞN, & ut ΘK ad ΘH ita NΞ ad ΞO; ex æquali igitur ut ΘZ ad ΘH ita MΞ ad ΞO, invertendoque ut HΘ ad ΘZ ita OΞ ad ΞM; & componendo erit ut HZ ad ZΘ, hoc est ad ZE, ita OM ad MΞ, hoc est ΠΔ ad ΔP. ut autem ΠΔ ad ΔP ita [per 1. 6.] rectangulum ΠΔP ad quadratum ex ΔP. sed [per 36. 3.] rectangulum ΠΔP æquale est rectangulo ΛΔΓ: ergo ut HZ ad ZE ita ΛΔΓ rectangulum ad quadratum ex ΔP, & invertendo ut ZE ad ZH ita quadratum ex ΔP ad rectangulum ΛΔΓ.

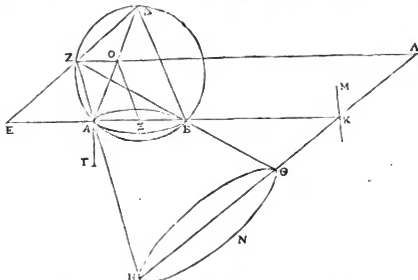
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδʹ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις· εὑρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἑτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἧς κορυφὴ

Prop. LIV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter se angulos: invenire, circa alteram ipsarum tanquam diametrum coni, sectionem quæ ellipsis appellatur, in eodem plano in

ponatur autem ipsi AΓ æqualis AΞ, & [per 31. 1.] per Ξ ducatur ΞO parallela ipsi BΔ; &

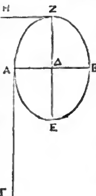


per O ipsi AB parallela OZ; junctaque ΔZ conveniat cum AB producta in puncto E: erit igitur [per 7. 5.] ut BA ad AΓ ita BA ad AΞ, hoc est ΔA ad AO, hoc est [per 2. 6.] ΔE ad EZ; deinde jungantur AZ, ZB & producantur, sumaturque in ZA quodvis punctum H, & [per 31. 1.] per H ipsi ΔE parallela ducatur HΛ, quæ cum AB producta conveniat in K; denique producatur ZO, & conveniat cum HK in Λ. quoniam igitur circumferentia AΔ æqualis est ipsi ΔB; & [per 27. 3.] angulus ABΔ angulo ΔZB æqualis erit. & quo-

ΔΑ, ΔΒ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ο τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ε· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΞ, τουτέστιν ἡ ΔΑ πρὸς ΑΟ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΑ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΛ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ· ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΖΟ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΗΚ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ.

γάρ εἰσι τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ δὲ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τε τοῦ τῆς ΒΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΘ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ· ἡ ΒΛ ἄρα πρὸς ΛΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τε τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΗ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΘ· ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ. ὅπερ δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ δεκάτῳ τρίτῳ θεωρήματι.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ ΑΒ ἐλάσσων τῆς ΑΓ· καὶ δέον ἔστω ἐπὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν ΑΓ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ τῇ ΔΕ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ· καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ἀπὸ ΕΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ

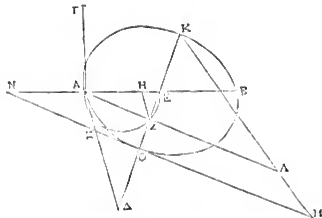
lelæ. quoniam vero ut ΔΕ ad ΕΖ ita [per 1.6.] rectangulum ΔΕΖ, hoc est [per 36. 3.] ΒΕΑ, ad quadratum ex ΕΖ; rectangulum autem ΒΕΑ [per 23. 6.] ad quadratum ex ΕΖ compositam rationem habet ex ratione ΒΕ ad ΕΖ & ex ratione ΑΕ ad ΕΖ; utque ΒΕ ad ΕΖ ita [per 4.6.] ΒΚ ad ΚΘ, hoc est ΖΛ ad ΛΘ, & ut ΑΕ ad ΕΖ ita ΑΚ ad ΚΗ, hoc est ΖΛ ad ΛΗ: habebit igitur ΒΛ ad ΛΓ rationem compositam ex ratione ΖΛ ad ΛΗ & ex ratione ΖΛ ad ΛΘ. quæ quidem ratio eadem est [per 23. 6.] quam habet quadratum ex ΖΛ ad ΗΛΘ rectangulum: ergo ut ΒΛ ad ΛΓ ita quadratum ex ΖΛ ad rectangulum ΗΛΘ. quod cum ita sit, ΛΓ erit rectum figuræ latus, ut ostensum est in 13. theoremate.

IISDEM positis, sit linea ΑΒ minor ipsa ΑΓ: & oporteat circa diametrum ΑΒ ellipsim describere, ita ut ΑΓ sit rectum figuræ latus.

Secetur ΑΒ bifariam in Δ; à quo ad rectos angulos ipsi ΑΒ ducatur ΕΔΖ: & rectangulo ΒΑΓ æquale sit [ope 13.6.] quadratum ex ΖΕ, & ΖΔ æqualis sit ipsi ΔΕ; ipsi vero ΑΒ parallela ducatur ΖΗ, & fiat [per 12. 6.] ut ΑΓ ad ΑΒ ita ΕΖ ad ΖΗ: major est igitur ΕΖ quam ΖΗ. & quoniam rectangulum ΓΑΒ æquale est quadrato ex ΕΖ; ut ΓΑ ad ΑΒ ita est [per cor. 20.6.] quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΑΒ, & quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΑΔ. ut autem ΓΑ ad ΑΒ ita ΕΖ ad ΖΗ: ergo ut ΕΖ ad ΖΗ ita

& junctæ A Z, E Z producantur, & sumatur [per 13. 6.] inter ipsas Δ E, E Z media proportionalis

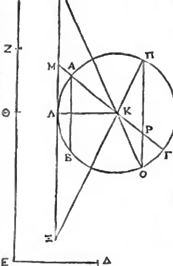
τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Γ Α πρὸς τὴν Α Β, καὶ ἐπι-ζεύχθωσαν αἱ Α Ζ, Ε Ζ ϰ̀ ἐκϐεϐλήσθωσαν, ϗ εἰ-



E Θ, cui æqualis ponatur E K; fiat autem [ope 12. 6.] quadrato ex A Z æquale rectangulum Θ Z Λ, jungaturque K Λ; & per Θ ipsi Θ Z ad rectos angulos ducatur M Θ Ξ parallela ipsi A Z Λ, rectus est enim [per 31. 3.] angulus qui ad Z; atque datis duabus rectis terminatis & ad rectos inter se angulos K Θ, Θ M, describatur ellipsis [per cas. præc.] cujus diameter transversa K Θ, & rectum figuræ latus Θ M; ductæ vero à sectione ad Θ K in recto angulo applicentur: transibit igitur sectio per A, quia quadratum ex Z A rectangulo Θ Z Λ est æquale. & quoniam Θ E æqualis est E K, & A E ipsi E B; etiam per B transibit sectio, cujus centrum erit E & diameter A E B, & [per prop. 37. vel 38. huj.] Δ A sectionem continget, propterea quod rect-

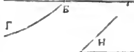
λήφθω τῶν Δ Ε, Ε Ζ μέση ἀνάλογον ἡ Ε Θ, ϰ̀ τῇ Ε Θ ἴση κείσθω ἡ Ε Κ, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ Α Ζ ἴσον τὸ ὑπὸ Θ Ζ Λ, ϰ̀ ἐπιζεύχθω ἡ Κ Λ, ϰ̀ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ Θ Ζ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Θ Μ Ξ, παράλληλος γινομένη τῇ Α Ζ Λ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ· καὶ δύο δοθεισῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν Κ Θ, Θ Μ, γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος πλαγία ἡ Κ Θ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Θ Μ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν Θ Κ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ Ζ Α τῷ ὑπὸ Θ Ζ Λ. ϰ̀ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Θ Ε τῇ Ε Κ, ἡ δὲ Α Ε τῇ Ε Β, ἥξει ϰ̀ διὰ τοῦ Β ἡ τομή· καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ Α Ε Β, ϗ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ Δ Α, διὰ τὸ ἴσον

ἐκβληθεῖσα ἡ ΚΛ συμβαλλέτω τῇ ΛΜ κατὰ τὸ Μ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, καὶ τῇ ΛΝ ἴση ἔστω ἡ ΛΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΝΚ, ΚΞ καὶ ἐκβληθεῖσαι, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος τεμνέτω αὐτὰς κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΡΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΝΛ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΞ· καὶ διελόντι ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΛ τῇ ΛΞ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΝ τῇ ΚΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΚΠ ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΝΞ τῇ ΟΠ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΜΝ τρίγωνον τῷ ΚΡΟ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΚΜΞ τῷ ΠΡΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΡΟ. ἀλλὰ καὶ ὡς αὐτὴ ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΜ πρὸς ΡΟ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΟΡΠ τῷ ὑπὸ ΑΡΓ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΡΓ.



producta conveniat cum ΛM in puncto M, & fiat ut ΘZ ad ZH ita ΛM ad MN, atque ipsi ΛN æqualis sit ΛΞ, & junctæ NK, KΞ producantur, adeo ut à completo circulo secentur in punctis O, Π, & jungatur OPΠ. quoniam igitur ut ZΘ ad ZH ita est ΛM ad MN; componendo erit ut ΘH ad HZ ita ΛN ad NM, & invertendo ut ZH ad HΘ ita NM ad NΛ. ut autem ZH ad HE ita MN ad NΞ, & dividendo ut ZH ad ZE ita NM ad MΞ. & quoniam NΛ æqualis est ΛΞ, communisque & ad rectos angulos ΛK; erit & KN æqualis KΞ. & est KO ipsi KΠ æqualis: parallela igitur est [per 2. 6.] NΞ ipsi OΠ, atque ob id triangulum KMN simile triangulo KPO, & triangulum KMΞ ipsi ΠPK; erit ut KM ad KP ita MN ad PO. sed ut eadem KM ad KP ita MΞ ad ΠP: quare ut NM ad PO ita MΞ ad ΠP, & permutando ut NM ad MΞ ita OP ad PΠ. sed ut NM ad MΞ ita ZH ad ZE, hoc est ΔE ad EZ; ut autem OP ad PΠ ita [per 1. 6.] quadratum ex OP ad rectangulum OPΠ. ut igitur ΔE ad EZ ita quadratum ex OP ad rectangulum OPΠ. sed [per 35. 3.] est rectangulum OPΠ rectangulo AΡΓ æquale: ut igitur ΔE ad EZ ita quadratum ex OP ad rectangulum AΡΓ.

… vero ad … quæ in directum ipsi B E constituitur, applicentur in angulo H. sit ea B Γ; quod quomodo fieri oporteat, jam [ad 53. huj.] dictum est; ducatur per E recta E K ad rectos angulos ipsi B E, quæ sit æqualis B Θ; & describatur similiter alia hyperbola Δ E Z, ita ut ejus diameter sit B E, rectum figuræ latus E K, & ductæ à sectione ordinatim applicentur in angulo qui angulo H æqualis sit: constat igitur B, E sectiones esse oppositas, quarum diameter una eademque est, atque latera recta inter se æqualia.





καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ B E καταχθήσονται ἐν γωνίᾳ τῇ H. καὶ ἴσω ἡ A B Γ, τοῦτο γὰρ ὡς δεῖ γίνεσθαι προγέγραπται· ἤχθω δὴ διὰ τοῦ E τῇ B E πρὸς ὀρθὰς ἡ E K, ἴση οὖσα τῇ B Θ, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ Δ E Z, ἧς διάμετρος μὲν ἡ B E, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ E K, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ H· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ B, E εἰσὶν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἐστί, καὶ ὀρθίαι ἴσαι.

Prop. LVI. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis sese bifariam secantibus: circa utramque ipsarum sectiones oppositas describere; ita ut rectæ datæ sint conjugatæ earum diametri, & ut quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

Sint datæ duæ rectæ lineæ se invicem secantes A Γ, Δ E: oportet jam circa utramque ipsarum quasi diametrum oppositas sectiones describere, ita ut A Γ, Δ E conjugatæ sint inter se, nempe ut Δ E quidem possit figuram earum quæ circa A Γ sunt, A Γ vero figuram earum possit quæ circa Δ E.

Sit [ope 11.6.] quadrato ex Δ E æquale rectangulum A Γ Λ, sitque A Γ ipsi Γ Λ ad rectos angulos; & duabus datis rectis ad rectos inter se angulos constitutis A Γ, Γ Λ, describan-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομὰς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας, αἱ A Γ, Δ E· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὦσιν αἱ A Γ, Δ E συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ ἡ μὲν Δ E τὸ τῶν περὶ τὴν A Γ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ A Γ τὸ τῶν περὶ τὴν Δ E.

Ἔστω τῷ ἀπὸ Δ E ἴσον τὸ ὑπὸ A Γ Λ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ A Γ τῇ Γ Λ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν A Γ, Γ Λ, γεγράφθωσαν

ποιῆσαι. καλείσθωσαν δὲ αὐταὶ αἱ τομαὶ Συζυγεῖς.

GATÆ.

EUTOCIUS.

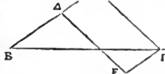
Εἴρηται μὲν, ἐν τοῖς μετὰ τὸ ι'. θεώρημα σχολίοις, ὁ σκοπὸς τῶν ιγ'. πρώτων θεωρημάτων· καὶ ἐν τοῖς εἰς τὸ ἑκκαιδέκατον, ὁ τῶν ἑξῆς τριῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι ἐν μὲν τῷ ιζ'. φησὶν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη ἐκτὸς πίπτει· ἐν δὲ τῷ ιη'. φησὶν, ὅτι ἡ παράλληλος τῇ ὁπωσοῦν ἐφαπτομένῃ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη τεμεῖ τὴν τομήν· ἐν τῷ ιθ'. ὅτι ἡ ἀπό τινος σημείου διὰ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κ'. καὶ κα'. τὰς παρὰ τεταγμένως κατηγμένας ζητεῖ τῶν τομῶν, ὅπως ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὰ τῆς διαμέτρου ὑπ' αὐτῶν γινόμενα τμήματα· ἐν τῷ κβ'. καὶ κγ'. λέγει περὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ δύο σημεῖα τῇ τομῇ συμπιπτούσης· ἐν τῷ κδ'. καὶ κε'. περὶ τῆς εὐθείας καθ' ἕν τι τῇ τομῇ συμπιπτούσης, τουτέστιν ἐφαπτομένης· ἐν τῷ κς'. περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ κζ'. περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι καθ' ἀμφότερα μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κη'. περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ κθ'. περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης· ἐν τῷ λ'. φησὶν, ὅτι διχοτομεῖται ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἐκβαλλομένη τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ λα'. φησὶν, ὅτι ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἡ ἐφαπτομένη τὴν διάμετρον τέμνει μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου· ἐν τῷ λβ'. καὶ γ'. καὶ δ'. καὶ ε'. καὶ ς'. περὶ τῶν ἐφαπτομένων ποιεῖται τὸν λόγον· ἐν τῷ λζ'. περὶ τῶν ἐφαπτομένων, καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ λη'. περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅπως ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον· ἐν τῷ λθ'. καὶ μ'. περὶ τῶν αὐτῶν ποιεῖται τὸν λόγον, τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους ἐπιζητῶν· ἐν τῷ μα'. περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλ-

Scripſimus, in commentariis poſt decimum theorema, quodnam fuerit propoſitum *Apollonio* in primis tredecim theorematibus; & in commentariis in ſextum decimum de tribus ſequentibus dictum eſt. Scire vero oportet quod in ſeptimo decimo aſſerit rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, extra ſectionem cadere: in decimo octavo rectam, quæ utcunque contingenti parallela intra ſectionem ducitur, ipſam ſecare: in decimo nono rectam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri ordinatim applicatæ parallela, cum ſectione convenire: in vigeſimo & vigeſimo primo rectas in ſectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter ſeſe habeant, itemque diametri portiones quæ ab ipſis fiunt: in vigeſimo ſecundo & vigeſimo tertio tractat de recta quæ in duobus punctis ſectioni occurrit: in vigeſimo quarto & vigeſimo quinto de ea quæ ipſi occurrit in uno puncto tantum, hoc eſt de recta quæ ſectionem contingit: in vigeſimo ſexto de ea quæ diametro parabolæ & hyperbolæ parallela ducitur: in vigeſimo ſeptimo de recta ſecante parabolæ diametrum, nempe quod ex utraque parte ſectioni occurrat: in vigeſimo octavo de ea quæ parallela ducitur contingenti unam oppoſitarum ſectionum: in vigeſimo nono de ea quæ per centrum oppoſitarum tranſiens producitur: in trigeſimo dicit, quod recta quæ tranſit per centrum ellipſeos & oppoſitarum ſectionum bifariam dividitur: in trigeſimo primo quod ea recta, quæ hyperbolam contingit, diametrum ſecat inter centrum & verticem ſectionis: in 32. 33. 34. 35. 36. de proprietatibus rectarum contingentium agitur: in trigeſimo ſeptimo de contingentibus & de iis quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipſi: in trigeſimo octavo de contingentibus hyperbolam & ellipſim, quo modo ſe habeant ad ſecundam diametrum: in trigeſimo nono & quadrageſimo de iiſdem agit, rationes ex hiſce compoſitas inquirens: in quadrageſimo primo de parallelogrammis deſcriptis ab applicata & ab ea quæ ex centro hyperbolæ

&

ПАП-

παρὰ δὲ τοῦ Γ τῇ Δ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Α· ἔσται, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΓΕΔ, ἡ ΑΓ ἴση τῇ Δ Ε καὶ παράλληλος, καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς Α Β, Β Γ.



& per Γ ipsi Δ E parallela Γ A; erit, propter A Γ E Δ parallelogrammum, [per 34. 1.] A Γ ipsi Δ E æqualis & parallela, & inter datas rectas A B, B Γ coaptata est.

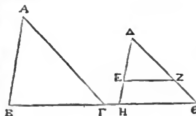
ΛΗΜΜΑ β΄.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Γ οὕτως ἡ Δ Ε πρὸς Ε Ζ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν Α Β τῇ Δ Ε, ἡ δὲ Β Γ τῇ Ε Ζ· ὅτι καὶ ἡ Α Γ τῇ Δ Ζ ἐστὶ παράλληλος.

LEMMA II.

Sint duo triangula A B Γ, Δ E Z; sitque ut A B ad B Γ ita Δ E ad E Z, & A B quidem sit parallela Δ E, B Γ vero ipsi E Z: dico & A Γ ipsi Δ Z parallelam esse.

Ἐκβεβλήσθω ἡ Β Γ καὶ συμπιπτέτω ταῖς Δ Ε, Δ Ζ κατὰ τὰ Η, Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Γ οὕτως ἡ Δ Ε πρὸς Ε Ζ, καί εἰσιν ἴσαι αἱ Β, Ε γωνίαι, διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, τουτέστι τῇ Θ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς Ε Ζ, Η Θ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Γ τῇ Δ Θ.



PRoducatur B Γ; & conveniat cum Δ E, Δ Z in punctis H, Θ. itaque quoniam est ut A B ad B Γ ita Δ E ad E Z, & anguli ad B, E æquales, quia duæ rectæ sunt duabus parallelæ; erit [per 6.6.] angulus Γ æqualis angulo Z, hoc est angulo Θ, propter parallelas E Z, H Θ: ergo A Γ ipsi Δ Θ est parallela.

ΛΗΜΜΑ γ΄.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ Α Β, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ Α Γ, Δ Β, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ Α Δ Β μετὰ τοῦ ὑπὸ Γ Ε Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Ε Β.

LEMMA III.

Sit recta A B, sintque æquales A Γ, Δ B, & inter Γ & Δ sumatur quodvis punctum E: dico rectangulum A Δ B una cum rectangulo Γ E Δ æquale esse rectangulo A E B.

 Secetur

æ est rectangulo Δ A Γ una cum quadrato ex Γ Z. sed & quadratum ex Γ Z est æquale rectangulo Γ E Δ una cum quadrato ex E Z. auferatur commune quadratum ex E Z; erit igitur reliquum rectangulum A E B æquale rectangulo Γ E Δ una cum rectangulo Δ A Γ.

ὑπὸ Γ Z ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Γ E Δ καὶ τῷ ἀπὸ E Z. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ E Z τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ A E B ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Δ E Γ καὶ τῷ ὑπὸ Δ A Γ.

LEMMA V.

Sint duo triangula A B Γ, Δ E Z; & sit angulus quidem Γ æqualis angulo Z, angulus vero B angulo E major: dico B Γ ad Γ A minorem rationem habere quam E Z ad Z Δ.

Constituatur enim angulus Γ B H æqualis angulo E, & est angulus Γ angulo Z æqualis: ergo [per 4. 6.] ut B Γ ad Γ H ita E Z ad Z Δ. sed [per 8. 5.] B Γ ad Γ A minorem habet rationem quam B Γ ad Γ H: igitur B Γ ad Γ A minorem rationem habet quam E Z ad Z Δ.

ΛΗΜΜΑ έ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ A B Γ, Δ E Z, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Γ τῇ Z, μείζων δὲ ἡ B τῆς E· ὅτι ἡ B Γ πρὸς Γ A ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E Z πρὸς Z Δ.

Συνεστάτω τῇ E γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ Γ B H, ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ τῇ Z ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ B Γ πρὸς Γ H οὕτως ἡ E Z πρὸς Z Δ. ἀλλὰ ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ A ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ B Γ πρὸς Γ H· καὶ ἡ B Γ ἄρα πρὸς Γ A ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E Z πρὸς Z Δ.

LEMMA VI.

Habeat rursus B Γ ad Γ A majorem rationem quam E Z ad Z Δ, & sit angulus Γ æqualis angulo Z: dico angulum B angulo E minorem esse.

Quoniam enim B Γ ad Γ A majorem rationem habet quam E Z ad Z Δ; si igitur fiat ut B Γ ad Γ A ita E Z ad aliam quandam; erit ea [per 10. 5.] minor quam Z Δ. sit ea recta Z H, & E H jungatur. cumque circa æquales angulos latera proportionalia sint, erit angulus ad B [per 6. 6.] æqualis angulo Z E H, qui angulo Z E Δ minor est.

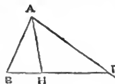
ΛΗΜΜΑ ς´.

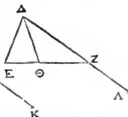
Ἐχέτω δὴ πάλιν ἡ B Γ πρὸς Γ A μείζονα λόγον ἤπερ ἡ E Z πρὸς Z Δ, ἴση δὲ ἔστω ἡ Γ γωνία τῇ Z· ὅτι πάλιν γίνεται ἐλάσσων ἡ B γωνία τῆς E γωνίας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ B Γ πρὸς Γ A μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ E Z πρὸς Z Δ· ἐὰν ἄρα ποιῶ ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ A οὕτως ἡ E Z πρὸς τινα ἄλλην· ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς Z Δ. ἔστω πρὸς τὴν Z H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ E H. καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ B γωνία τῇ ὑπὸ Z E H, ἐλάσσονι οὔσῃ τῆς Z E Δ. ὅ. ἔ. δ.

ΛΗΜ-

Κεῖσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΛΖ πρὸς ΖΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ. ὁμοίως καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ ΔΘΕ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ. ὅ, ἔ. δ.





K

Ponatur enim rectangulo ΒΓΗ æquale rectangulum ΑΓΚ: ergo [per 16. 6.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΑΓ ad ΓΗ. ipsi vero rectangulo ΕΖΘ æquale ponatur rectangulum ΔΖΛ: erit igitur ut ΕΖ ad ΖΛ ita ΔΖ ad ΖΘ. sed positum est ut rectangulum ΒΓΗ, hoc est rectangulum ΑΓΚ, ad quadratum ex ΑΓ, hoc est [per 1. 6] ut ΚΓ ad ΓΑ ita rectangulum ΕΖΘ, hoc est ipsum ΔΖΛ ad quadratum ex ΔΖ, videlicet ut ΛΖ ad ΖΔ: ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΖΔ, ob similitudinem triangulorum: ergo [per 22. 5.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΕΖ ad ΖΛ. sed ut ΒΓ ad ΓΚ ita ostensa est ΑΓ ad ΓΗ; itemque ut ΕΖ ad ΖΛ ita ΔΖ ad ΖΘ: ut igitur ΑΓ ad ΓΗ ita erit ΔΖ ad ΖΘ. & sunt circa æquales angulos: triangulum igitur ΑΓΗ [per 6. 6.] simile est triangulo ΔΖΘ. & eadem ratione triangulum ΑΗΒ simile est triangulo ΔΘΕ, sicut triangulum ΑΒΓ ipsi ΔΕΖ simile est.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Ἔστω ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΒ τῷ ΔΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.

LEMMA IX.

Sit triangulum quidem ΑΒΓ simile triangulo ΔΕΖ, uti & triangulum ΑΗΒ triangulo ΔΕΘ simile: dico ut rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ita esse rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ.

Ἐπεὶ γὰρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα, ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ Α ὅλῃ τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΖ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Γ

Quoniam enim, propter similitudinem triangulorum, totus angulus Α toti Δ est æqualis; angulus autem ΒΑΗ æqualis est angulo ΕΔΘ: erit igitur reliquus ΗΑΓ reliquo ΘΔΖ æqualis. sed & angulus

angulum B Γ H ad quadratum ex Γ A ita A Z ad Z Δ, hoc est rectangulum A Z Δ sive rectangulum E Z Θ, ad quadratum ex Z Δ.

τετ' ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ Κ Γ Α, ὃ ἐστι τὸ ὑπὸ Β Γ Η, πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτως ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Δ, τετ' ἔστι τὸ ὑπὸ Α Ζ Δ, ὃ ἐστι τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ, πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ.

LEMMA X.

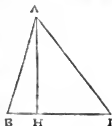
Similiter demonstrabimus, si fuerit ut rectangulum B Γ H ad quadratum ex A Γ ita rectangulum E Z Θ ad quadratum ex Z Δ, & triangulum A B Γ simile triangulo Δ E Z: etiam triangulum A B H triangulo Δ E Θ simile esse.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐὰν ᾖ ὡς τὸ ὑπὸ Β Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ, καὶ ὅμοιον τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ· καὶ τὸ Α Β Η τρίγωνον τῷ Δ Ε Θ τριγώνῳ ὅμοιον εἶναι.

LEMMA XI.

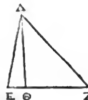
Sint duo triangula similia A B Γ, Δ E Z, & ducantur perpendiculares A H, Δ Θ: dico ut rectangulum B H Γ ad quadratum ex A H ita esse rectangulum E Θ Z ad quadratum ex Δ Θ.



HOC autem ex iis, quæ supra [ad lem. 8] dicta sunt, perspicue constat.

ΛΗΜΜΑ ια'.

Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Α Η, Δ Θ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Β Η Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Α Η οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Θ Ζ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Θ.

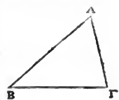


ΤΟΥΤΟ δὲ φανερὸν, ὅτι ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ.

LEMMA XII.

Sit æqualis quidem angulus B angulo E, angulus vero A angulo Δ minor: dico Γ B ad B A minorem rationem habere quam Z E ad E Δ.

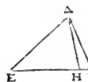
QUoniam enim angulus A minor est angulo Δ, constituatur ipsi A æqualis E Δ H: est igitur [per 4. 6.] ut Γ B ad B A ita H E ad E Δ. sed [per 8. 5.] H E ad E Δ minorem habet rationem quam Z E ad E Δ: ergo & Γ B ad B A minorem rationem habet quam Z E ad E Δ. similiter & omnia alia ejusmodi ostendemus.



ΛΗΜΜΑ ιβ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἐλάσσων δὲ ἡ Α τῆς Δ· ὅτι ἡ Γ Β πρὸς Β Α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Δ.

ΕΠΕΙ γὰρ ἐλάσσων ἡ Α γωνία τῆς Δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ Ε Δ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Β πρὸς Β Α οὕτως ἡ Η Ε πρὸς Ε Δ. ἀλλὰ καὶ ἡ Η Ε πρὸς Ε Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Δ· καὶ ἡ Γ Β ἄρα πρὸς Β Α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ Ζ Ε πρὸς τὴν Ε Δ. καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ δείξομεν.



LEM-

CONICORUM

LIBER SECUNDUS,

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Apollonius Eudemo S. P.

SI vales bene eſt, ego quidem ſatis commode habeo. *Apollonio* filio meo dedi, ut ad te perferret, ſecundum librum Conicorum à nobis conſcriptorum: quem tu diligenter percurre, & communica cum illis, qui eo tibi digni videbuntur. *Philonidæ* etiam Geometræ, quo cum tibi *Epheſi* amicitiam conciliavi, ſi quando in iſthæc *Pergami* loca venerit, legendum trade: tu cura ut valeas. Vale.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ ὑγιαίνεις ἔχοι ἂν καλῶς, καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω. Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντα τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. Δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς, καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου, καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβάλλῃ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μετάδος αὐτῷ· καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ ἵνα ὑγιαίνῃς. εὐτύχει.

Prop. I. *Theor.*

Si hyperbolam recta linea ad verticem contingat, & ab ipſo, ex utraque parte diametri, ponatur recta æqualis ei quæ poteſt quartam figuræ partem: rectæ quæ à ſectionis centro ad ſumptos terminos contingentis ducuntur cum ſectione non convenient.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους· αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

ΕΣΤΩ

... ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΙ ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.

ΓΔ cum sectione non conveniet. similiter demonstrabitur neque ipsam ΓΕ convenire cum sectione: sunt igitur ΓΔ, ΓΕ ASYMPTOTI, hoc est, *cum sectione non convenientes.*

EUTOCIUS.

Ἀρχόμενος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, τοσοῦτον οἶμαι δεῖν προειπεῖν, ὅτι τοσαῦτα μόνα εἰς αὐτὸ γράφω, ὅσα ἂν ἦν δυνατὸν διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ νοηθῆναι. Τὸ πρῶτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, εἰ γὰρ μή, τοῦτο ἐν τῇ καταγραφῇ διαφορὰν οὐ ποιεῖ· αἱ γὰρ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἐν τῇ τομῇ, καὶ αὐταὶ διαμένουσι κατὰ πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην.

Explicaturus secundum librum Conicorum, amicissime *Anthemi*, illud praemittere oportere existimo, me ea tantummodo in ipsum conscribere, quae ex primo libro intelligi possunt. Primum theorema casum non habet; nam diversitas schematum nullam hic facit diversitatem: rectae enim ΔΓ, ΓΕ sectionis asymptoti cum sint, eaedem manent in omni diametro & contingente.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β′.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ· τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ τὸ

PROP. II. *Theor.*

Iisdem manentibus, demonstrandum est non esse aliam asymptoton, quae angulum ΔΓΕ dividat.

Si enim fieri potest, sit ΓΘ; & per Β ipsi ΓΔ parallela ducatur ΒΘ, quae cum ΓΘ in Θ puncto conveniat; ipsi vero ΒΘ ponatur aequalis ΔΗ; & juncta ΗΘ ad Κ, Λ, Μ producatur.

Quoniam igitur ΒΘ, ΔΗ aequales sunt & parallelae; & ipsae ΔΒ, ΗΘ [per 33.1.] aequales & parallelae erunt. & quoniam ΑΒ bifariam secatur in Γ, & ipsi adjungitur quaedam ΒΛ: ergo [per 6.2.] rectangulum ΑΛΒ una cum quadrato ex ΓΒ aequale est quadrato ex ΓΛ. similiter quoniam ΗΜ ipsi ΔΕ est parallela, atque est ΔΒ aequalis ΒΕ; & ΗΛ ipsi ΛΜ aequalis erit. & quoniam ΗΘ aequalis est ΔΒ; erit ΗΚ ipsa ΔΒ major. est vero & ΚΜ major ipsa ΒΕ, quia & ipsa

Hoc theorema casum non habet, siquidem ΒΘ sectionem omnino in duobus punctis secat. quoniam enim parallela est ipsi ΓΔ, cum ipsa ΓΘ conveniet; ideoque prius cum sectione conveniet.

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἡ μέντοι ΒΘ πάντως τεμεῖ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, συμπεσεῖται τῇ ΘΓ· ὥστε πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

Prop. III. *Theor.*

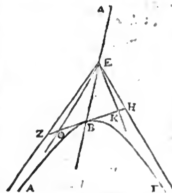
Si hyperbolam contingat recta linea: cum utraque asymptotôn conveniet, & ad tactum bifariam secabitur; quadratum vero utriusque ejus portionis æquale erit quartæ parti figuræ ad diametrum per tactum ductam constitutæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

SIT hyperbola ΑΒΓ, cujus centrum Ε, & asymptoti sint ΖΕ, ΕΗ, quædam vero recta ΘΚ sectionem contingat in puncto Β: dico ΘΚ productam cum ΖΕ, ΕΗ convenire.

Si enim fieri potest, non conveniat, & juncta ΕΒ producatur, sitque ipsi ΒΕ æqualis ΕΔ: diameter igitur [per 47. 1.huj.] est ΒΔ. ponatur vero quartæ parti figuræ, quæ est ad ΒΔ, æquale quadratum utriusque ipsarum ΘΒ, ΒΚ, & jungantur ΘΕ, ΕΚ: ergo [per 1. 2. huj.] ΘΕ, ΕΚ asymptoti sunt, quod [per 2. 2. huj.] fieri nequit: positum est enim asymptotos esse ΖΕ, ΕΗ: igitur ΘΚ producta cum ipsis ΖΕ, ΕΗ conveniet, puta in punctis Ζ, Η.



ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ συμπεσεῖται ταῖς ΖΕ, ΕΗ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΔ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΚ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσίν, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ ΖΕ, ΕΗ ἀσύμπτωτοι· ἡ ἄρα ΚΘ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ΕΖ, ΕΗ ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Η.

Λέγω

ΔΕ, Η· καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η.



ducta ΑΔ, circa ipsam per Δ hyperbola describatur [per 53. 1. huj.] ita ut applicatæ ad diametrum possint rectangula adjacentia rectæ Η, excedentiaque figurâ sub ipsis ΔΕ, Η contentâ simili.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καὶ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἴδους· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.

Quoniam igitur parallela est ΔΖ ipsi ΒΑ, & ΓΖ æqualis ΖΑ; erit [per 2. 6.] ΓΔ ipsi ΔΒ æqualis: ergo [per 2. 2.] quadratum ex ΓΒ quadruplum est quadrati ex ΓΔ. atque est [per constr.] quadratum ex ΓΒ æquale rectangulo sub ΔΕ,Η: utrumque igitur quadratorum ex ΓΔ, ΔΒ quarta pars est figuræ quæ sub ΔΕ, Η continetur: quare [per 1. 2.huj.] ΑΒ, ΑΓ descriptæ hyperbolæ asymptoti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα τέμνῃ δίχα· ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ· ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ, ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.

Prop. V. *Theor.*

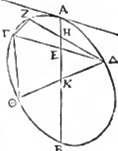
Si parabolæ vel hyperbolæ diameter rectam quandam bifariam secet; quæ ad terminum diametri contingit sectionem parallela est rectæ bifariam sectæ.

SIT parabola vel hyperbola ΑΒΓ, cujus diameter ΔΒΕ, & ΖΒΗ sectionem contingat; ducatur autem quædam ΑΕΓ in sectione, faciens ΑΕ æqualem ipsi ΕΓ: dico ΑΓ parallelam esse ipsi ΖΗ.

* Vide Lemma II. *Pappi* in Librum quintum.

quæ ad terminum diametri sectionem contingit parallela erit rectæ bifariam sectæ.

SIT ellipsis vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, & A B ipsam Γ Δ non transeuntem per centrum bifariam secet in E: dico rectam, quæ sectionem contingit ad A, ipsi Δ Γ parallelam esse.



Nam, si fieri potest, sit recta Δ Z sectionem contingenti in puncto A parallela: æqualis igitur est [per 47. 1. huj.] Δ H ipsi Z H. est autem [ex hyp.] & Δ E æqualis E Γ: ergo [per 2. 6.] Γ Z ipsi H E est parallela, quod est absurdum. etenim sive H fuerit centrum sectionis A B; linea Γ Z [per 23. 1. huj.] cum diametro A B occurret: sive non sit, ponatur centrum K, junctaque Δ K producatur ad Θ, & jungatur Γ Θ. quoniam igitur Δ K æqualis est K Θ, & Δ E ipsi E Γ; erit [per 2. 6.] Γ Θ parallela ipsi A B. sed & Γ Z [ex hyp.] eidem est parallela, quod est absurdum: ergo quæ ad A sectionem contingit ipsi Γ Δ est parallela.

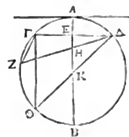
Prop. VII. *Theor.*

Si coni sectionem vel circuli circumferentiam recta linea contingat, & huic parallela ducatur in sectione, & bifariam dividatur: quæ tactum & punctum bisectionis recta connectit sectionis diameter erit.

SIT coni sectio vel circuli circumferentia A B Γ, quam contingat Z H, & ipsi Z H paral-

ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ ἡ A B τὴν Γ Δ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ E· λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ Δ Γ.



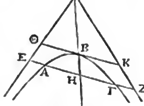
Εἰ γὰρ μή, ἔστω τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ Δ Z· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H τῇ Z H. ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ E τῇ E Γ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Z τῇ H E, ὅπερ ἄτοπον· εἴ τε γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς A B τομῆς, ἡ Γ Z συμπεσεῖται τῇ A B· εἴ τε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ K, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Δ K ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Δ K τῇ K Θ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ E τῇ E Γ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Θ τῇ A B. ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ Z τῇ αὐτῇ A B παράλληλος, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ, καὶ δίχα τμηθῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ A B Γ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ Z H, καὶ τῇ Z H παράλληλος

μετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ. καὶ ἐστιν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ.



igitur [per cor. 51. 1. huj.] diameter est sectionis: quare [per 5. 2. huj.] recta ad B contingens ipsi ΑΓ est parallela. sit autem contingens ΘΒΚ, quæ [per 3. 2. huj.] conveniet cum ipsis ΕΔ, ΔΖ. quoniam igitur ΑΓ est parallela ipsi ΚΘ, & ΚΘ convenit cum ΔΚ, ΔΘ; etiam ΑΓ cum ΔΕ, ΔΖ conveniet. conveniat autem in punctis Ε, Ζ; ac ob ΘΒ ipsi ΒΚ æqualem, erit [ex 4. 6. & 15. 5.] ΖΗ ipsi ΗΕ, & propterea ΓΖ ipsi ΑΕ æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

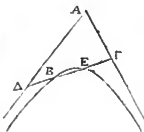
Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς· καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

ΕΥΘΕΙΑ γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑ, ΑΔ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον ἅπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.

PROP. IX. *Theor.*

Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto cum sectione convenit.



RECTA enim ΓΔ occurrens asymptotis ΓΑ, ΑΔ secetur ab hyperbola bifariam in puncto Ε: dico rectam ΓΔ in alio puncto sectioni non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in Β: ergo [per 8. 2. huj.] ΓΒ æqualis est ipsi ΒΔ, quod est absurdum; posuimus enim ΓΒ ipsi ΕΔ æqualem esse: igitur ΓΔ in alio puncto sectioni non occurrit.

PROP.

figuræ, latus: dico rectangulum Δ A Z æquale esse quartæ parti figuræ quæ sub Θ B, B M continetur, & similiter eidem esse æquale rectangulum Δ Γ Z.

Ducatur enim K B Λ per B sectionem contingens, quæ [per 5. 2. huj.] parallela erit ipsi Δ Z. jam quoniam demonstratum est [ad 1. 2. huj.] ut Θ B ad B M ita esse quadratum ex E B ad quadratum ex B K, hoc est [per 4. & 22. 6.] quadratum ex E H ad quadratum ex H Δ; atque etiam ut Θ B ad B M ita [ex const. & 1. 6.] rectangulum Θ H B ad quadratum ex A H: erit igitur ut totum quadratum ex E H ad totum quadratum ex H Δ, ita ablatum rectangulum Θ H B ad ablatum quadratum ex A H: adeoque [per 5. 2] reliquum quadratum ex E B ad reliquum rectangulum Δ A Z est ut quadratum ex E H ad quadratum ex H Δ, hoc est ut quadratum ex E B ad quadratum ex B K. æquale igitur est [per 9. 5.] rectangulum Z A Δ quadrato ex B K. similiter demonstrabitur & rectangulum Δ Γ Z quadrato ex B Λ æquale. quadratum autem ex K B [per 3. 2. huj.] æquale est quadrato ex B Λ: ergo & Z A Δ rectangulum rectangulo Z Γ Δ æquale erit.

λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Δ A Z ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν Θ B M, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ Z.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ K Λ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ Δ Z. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ Θ B πρὸς B M οὕτως τὸ ἀπὸ E B πρὸς τὸ ἀπὸ B K, τουτέστι τὸ ἀπὸ E H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ· ὡς δὲ ἡ Θ B πρὸς B M οὕτως τὸ ὑπὸ Θ H B πρὸς τὸ ἀπὸ H A· ἔστιν οὖν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ E H πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Θ H B πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ A H· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ E B πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ Δ A Z ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ E H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ E B πρὸς τὸ ἀπὸ B K· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Z A Δ τῷ ἀπὸ B K. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ Δ Γ Z τῷ ἀπὸ B Λ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ K B τῷ ἀπὸ B Λ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Z A Δ τῷ ὑπὸ Z Γ Δ.

Prop. XI. *Theor.*

Si utramque rectarum continentium angulum qui deinceps est angulo hyperbolam continenti secet recta linea: in uno tantum puncto cum sectione conveniet; & rectangulum contentum sub interjectis inter rectas angulum continentes & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro quæ rectæ secanti parallela est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς, ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

SIT hyperbola cujus asymptoti Γ A, A Δ; & producta Δ A ad E, per aliquod punctum E

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ A, A Δ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ Δ A ἐπὶ τὸ E, καὶ διά τινος σημείου

δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.

ΚΗΘ ad quadratum ex ΓΒ ita rectangulum ΕΗΖ ad quadratum ex ΑΒ. sed [per 10.2.huj.] rectangulum ΚΗΘ æquatur quadrato ex ΓΒ: ergo & ΕΗΖ rectangulum quadrato ex ΑΒ æquale erit.

EUTOCIUS.

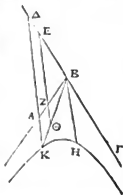
Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἄλλως δείκνυται.

* Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΒΔ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχε, τέμνουσα τὰς ΒΔ, ΒΑ· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν μὴ συμπιπτέτω, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ ΒΗ ἴσον παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιείτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ, ὥστε καὶ τῷ ὑπὸ ΕΘΖ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ΕΖ συμπίπτει τῇ τομῇ, ἐπείπερ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΑΔ. Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΒΗ διαμέτρῳ.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonstratur.

Sit hyperbola, cujus asymptoti ΑΒ, ΒΓ, producaturque ΓΒΔ in directum, & ducatur ΕΖ, utcunque, secans ΒΔ, ΒΑ: dico ΕΖ cum sectione convenire.



Si enim fieri potest, non conveniat, & per Β ipsi ΕΖ parallela ducatur ΒΗ: ergo ΒΗ est diameter sectionis. applicetur [per 29. 6.] ad ΕΖ parallelogrammum quadrato ex ΒΗ æquale excedens figurâ quadratâ; quod sit ΕΘΖ: & juncta ΘΒ producatur. occurret igitur [per 2. 2. huj.] cum sectione. occurrat in Κ, & per Κ ducatur ΚΑΔ parallela ipsi ΒΗ: ergo [per 11. 2. huj.] rectangulum ΔΚΑ quadrato ex ΒΗ est æquale; ideoque æquale rectangulo ΕΘΖ, quod est absurdum. quare cum ΑΔ convenit cum sectione, manifestum est & ΕΖ eidem convenire, idque in uno tantum puncto; diametro enim ΒΗ est parallela.

* Hæc demonstratio vix satis integra videtur, ac tuto omitti poterat: nam, ex 26ta libri primi, res satis manifesta est.

rectangulo ΑΗΓ; erit [per 16. 6.] ut ΑΗ ad ΑΔ ita ΔΓ ad ΓΗ. sed [per 4. 6.] ut ΑΗ ad ΑΔ ita ΗΘ ad ΕΔ, & ut ΔΓ ad ΓΗ ita ΔΖ ad ΗΚ; quare [per 11.5.] ut ΘΗ ad ΔΕ ita ΔΖ ad ΗΚ: rectangulum igitur ΕΔΖ [per 16.6.] rectangulo ΘΗΚ est æquale.

τῷ ὑπὸ ΑΗΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus invenitur hoc Theorema demonstratum, ope duarum rectarum contingenti parallelarum, quarum altera per Δ, altera vero per Η ducitur, demonstratione juxta rationes Syntheticas ostensâ. elegimus autem hunc quem damus probandi modum, utpote eadem simplicius monstrantem. Casus autem habet sex, ductis enim sex rectis, vel punctum Θ erit inter Ε, Β; vel in puncto Β, vel extra Β; qui tres sunt casus: pariterque tres sunt alii, juxta situm puncti Ζ.

Εὑρέθη ἔν τισιν ἀντιγράφοις τοῦτο τὸ θεώρημα δεικνύμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων τῇ ἐφαπτομένῃ, μιᾶς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἑτέρας δὲ διὰ τοῦ Η· καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ συνθετικοῦ λόγου. ἐπιλεξάμεθα δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ὡς τὰ αὐτὰ δεικνῦσαν ἁπλούστερον. ἔχει δὲ καὶ πτώσεις ἕξ· τῶν γὰρ ἓξ εὐθειῶν ἀχθεισῶν, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν Ε, Β, ἢ ἐπὶ τοῦ Β, ἢ ἔξω τοῦ Β, ὥστε γίνονται τρεῖς· καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Ζ ἄλλαι τρεῖς.

Prop. XIII. *Theor.*

Si in loco ab asymptotis & sectione terminato quævis recta linea ducatur alteri asymptotôn parallela: in uno puncto tantum cum sectione conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον.

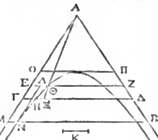
SIT hyperbola, cujus asymptoti ΓΑ, ΑΒ, sumaturque aliquod punctum Ε, & per Ε ipsi ΑΒ parallela ducatur ΕΖ: dico ΕΖ cum sectione convenire.

Si enim fieri potest, non conveniat, & sumatur punctum quodvis in sectione, per quod ipsis ΓΑ, ΑΒ parallelæ ducantur ΗΘ, ΗΓ; & rectangulo ΓΗΘ æquale sit rectangulum ΑΕΖ; junctaque ΑΖ producatur: hæc igitur cum sectione [per 2.2. huj.] conveniet. conveniat autem in

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι᾽ αὐτοῦ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ συμπιπτέτω. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΓ· καὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ

Ἤχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ τῇ ΟΠ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ. μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΓΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν. εἰλήφθω δὴ τοῦ Κ διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΝ· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝΒ· ἡ ἄρα ΜΝ ἴση ἔσται τῇ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς Κ.



Ducatur enim tangenti ΟΠ parallelæ ΕΘΖ, ΓΗΔ; jungaturque ΑΘ, & ad Ξ producatur: quoniam ergo [per 10. 2. huj.] rectangulum ΓΗΔ rectangulo ΖΘΕ est æquale; erit [per 16. 6.] ut ΔΗ ad ΖΘ ita ΘΕ ad ΓΗ. sed ΔΗ major est ipsâ ΖΘ: ergo & ΕΘ ipsa ΓΗ est major. similiter demonstrabimus eas, quæ deinceps sequuntur, minores esse. itaque sumatur [per 3. 1.] intervallum ΕΛ minus intervallo Κ, & per Λ ipsi ΑΓ parallela ducatur ΛΝ. ergo [per 13. 2. huj.] ΛΝ cum sectione conveniet. conveniat in Ν, perque Ν ducatur ΜΝΒ parallela ipsi ΕΖ: quare [per 34.1.] ΜΝ erit æqualis ΕΛ; & propterea intervallo Κ minor erit.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ γωνίας τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est rectas ΑΒ, ΑΓ ad sectionem accedere propius quam aliæ quævis asymptoti: & [ex 2. 2. huj.] angulum ΒΑΓ minorem esse quolibet angulo, qui aliis rectis sectioni non occurrentibus continetur.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἄλλως δεικνύμενον· ὅτι,

In aliquibus exemplaribus illud aliter demonstratum invenitur: scilicet,

Παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομή.

Asymptotos & sectionem pervenire ad intervallum minus quolibet intervallo dato.

Iisdem

aliquas habent, ſed tantum figurarum differentias. verum ut iis qui in hæc inciderint ſententiam noſtram approbemus, exponantur hoc loco ea quæ nos ut ſupervacanea ſuſtulimus

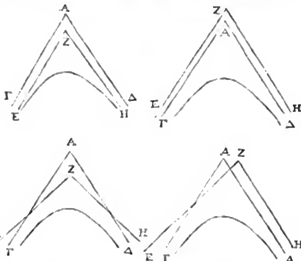
φων. ἵνα δὲ τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν ἡμετέραν γνώμην ἁπλῶς ποιήσωμεν, ἐκκείσθω ἐνταῦθα τὰ ὡς περιττὰ ἀφῃρημένα.

Aſymptoti, de quibus dictum eſt, propius accedunt ad ſectionem quam aliæ, ſi quæ ſint, aſymptoti.

Sit hyperbola, cujus aſymptoti Γ A, A Δ: dico Γ A, A Δ ad ſectionem propius accedere quam aliæ aſymptoti, ſi quæ ſint. namque, ut in prima figura, ipſas E Z, Z H aſymptotos eſſe non poſſe manifeſte conſtat, ob E Z parallelam ipſi Γ A, & Z H ipſi A Δ; demonſtratum ſiquidem eſt [per 13.2.huj.] rectas, quæ in loco ab aſymptotis & ſectione terminato ducuntur alteri aſymptoto parallelæ, cum ſectione convenire. ſi vero, ut in ſecunda figura apparet, E Z, Z H ſint aſymptoti,

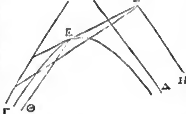
Εἴ τινές εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἕτεραι τῶν προειρημένων, ἔγγιόν εἰσιν αἱ προειρημέναι τῇ τομῇ.

Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ Α, Α Δ· λέγω ὅτι εἴ τινές εἰσιν ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ, ἐκείνων ἔγγιόν εἰσιν αἱ Γ Α, Α Δ. ὅτι μὲν οὖν, ὡς ἐπὶ τῆς



πρώτης καταγραφῆς, οὐ δύνανται αἱ Ε Ζ, Ζ Η ἀσύμπτωτοι εἶναι, φανερόν· ὥστε εἶναι παράλληλον τὴν μὲν Ε Ζ τῇ Γ Α, τὴν δὲ Ζ Η τῇ Α Δ· δέδεικται γὰρ ὅτι συμπεσοῦνται τῇ τομῇ· ἐν γὰρ τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς εἰσιν. εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεως, εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ Ε Ζ, Ζ Η παράλληλοι

συμπεσεῖται) τῇ τομῇ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἁφῆς παράλληλος τῇ Γ Α ἀσυμπτώτῳ ἡ Ε Θ· ἡ Ε Θ ἄρα κατὰ μόνον τὸ Ε συμπίπτει τῇ τομῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ Γ Α τῇ Ε Θ παράλληλός ἐστι, καὶ τῇ Α Γ συμπίπτει ἡ Ζ Η· καὶ τῇ Ε Θ ἄρα συμπεσεῖται, ὥστε καὶ τῇ τομῇ.



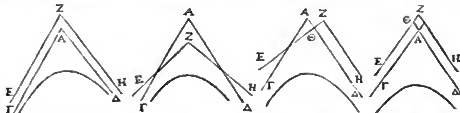
nire cum sectione. ducatur enim per tactum E ipsi Γ A asymptoto parallela E Θ: ergo [per 13. 2. huj.] E Θ sectioni in unico puncto E occurrit. itaque quoniam Γ A ipsi E Θ est parallela, & Z H convenit cum A Γ, etiam cum E Θ conveniat necesse est; quare & cum ipsa sectione.

Εἴ τις ἐστὶν εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολὴν ἑτέρα [τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, ὅτι οὐκ ἔστιν ἐλάσσων αὐτῆς.]

Si sit alius angulus rectilineus qui hyperbolam contineat, diversus ab angulo sub asymptotis contento, non minor erit eo.

Ἔστω ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ Α, Α Δ, ἕτεραι δέ τινες μὴ συμπίπτουσαι τῇ τομῇ ἔστωσαν αἱ Ε Ζ, Ζ Η· λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς πρὸς τῷ Α. ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ Ε Ζ, Ζ Η τῶν Γ Α, Α Δ παράλληλοι· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς

Sit hyperbola, cujus asymptoti Γ A, A Δ; aliæ vero non occurrentes ei sint E Z, Z H: dico angulum ad Z non minorem esse angulo ad A. sint enim primum E Z, Z H ipsis Γ A, A Δ parallelæ: ergo angulus ad Z non est minor eo



quadratum æquale sit quartæ parti figuræ quæ ad diametrum A B constituitur: ergo [per 14. 1. huj.] Δ A, A E; Z B, B H inter se sunt æquales. jungantur Γ Δ, Γ E, Γ Z, Γ H. perspicuum igitur est [per 14. 1.] Δ Γ, Γ H in eadem esse recta; itemque E Γ, Γ Z; propterea quod parallelæ sunt Δ A E, Z B H. quoniam igitur [ex hyp.] hyperbola est cujus diameter A B, contingens autem Δ E; & utraque ipsarum Δ A, A E potest quartam partem figuræ quæ ad A B constituitur; erunt [per 1. 2. huj.] Δ Γ, Γ E asymptoti: & eadem ratione ipsius B sectionis asymptoti erunt Z Γ, Γ H. oppositarum igitur sectionum asymptoti communes sunt.

τοῦ A B εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ Δ A, A E, Z B, B H. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ Γ Δ, Γ E, Γ Z, Γ H· φανερὸν δὴ ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ Δ Γ τῇ Γ H, καὶ ἡ Γ E τῇ E Z, διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ A B, ἐφαπτομένη δὲ ἡ Δ E, καὶ ἑκατέρα τῶν Δ A, A E δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν A B εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ Δ Γ, Γ E· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῆς B ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ Z Γ, Γ H. τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

PROP. XVI. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus quævis recta linea ducatur secans utramque rectarum continentium angulum qui deinceps est angulo sectiones continenti: cum utraque oppositarum in uno tantum puncto conveniet; & rectæ, quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

SINT oppositæ sectiones A, B, quarum quidem centrum Γ, asymptoti vero Δ Γ H, E Γ Z; & ducatur quævis recta Θ K, quæ utramque Δ Γ, Γ Z secet: dico Θ K productam cum utraque sectione in uno tantum puncto convenire.

Quoniam enim sectionis A asymptoti sunt Δ Γ, Γ E; & ducta est quædam Θ K secans utramque continentium angulum Δ Γ Z, qui deinceps est angulo sectionem continenti: producta

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

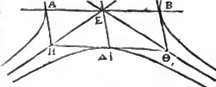
Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώταις ἴσαι ἔσονται.

ΕΣΤΩΣΑΝ γὰρ ἀντικείμεναι αἱ A, B, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι αἱ Δ Γ H, E Γ Z, καὶ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν Δ Γ, Γ Z ἡ Θ K· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ' ἓν σημεῖον μόνον.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς A τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ Δ Γ, Γ E, καὶ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ Θ K τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ Δ Γ Z· ἡ

ΚΘ

τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ· ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ, ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.



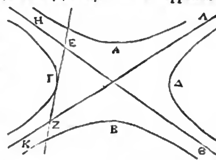
quæ ad punctum E bifariam secabuntur. & quoniam * figura, quæ ad diametrum AB constituitur, æqualis est quadrato ex ΓΔ, & est ΓE æqualis EΔ: unumquodque quadratorum ex ZA, AH; KB, BΘ erit [per 4.2.] quarta pars figuræ quæ constituitur ad AB: ergo [per 1.2. huj.] ZEΘ, KEH sectionum A, B asymptoti sunt. similiter demonstrabimus sectionum Γ, Δ easdem esse asymptotos. oppositarum igitur sectionum, quas conjugatas dicimus, asymptoti communes sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si uni oppositarum sectionum conjugatarum conveniat recta linea, quæ producta ad utrasque partes extra sectionem cadat: cum utraque sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantum puncto conveniet.



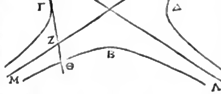
Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω

Sint oppositæ sectiones, quæ conjugatæ dicuntur A, B, Γ, Δ; & ipsi Γ occurrat recta quævis EZ, quæ producta ad utrasque partes extra sectionem cadat: dico

* Ex def. sect. conjugat. ad prop. ult. lib. 1.

EZ

dem conveniet cum sectionibus A, B [ex praec.] patet. conveniat in punctis H, Θ: dico Γ H ipsi Γ Θ esse æqualem. ducantur enim sectionum asymptoti K Λ, M N: æquales igitur sunt [per 17. 2. huj.] E H, Z Θ, itemque [per 3. 2. huj.] Γ E, Γ Z: ergo tota Γ H toti Γ Θ æqualis erit.



ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Γ Η τῇ Γ Θ. ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ Κ Λ, Μ Ν· ἴση ἄρα ἡ Ε Η τῇ Ζ Θ, καὶ ἡ Γ Ε τῇ Γ Ζ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ Γ Η ὅλῃ τῇ Γ Θ ἐστὶν ἴση.

Prop. XX. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum, quæ conjugatæ appellantur, recta linea contingat, & per ipsarum centrum ducantur duæ rectæ, una quidem per tactum, altera vero contingenti parallela, quousque occurrat uni earum sectionum quæ deinceps sunt: quæ in occursu earum sectionem contingit, parallela erit rectæ per priorem tactum & centrum ductæ; quæ vero per tactus & centrum ducuntur oppositarum sectionum conjugatæ diametri erunt.

Sint oppositæ sectiones, quæ conjugatæ appellantur, quarum diametri conjugatæ sint A B, Γ Δ, ac centrum X; & sectionem A contingat recta E Z, quæ producta conveniat cum Γ Δ in T, & juncta recta E X ad Ξ producatur; & per X ducatur ipsi E Z parallela recta X H quæ producatur ad O, & in H contingat sectionem recta Θ H: dico quod contingens Θ H diametro X E parallela est, quodque rectæ H O, B Ξ conjugatæ diametri sunt.

Applicentur enim ordinatim E K, H Λ, Γ P Π; illæ vero juxta quas possunt applicatæ, sint A M, Γ N, quoniam igitur ut B A ad A M ita est

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ΄.

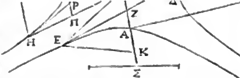
Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν· ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ· αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ Α Β, Γ Δ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ τῆς Α τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ Ε Ζ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ Γ Δ κατὰ Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Χ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ Ε Ζ παράλληλος ἤχθω ἡ Χ Η καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο, καὶ διὰ τοῦ Η ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ Θ Η· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Θ Η τῇ Ε Χ, αἱ δὲ Η Ο, Ε Ξ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ Ε Κ, Η Λ, Γ Ρ Π· παρ' ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἔστωσαν αἱ Α Μ, Γ Ν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Β Α πρὸς Α Μ οὕτως ἡ

Ν Γ

ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ.



Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΠΗ πρὸς τὴν ΗΡ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἀγάγωμέν τινα, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τὸ Χ, ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ) διὰ δὴ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ οὕτω τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ· ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ οὕτως τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΗΘΧ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΕΧΖ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ

erit igitur [per 51. 1. huj.] Σ dimidia ejus juxta quam possunt quæ ad diametrum HO applicantur in sectionibus Γ, Δ. & quoniam sectionum A, B secunda diameter est ΓΔ, & cum ea convenit ipsa ET: rectangulum igitur sub TX & KE æquale erit [per 38. 1. huj.] quadrato ex ΓX: (si enim à puncto E ipsi KX parallelam duxerimus: rectangulum, quod fit sub TX & recta quæ inter X & parallelam interjicitur, quadrato ex ΓX æquale erit) quare [per 17. & 20. 6.] ut TX ad EK ita quadratum ex TX ad quadratum ex XΓ. ut autem TX ad EK ita [per 4. 6.] TZ ad ZE, hoc est [per 1. 6.] triangulum TXZ ad triangulum EZX; & ut quadratum TX ad quadratum XΓ ita [per 19. & 20. 6.] triangulum TXZ ad triangulum XΓΠ, hoc est [per 43. 1. huj.] ad triangulum HΘX: ut igitur triangulum TXZ ad triangulum EZX ita TXZ triangulum ad triangulum HΘX; & ideo [per 9. 5.] triangulum HΘX æquale est triangulo EXZ. habet autem & angulum ΘHX angulo XEZ [per 29. 1.] æqualem, quia EX parallela est ipsi HΘ, & EZ ipsi HX; ergo [per 15. 6.] latera circa æquales angulos sunt reciproce proportionalia; est igitur ut HΘ ad EX ita EZ ad HX: rectangulum igitur ΘHX [per 16. 6.] æquale est rectangulo XEZ. & quoniam est ut Σ ad ΘH ita

* Nam ΝΓ : ΒΑ :: ΒΑ : ΓΔ. & ΒΑ : ΓΔ :: ΓΔ : ΑΜ.

quarta pars est quadrati ex ΕΞ, nam [per 38. 2. huj.] ΕΧ æqualis est ΧΞ: ergo quadratum ex ΕΞ æquale est figuræ ad ΗΟ constitutæ. similiter demonstrabimus & quadratum ex ΗΟ figuræ factæ ad ΕΞ esse æquale: ΕΞ, ΗΟ igitur sectionum oppositarum Α, Β, Γ, Δ diametri conjugatæ sunt.

ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἴδει· ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ΗΟ δύναται τὸ πρὸς τῇ ΕΞ εἶδος· αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων.

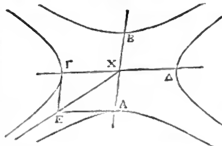
Prop. XXI. *Theor.*

Iisdem positis, ostendendum est punctum in quo contingentes rectæ conveniunt, ad unam asymptotón esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ, & earum diametri ΑΒ, ΓΔ: ducanturque contingentes ΑΕ, ΕΓ: dico punctum Ε ad asymptoton esse.



Est enim [ex def. sect. conjug.] quadratum ex ΓΧ æquale quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ constituitur; quadrato autem ex ΓΧ æquale est [per 33. 1.] quadratum ex ΑΕ: ergo quadratum ex ΑΕ quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. jungatur ΕΧ: asymptotos igitur [per 1. 2. huj.] est ΕΧ: punctum igitur Ε ad ipsam asymptoton est.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ τομαὶ, ὧν αἱ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ· λέγω ὅτι τὸ Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ· καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ· τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Prop. XXII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ad quamvis sectionum ducatur recta linea;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν,

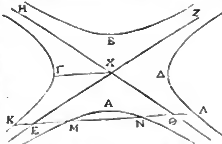
ὴ

ex Γ X æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγʹ.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖά τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων, τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

Ἐστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσβεβλήσθω εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.



Ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. * τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ, διὰ τὸ

Prop. XXIII. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ducatur quævis recta linea ad quamvis sectionum; & huic parallela ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus conveniat: rectangulum contentum sub segmentis ductæ inter tres sectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus quæ ex centro.

Sint oppositæ sectiones, quæ conjugatæ appellantur, Α, Β, Γ, Δ, quarum centrum sit Χ, & à puncto Χ ad quamvis sectionem ducatur recta quævis Γ Χ, atque huic parallela sit Κ Λ, quæ cum tribus deinceps sectionibus conveniat: dico rectangulum Κ Μ Λ quadrati ex Γ Χ duplum esse.

Ducantur asymptoti sectionum Ε Ζ, Η Θ: ergo [per 11.& 22.2.huj.] quadratum ex Γ Χ æquale est utrilibet rectangulorum Θ Μ Ε, Θ Κ Ε. * rectangulum autem Θ Μ Ε una cum rectangulo Θ Κ Ε æquale est rectangulo Λ Μ Κ; propter

propter

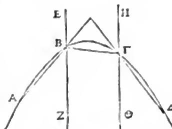
Σ, & in partes inæquales in E; erit quidem [per 5. 2.] rectangulum ΛΕΚ una cum quadrato ex ΣΕ æquale quadrato ex ΚΣ. quadratum autem ex ΣΕ rectangulo ΘΜΕ una cum quadrato ex ΣΜ est æquale: ergo quadratum ex ΣΚ æquale est rectangulo ΛΕΚ, hoc est ΘΚΕ, & rectangulo ΘΜΕ una cum quadrato ex ΣΜ. eadem ratione erit quadratum ex ΣΚ æquale rectangulo ΛΜΚ & quadrato ex ΣΜ: adeoque rectangulum ΘΚΕ una cum rectangulo ΘΜΕ & quadrato ex ΣΜ æquale est rectangulo ΛΜΚ & quadrato ex ΣΜ. commune auferatur quadratum ex ΣΜ: reliquum igitur rectangulum ΘΚΕ una cum rectangulo ΘΜΕ est æquale rectangulo ΛΜΚ.

ἴσα κατὰ τὸ Σ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ὑπὸ ΛΕΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΣ. τὸ δὲ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΛΕΚ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΚΕ, καὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. διὰ ταῦτα δὲ τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΣΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΣΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus occursibus alterius contineatur: convenient inter sese extra sectionem.

SIT parabola ΑΒΓΔ, cui duæ rectæ ΑΒ, ΓΔ occurrant, ita ut nullius ipsarum occursus alterius occursibus contineatur: dico eas productas inter se convenire.



Ducantur per Β, Γ diametri sectionis ΕΒΖ, ΗΓΘ: parallelæ igitur sunt [per cor. 46. 1. huj.] & [per 26. 1. huj.] utraque sectionem in uno tantum puncto secat. jungatur ΒΓ: anguli igitur ΕΒΓ, ΗΓΒ [per 29. 1.] duobus rectis sunt æquales. verum ΒΑ, ΔΓ productæ angulos duobus rectis minores efficiunt: ergo inter sese extra sectionem convenient.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται· συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ τομῇ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιεχέσθω· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσί, καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ δὲ ΒΑ, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν· συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

* Est Lemma *Pappi* quartum

EU-

ζεύχθω ἡ Ζ Θ. καὶ ἐπεὶ αἱ Ε Ζ, Η Θ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς Α Ζ Θ, Α Θ Ζ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· αἱ Ε Ζ, Η Θ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ Β Α Γ γωνίας. ὁμοίως δὴ δείξομεν κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῆς τομῆς αἱ Ε Ζ, Η Θ.

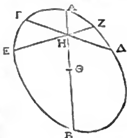


Et quoniam E Z, H Θ productæ secant angulos A Z Θ, A Θ Z, & [per 17. 1.] sunt dicti anguli duobus rectis minores; rectæ E Z, H Θ convenient inter se extra sectionem quidem, sed tamen intra angulum B A Γ. similiter demonstrabimus, si E Z, H Θ fuerint contingentes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ, δύο εὐθεῖαι, αἱ Γ Δ, Ε Ζ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Η Θ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.

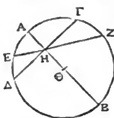


Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ Α Β, τὴν Ε Ζ δίχα τέμνουσα· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ Ε Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῇ Γ Δ. ὥστε καὶ ἡ Ε Ζ παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ Γ Δ, Ε Ζ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Prop. XXVI. *Theor.*

Si in ellipsi vel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non transeuntes per centrum se invicem secent; bifariam sese non secabunt.

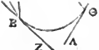
Si enim fieri potest, in ellipsi vel circuli circumferentia, duæ rectæ Γ Δ, E Z non transeuntes per centrum sese bifariam secent in H; sitque Θ centrum sectionis, & juncta H Θ ad A, B puncta producatur.



Quoniam igitur A B diameter est, ipsam E Z bifariam secans; quæ ad A sectionem contingit [per 6. 2.huj.] parallela erit ipsi E Z. similiter demonstrabimus eandem etiam ipsi Γ Δ esse parallelam: ergo [per 30. 1.] E Z est parallela ipsi Γ Δ, quod est absurdum. non igitur E Z, Γ Δ sese bifariam secant.

tione E Z erit eisdem parallela: ergo [per 30. 1.] Γ Δ parallela est ipsi E Z.





παράλληλός ἐστι τῆς αὐτῆς· καὶ ἡ Γ Δ ἄρα τῇ E Z παράλληλός ἐστι.

Sed A B per centrum non transeat, ut sit in secunda figura, & ducatur A Θ diameter, & per Θ contingens K Θ Λ: parallela est igitur [per cas. 1.] K Λ ipsi Γ Δ: ergo E Z producta ad easdem partes centri, in quibus est A B, cum Γ Δ conveniet.

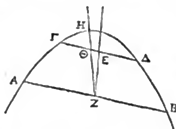
Μὴ ἐρχέσθω δὲ ἡ A B διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ A Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ K Θ Λ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ K Λ τῇ Γ Δ· ἡ ἄρα E Z ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ Γ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, ἐν οἷς ἐστιν ἡ A B.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in coni sectione vel circuli circumferentia, duas rectas parallelas recta linea bifariam secet: erit illa diameter sectionis.

In sectione enim coni duæ rectæ parallelæ A B, Γ Δ in punctis E, Z bifariam secentur, & juncta E Z producatur: dico illam esse sectionis diametrum.

Si enim non est, sit H Θ Z diameter, si fieri possit: ergo [per 5. vel 6. 2. huj.] quæ in H contingit sectionem parallela est ipsi A B: quare [per 30. 1.] & ipsi Γ Δ. est autem H Θ diameter: ergo [per defin. 10.] Γ Θ, Θ Δ æquales sunt, quod est absurdum; posuimus enim Γ E æqualem E Δ. non igitur H Θ diameter est sectionis. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam esse diametrum præter ipsam E Z: ergo E Z sectionis diameter erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ, διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Ἐν γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ A B, Γ Δ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ E, Z, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ E Z ἐκβεβλήσθω· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ H Θ Z· ἡ ἄρα κατὰ τὸ H ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ A B· ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ H Θ· ἴση ἄρα ἡ Γ Θ τῇ Θ Δ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ Γ E τῇ E Δ ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ H Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς E Z· ἡ E Z ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

E U-

[illegible] ... κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΑΒΓ· εἰ δὲ μὴ, ἔλλειψις.

Ἔτι δὲ αὐτὰς διακρῖναι καὶ ἄλλως, ἀπὸ τῶν τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένων, οἷον τῶν ΓΘ, ΔΚ. εἰ μὲν γὰρ εἴη ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, παραβολή ἐστιν· εἰ δὲ τὸ ἀπὸ ΘΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ μείζονα λόγον ἔχει ὅπερ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐλάσσονα, ἔλλειψις.

Καὶ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων δυνατόν ἐστιν αὐτὰς διακρῖναι ἀναμνησθέντας τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων αὐτοῖς ὑπάρχειν.

ſint æquales, conſtat ΑΒΓ circuli circumferentiam eſſe; ſin minus, ellipſim.

Poſſumus & aliter ipſas cognoſcere ex iis quæ ad diametrum ordinatim applicantur, videlicet ΓΘ, ΔΚ. nam ſi fuerit ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΚ ita ΘΑ ad ΑΚ, parabola erit; at ſi quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΚ majorem quidem habuerit rationem quam ΘΑ ad ΑΚ, hyperbola; ſi vero minorem, ellipſis.

Et etiam ex rectis contingentibus eaſdem diſcernere licebit, ſi ea, quæ ſuperius dicta ſunt, ipſis competere meminerimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΓΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΛΘΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ

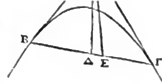
Prop. XXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes occurrant inter ſe; recta connectens punctum concurſûs earundem & illud in quo ea quæ conjungit tactus bifariam dividitur ſectionis diameter erit.

SIT coni ſectio, vel circuli circumferentia, quam contingant ΑΒ, ΑΓ, in puncto Α convenientes, & ducta ΒΓ ſecetur bifariam in Δ, & jungatur ΑΔ: dico ΑΔ eſſe diametrum ſectionis.

Si enim fieri poteſt, ſit ΔΒ diameter, & jungatur ΓΕ, quæ [per 35. & 36. 1. huj.] ſectionem ipſam ſecabit. ſecet autem in Ζ, & per Ζ ipſi ΓΔΒ ducatur parallela ΖΚΗ, & jungatur ΕΛΘΔ: itaque quoniam ΓΔ æqualis eſt ipſi ΔΒ, erit

... quod est absurdum. sive enim sectio sit ellipsis, punctum A, in quo conveniunt diametri, centrum erit sectionis extra ipsam, quod fieri non potest: sive sit parabola, diametri ipsius [contra corol. 51.1.huj.] inter se convenient: si vero hyperbola sit, lineæ B A, A Γ sectioni occurrunt, & unius occursus alterius occursu non continetur, quare convenient inter sese [per 25. 2. huj.] intra angulum hyperbolam continentem. sed & in ipso angulo, (punctum enim A supponitur centrum, cum Δ A, A E diametri sint) quod est absurdum: non igitur B E ipsi E Γ æqualis erit.



καὶ ἡ Α Δ, ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομὴ, τὸ Α, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτὸς, ὅπερ ἀδύνατον· εἴτε παραβολή ἐστιν ἡ τομὴ, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι· εἴτε ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ Β Α, Α Γ, μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις· ἐντὸς ἄρα ἔσται τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας. ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς, (κέντρον γὰρ ὑπόκειται τὸ Α, διαμέτρων οὐσῶν τῶν Δ Α, Α Ε) ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ Β Ε τῇ Ε Γ ἐστὶν ἴση.

Prop. XXXI. *Theor.*

Si utramque oppositarum sectionum duæ rectæ lineæ contingant: si quidem recta tactus conjungens per centrum transeat, contingentes rectæ parallelæ erunt; sin minus, convenient inter se ad partes centri.

Sint oppositæ sectiones A, B, & ipsas contingant Γ A Δ, E B Z in A, B; recta vero, quæ ex A ad B ducitur, primum transeat per centrum sectionum: dico Γ Δ ipsi E Z parallelam esse.

Quoniam enim oppositæ sectiones sunt, quarum diameter A B, & unam earum contingit Γ Δ in puncto A: igitur quæ per B ipsi Γ Δ parallela ducitur, [per 48. & 50. 1.huj.] sectionem continget. contingit autem E Z: ergo Γ Δ ipsi E Z est parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται· ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι· ἐὰν δὲ μὴ, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ Γ Α Δ, Ε Β Ζ κατὰ τὰ Α, Β, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ.

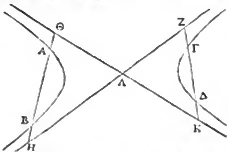
Ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαὶ, ὧν διάμετρός ἐστιν ἡ Α Β, καὶ μίας αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ Γ Δ κατὰ τὸ Α· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β τῇ Γ Δ παράλληλος ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ Ε Ζ· παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ.

*

Μὴ

κατὰ ἓν ἐφαπτόμεναι, ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθῶσι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν· ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαί, καὶ τῶν ἀντικειμένων ἤτοι καθ᾽ ἓν ἐφαπτόμεναι, ἤτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν· λέγω ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Η· ὁμοίως καὶ ἡ ΓΔ συμπεσεῖται κατὰ τὰ Ζ, Κ. καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται συμπίπτειν αἱ ΖΚ, ΘΗ, φανερὸν ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΘΛΖ γωνίας τόπῳ, ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΚΛΗ συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβληθεῖσα δὲ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς το-

lineæ occurrant, ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, quæ productæ inter se conveniant: punctum, in quo conveniunt, erit in angulo qui deinceps est angulo sectionem continenti.

SINT oppositæ sectiones, quas vel in uno puncto contingant, vel in duobus secent rectæ AB, ΓΔ; & productæ inter se conveniant: dico punctum, in quo conveniunt, esse in angulo qui deinceps est angulo sectionem continenti.

Sint sectionum asymptoti ZH, ΘK: ergo [per 3. vel 8. 2. huj.] AB producta asymptotis occurret. occurrat in Θ, H punctis. similiter ΓΔ occurret asymptotis in Z, K. & quoniam supponimus ZK, ΘH inter se convenire, patet eas occursuras vel in angulo ΘΛZ, vel in KΛH. similiter idem demonstrari potest, si AB, ΓΔ sectiones contingant.

PROP. XXXIII. *Theor.*

Si uni oppositarum sectionum recta linea occurrens ex utraque parte producta

 extra

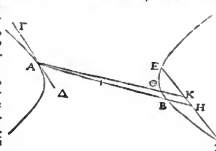
non occurreret, ut modo est ostensum.

τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ὃ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum recta quævis contingat, & huic parallela ducatur in altera sectione: quæ à tactu ad medium rectæ parallelæ ducitur, oppositarum sectionum diameter erit.

Sint oppositæ sectiones A, B, & earum unam A contingat in A puncto recta ΓΔ, ipsique ΓΔ parallela ducatur EZ in altera sectione, & secetur EZ in H bifariam, & jungatur AH: dico AH oppositarum sectionum diametrum esse.



Si enim fieri potest, sit AΘK diameter: ergo [per 31. 2.huj.] quæ in Θ sectionem contingit, parallela est ipsi ΓΔ. sed [ex hyp.] ΓΔ ipsi EZ est parallela: EK igitur ipsi KZ [per 47. 1. huj.] est æqualis, quod fieri non potest; est enim EH æqualis HZ. igitur AΘ non est diameter oppositarum sectionum: ergo ipsa AB ea est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τῆς παραλλήλου ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς A ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ A, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ EZ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH· λέγω ὅτι ἡ AH διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἡ AΘK· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. ἀλλὰ ἡ ΓΔ παράλληλός ἐστι τῇ EZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῇ KZ, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ EH τῇ HZ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ AΘ τῶν ἀντικειμένων· ἡ AB ἄρα.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si diameter in una oppositarum sectionum rectam lineam bifariam secet: quæ in termino diametri contingit alteram sectionem, rectæ bifariam sectæ erit parallela.

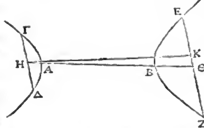
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ· ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ

τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Η Θ· λέγω ὅτι ἡ Η Θ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ Η Κ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ, ὥστε καὶ τῇ Ε Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Κ τῇ Κ Ζ, ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ ἡ Ε Θ τῇ Θ Ζ ἐστὶν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ Η Κ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· ἡ Η Θ ἄρα.



Η, Θ bifariam secentur, & jungatur Η Θ: dico Η Θ diametrum esse oppositarum sectionum.

Si enim non est, sit Η Κ: ergo [per 5.2.huj.] quæ in Α sectionem contingit ipsi Γ Δ est parallela; & idcirco ipsi Ε Ζ: æquales igitur [per 48. 1. huj.] sunt Ε Κ, Κ Ζ, quod fieri non potest, quoniam & Ε Θ, Θ Ζ sunt æquales. ergo Η Κ non est diameter oppositarum sectionum: quare Η Θ ea est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου· ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὰς Α, Β τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ Γ Δ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Χ Ε, καὶ διὰ τοῦ

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si oppositas sectiones recta linea secet, non transiens per centrum: quæ à medio ipsius ad centrum ducitur oppositarum sectionum diameter erit ea quæ recta appellatur; transversa vero diameter ipsi conjugata est ea quæ à centro ducitur parallela rectæ bifariam sectæ.

Sint oppositæ sectiones Α, Β, & ipsas secet recta Γ Δ non transiens per centrum, quæ bifariam in Ε dividatur, sitque sectionum centrum Χ, & jungatur Χ Ε, & per Χ ipsi Γ Δ parallela

gata, quæ per centrum ducitur rectæ tactus conjungenti parallela.

SINT oppositæ sectiones A, B; rectæ sectiones contingentes ΓX, XΔ; & ducatur ΓΔ quæ bifariam dividatur in E, & jungatur EX: dico EX diametrum rectam esse; transversam vero ipsique conjugatam, quæ per centrum ducitur ipsi ΓΔ parallela.

Sit enim, si fieri potest, diameter EZ, & sumatur quodvis punctum Z: ergo ΔX ipsi EZ occurret. occurrat in Z puncto, & jungatur ΓZ: conveniet igitur ΓZ cum sectione. conveniat autem in A, & per A ducatur AB, rectæ ΓΔ parallela. itaque quoniam EZ diameter est & secat ΓΔ bifariam; etiam [per def. 15.] ipsi parallelas rectas bifariam secabit: quare AH ipsi HB est æqualis. & quoniam ΓE est æqualis EΔ; & est in triangulo ΓZΔ: ergo AH [per 4. 6. & 9. 5.] æqualis est HK, unde & HK ipsi HB æqualis est, quod fieri non potest. igitur EZ non est diameter.

ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΧ· λέγω ὅτι ἡ ΕΧ διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.

Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΧ τῇ ΕΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΖ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓΖ τῇ τομῇ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τεμεῖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, καί ἐστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓΖΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΚ, ὥστε καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος ἔσται.

PROP. XXXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes concurrant: quæ per punctum concursus & centrum ducitur, rectam tactus conjungentem bifariam secabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ΕΣΤΩ-

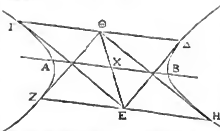
τομῶν.

tur, sectiones ipsas contingunt.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ· λέγω ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΧΒ· αἱ ΘΕ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφάπτεται δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΧΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ΖΕ, ἐπέζευκται δὲ ἡ ΖΘ· διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ΖΘ τῆς Α τομῆς. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς· αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν Α, Β τομῶν.

Sint oppositæ sectiones A, B, & ducantur duæ rectæ Γ E, E Δ contingentes A & B, jungaturque Γ Δ, & per E ducatur Z E H ipsi Γ Δ parallela, & secetur Γ Δ bifariam in Θ, & jungantur Z Θ, Θ H: dico Z Θ, Θ H sectiones contingere.



Ducatur enim E Θ: ergo [per 38. 2. huj.] E Θ recta diameter est, transversa vero ipsi conjugata ea est quæ per centrum ducitur parallela ipsi Γ Δ. sumatur centrum X, & ducatur A X B ipsi Γ Δ parallela: ergo Θ E, A B conjugatæ diametri sunt, atque ordinatim applicata est Γ Θ ad secundam diametrum; & Γ E sectionem contingit secundæ diametro occurrens: rectangulum igitur E X Θ [per 38. 1. huj.] æquale est quadrato dimidiæ secundæ diametri. & quoniam Z E ordinatim applicatur & jungitur Z Θ; propterea [per 38. 1. huj.] Z Θ contingit sectionem A. similiter & H Θ contingit sectionem B: igitur Z Θ, Θ H sectiones, A, B contingunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLI. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ se invicem secent, non transeuntes per centrum: sese bifariam non secabunt.

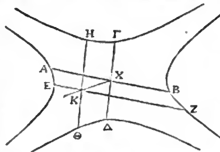
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ταῖς Α, Β δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ

Sint oppositæ sectiones A, B, in quibus duæ rectæ Γ B, A Δ, per centrum non transeuntes,

Si in oppositis sectionibus conjugatis, duæ rectæ lineæ se invicem secent, non transeuntes per centrum: bifariam sese non secabunt.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

SINT oppositæ sectiones conjugatæ A, B, Γ, Δ, & in sectionibus A, B, Γ, Δ duæ rectæ EZ, HΘ, non transeuntes per centrum, se invicem secent in K: dico EZ, HΘ sese bifariam non secare.



Si enim fieri potest, secent se bifariam, & sit X sectionum centrum, & ducatur quidem AB parallela ipsi EZ, & ΓΔ ipsi HΘ parallela; & jungatur KX: ergo [per 37. 2. huj.] KX, AB conjugatæ diametri sunt. & similiter XK, ΓΔ sunt conjugatæ diametri; quare [per 30. 1.] recta contingens sectionem in A est parallela rectæ in Γ contingenti *, quod fieri non potest: conveniunt enim, quoniam [per 19. 2. huj.] contingens in Γ sectiones A, B secat, & contingens in A secat ipsas Γ, Δ. ac patet [per 21. 2. huj.] earum concursum esse in loco qui est sub angulo AXΓ: igitur EZ, HΘ, per centrum non transeuntes, sese bifariam non secant.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς A, B, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ EZ, HΘ κατὰ τὸ K, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ τῇ μὲν EZ ἤχθω παράλληλος ἡ AB, τῇ δὲ ΘH ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KX· αἱ KX, AB ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως δὲ αἱ XK, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· ὥστε ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς A, B τομὰς, ἡ δὲ κατὰ τὸ A τὰς Δ, Γ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τῆς AXΓ γωνίας τόπῳ ἐστίν· οὐκ ἄρα αἱ EZ, HΘ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

PROP. XLIII. *Theor.*

Si unam oppositarum sectionum conjugatarum recta in duobus punctis secet; & à centro duæ rectæ ducantur, una quidem ad medium rectæ secantis, altera vero ipsi parallela: erunt oppositarum sectionum conjugatæ diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγʹ.

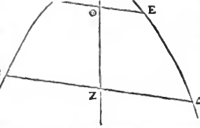
Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τῆς τεμνούσης ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τεμνομένην· συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

* Cum ex definitione diametri conjugatæ [def. prim. 17.] utraque sit parallela ipsi XK.

ΕΣΤΩ-

... σῶν, ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα, ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΖΘΓ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.



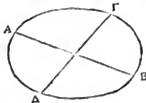
... ΕΘ & productis; erit ΔΖ æqualis ΖΒ, & ΕΘ ipsi ΘΑ. si igitur ordinemus ΒΔ, ΕΑ, ut sint positione parallelæ: data erunt puncta Θ, Ζ; quare & ΖΘΓ positione data erit.

Componetur itaque in hunc modum. Sit data coni sectio in qua Α, Β, Γ, Δ, Ε puncta, ducanturque ΒΔ, ΑΕ inter se parallelæ, & in punctis Ζ, Θ bifariam dividantur: juncta igitur ΖΘ diameter erit sectionis. eâdem ratione & infinitas diametros inveniemus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.

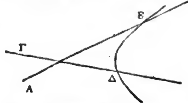
ΤΟΥΤΟ δὴ φανερόν. Ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.



Prop. XLV. *Probl.*

Datæ ellipseos vel hyperbolæ centrum invenire.

HOC itaque manifeste constat. Si enim duæ sectionis diametri ΑΒ, ΓΔ ducantur; punctum in quo conveniunt [ex 25.dat.] erit datum, centrumque sectionis, ut jam [in def.centri] positum est.



Prop.

[per 10. 1.] dividatur EZ in Δ bifariam, & [per 31. 1.] ipsi AB parallela ducatur ΓΔ. patet ΓΔ esse sectionis axem; est enim diametro parallela, adeoque [per cor. 51. 1. huj.] diameter est, & rectam EZ bifariam & ad rectos angulos secat: datæ igitur parabolæ axis inventus est ΓΔ.

Et patet unicum esse parabolæ axem. nam si alius axis sit, ut AB, erit hic ipsi ΓΔ parallelus; & secabit EZ, idque bifariam: ergo BE est æqualis BZ, quod fieri non potest.

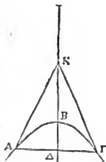
δίχα ἡ EZ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΓΔ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς, παράλληλος γάρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν EZ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων εὕρηται ὁ ΓΔ.

Καὶ φανερὸν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται, ὡς ὁ AB, ἔσται τῇ ΓΔ παράλληλος, καὶ τὴν EZ τέμνει, ὥστε καὶ δίχα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ BZ, ὅπερ ἄτοπον.

Prop. XLVII. *Probl.*

Datæ hyperbolæ vel ellipseos axem invenire.

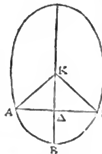
SIT Hyperbola, vel Ellipsis ABΓ: oportet igitur ipsius axem invenire.



Pone jam inventum, & sit KΔ, centrum vero sectionis sit K: ergo KΔ rectas ad ipsam ordinatim applicatas bifariam & ad rectos angulos secat. ducatur perpendicularis ΓΔA, & jungantur KA, KΓ. quoniam igitur ΓΔ æqualis est ΔA; ergo & [per 4. 1.] ΓK ipsi KA est æqualis. ergo, si punctum Γ datum sit, erit ΓK data: adeoque circulus centro K & intervallo ΓK descriptus etiam per ipsum A transibit, & [per 6. def. dat.] erit positione datus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.



ΕΣΤΩ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ἢ ΕΛΛΕΙΨΙΣ ἡ ABΓ· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Εὑρήσθω, καὶ ἔστω ὁ KΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ K· ἡ ἄρα KΔ τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως κατηγμένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΔA, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KA, KΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔA· ἴση ἄρα ἡ ΓK τῇ KA. ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓK· ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ K, διαστήματι δὲ τῷ KΓ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ A, καὶ ἔσται θέσει δεδομένος.

θὰς τέμνει· ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Δ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ Γ Α παράλληλος ἡ Μ Κ Ν· ἡ ἄρα Μ Ν ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῷ Β Κ.

bifariam & ad rectos angulos secat: & idcirco [per def 18.] Κ Δ est axis. ducatur per Κ ipsi Γ Α parallela Μ Κ Ν: ergo Μ Ν est axis sectionis ipsi Β Κ conjugatus.

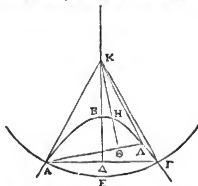
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

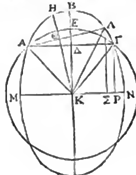
Δεδειγμένων δὲ τούτων, ἑξῆς ἔστω δεῖξαι ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.

Prop. XLVIII. *Theor.*

His autem demonstratis, reliquum est ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ Κ Η· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν, ἀχθείσης καθέ-





του τῆς Α Θ, ἴση ἔσται ἡ Α Θ τῇ Θ Λ· ὥστε καὶ ἡ Α Κ τῇ Κ Λ ἴση. ἀλλὰ καὶ τῇ Κ Γ· ἴση ἄρα ἡ Κ Λ τῇ Κ Γ, ὅπερ ἄτοπον. ὅτι μὲν οὖν ὁ Α Ε Γ κύκλος κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Γ Ρ, Λ Σ·

Si enim fieri potest, sit axis alius Κ Η: ergo ducta perpendiculari Α Θ, ex iis quæ supra diximus, erit Α Θ æqualis Θ Λ: quare [per 4. 1.] & Α Κ ipsi Κ Λ, ut & ipsi Κ Γ æquatur: sunt igitur Κ Λ, Κ Γ inter se æquales, quod est absurdum. circulum autem Α Ε Γ non occurrere sectioni in alio puncto inter Α, Γ, in hyperbola quidem perspicuum est. in ellipsi vero ducantur perpendiculares Γ Ρ, Λ Σ: & quoniam



rectangulo ΜΣΝ. sed demonstratum est, quo quadratum ex ΣΚ differt à quadrato ex ΚΡ, eo differre quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΛΣ: * quo igitur differt quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΣΛ, eo rectangulum ΜΡΝ à rectangulo ΜΣΝ differt. itaque cum ordinatim applicatæ sint ΓΡ, ΛΣ; erit [per 21. 1. huj.] ut quadratum ex ΓΡ ad rectangulum ΜΡΝ ita quadratum ex ΛΣ ad rectangulum ΜΣΝ. demonstratum autem est in utrisque eundem esse excessum: ergo quadratum ex ΓΡ rectangulo ΜΡΝ est æquale, & quadratum ex ΛΣ æquale rectangulo ΜΣΝ. igitur linea ΛΓΜ est circulus *, quod est absurdum; posuimus enim ellipsim esse.

* ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ· * κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμή, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

EUTOCIUS.

* Quo igitur differt quadratum ex ΓΡ à quadrato ex ΣΛ, eo rectangulum ΜΡΝ differt à rectangulo ΜΣΝ.] Sint duæ magnitudines æquales ΑΒ, ΓΔ, & dividantur in partes inæquales in punctis Ε, Ζ. dico quo differt ΑΕ à ΖΓ, eo ΕΒ differre à ΖΔ.

Ponatur ipsi ΓΖ æqualis ΑΗ; ergo ΕΗ est differentia magnitudinum ΑΗ, ΑΕ; hoc est ΖΓ, ΑΕ. est enim ΑΗ æqualis ΓΖ. sed & ΑΒ ipsi ΓΔ: reliqua igitur ΗΒ reliquæ ΖΔ est æqualis. quare ΕΗ est differentia ipsarum ΕΒ, ΒΗ, hoc est ipsarum ΕΒ, ΖΔ.

Sed sint quatuor magnitudines ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, & differat ΑΕ à ΓΖ eo quo ΕΒ differt à ΖΔ. dico utraque simul ΑΕ, ΕΒ utrisque simul ΓΖ, ΖΔ æqualia esse.

Ponatur rursus ΑΗ æqualis ΓΖ: ergo ΕΗ est differentia magnitudinum ΑΕ, ΓΖ. eodem autem differre

* Ὧι ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ.] Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ διῃρήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὰ Ε, Ζ. λέγω ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ ΑΕ τοῦ ΖΓ, τούτῳ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ.

Κείσθω τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΗ, ΑΕ, τουτέστι τῶν ΖΓ, ΑΕ, τὸ γὰρ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ· ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσον· ὥστε τὸ ΕΗ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΕΒ, ΒΗ, ὅπερ τῶν ΕΒ, ΖΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ διαφερέτω ᾧ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. λέγω ὅτι συναμφότερα τὰ ΑΕ, ΕΒ συναμφοτέροις τοῖς ΓΖ, ΖΔ ἐστὶν ἴσα.

Κείσθω πάλιν τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΕ, ΓΖ. τῷ δὲ αὐτῷ διαφέρειν ὑπόκειται ἀλλα-

* Per Lemma II. *Pappi* ad librum primum.

θεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ. καὶ ἔστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.



Β Δ. at Β Δ est data: data igitur est Β Ε. estque punctum Β datum: ergo & punctum Ε. sed datum quoque est Α punctum: recta igitur Α Ε [per 26. dat.] positione data erit.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΑΕ.

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto Α perpendicularis Α Δ, ponaturque Β Ε ipsi Β Δ æqualis, & jungatur Α Ε: patet itaque [per 35. 1. huj.] Α Ε sectionem contingere.

ΕΣΤΩ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

Sit rursus punctum Ε in axe datum. factum sit, & ducatur recta Α Ε sectionem contingens, & perpendicularis ducatur Α Δ: ergo [per 35. 1. huj.] Β Ε est æqualis Β Δ. & data est Β Ε: igitur & Β Δ. at datum est Β punctum; ergo Δ datum erit. sed Δ Α est normalis, adeoque [per 30.dat.] positione datur; igitur & punctum Α datum est. sed & Ε datum: igitur Α Ε [per 26.dat.] datur positione.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ. φανερὸν δὲ καὶ, ἐὰν δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Componetur itaque in hunc modum. Ponatur ipsi Β Ε æqualis Β Δ, & à puncto Δ ducatur Δ Α ipsi Ε Δ normalis, jungaturque Α Ε: manifestum igitur est [per 35. 1. huj.] rectam Α Ε contingere sectionem. constat etiam, si datum punctum sit idem quod Β, normalem ab eo ductam sectionem ipsam contingere.

ΕΣΤΩ δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνῆκται

Sit datum punctum Γ: & factum jam sit, sitque Γ Α contingens, & per Γ ducatur Γ Ζ parallela axi, hoc est ipsi Β Δ: ergo [per 28.dat.] Γ Ζ positione data est. à puncto Α ad Γ Ζ ordinatim applicetur Α Ζ: eritque [per 35. 1.huj.] Γ Η æqualis Ζ Η. & Η [per 25.dat.] est datum: datum igitur erit & Ζ. ordinatim autem applicatur

Ζ Α,

H B. sed [per 1. dat.] ratio Γ Δ ad Δ B est data, quia utraque data est: ratio igitur Γ H ad H B erit data. & est data B Γ: quare punctum H datum est. sed & ipsum A: ergo [per 26. dat.] A H data erit positione.

Componetur autem sic. Ducatur à puncto A perpendicularis A Δ, & fiat Γ H ad H B sicut Γ Δ ad Δ B, & jungatur A H: patet igitur rectam A H contingere sectionem.

ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. λόγος δὲ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς, δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Rursus sit datum punctum H in axe: & factum jam sit, ducaturque contingens A H, & A Δ perpendicularis. pari ratione erit [per 36. 1. huj.] ut Γ H ad H B ita Γ Δ ad Δ B. & data est Γ B: ergo [per 7. dat.] punctum Δ datum. & est Δ A perpendicularis: quare positione data erit. & est sectio data positione: datum igitur [per 25. dat.] est A punctum. sed & ipsum H: ergo A H positione datur.

Componetur autem hoc modo. Ponantur alia eadem, & fiat ratio Γ Δ ad Δ B eadem quæ est Γ H ad H B; & ducta Δ A perpendiculari, jungatur A H: constat igitur [per 34. 1. huj.] ipsam A H problema conficere; & à puncto H rectam aliam duci posse, quæ sectionem ad alteras partes contingat.

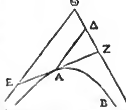
ΠΑΛΙΝ δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΓΒ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

Iisdem positis, sit datum punctum K in loco, qui intra angulum sub rectis E Θ Z conti-

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας τόπῳ, τὸ Κ, καὶ

ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Ζ Α Ε, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ Ε Θ παράλληλος ἤχθω ἡ Α Δ· ἔσται δὴ ἴση ἡ Δ Θ τῇ Δ Ζ, ἐπεὶ καὶ ἡ Ζ Α τῇ Α Ε ἐστὶν ἴση. καὶ δοθεῖσα ἡ Ζ Θ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν Ε Θ παράλληλος ἦκται ἡ Δ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ Ζ Α Ε.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω ἡ τομὴ ἡ Α Β, καὶ αἱ Ε Θ, Θ Ζ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, τὸ Ζ· καὶ τετμήσθω ἡ Ζ Θ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ Θ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ Δ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ζ Α. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Ζ Δ τῇ Δ Θ, ἴση ἄρα καὶ ἡ Ζ Α τῇ Α Ε. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ Ζ Α ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ Κ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Κ Θ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ Κ Θ παράλληλος ἀχθῇ ἡ Γ Δ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ

que a puncto Z ducere rectam quæ sectionem contingat. Ponatur factum esse; & sit contingens Z A E, & per A ducatur A Δ ipsi E Θ parallela: erit igitur [per 2.6.] Δ Θ æqualis Δ Z, quoniam [per 3. 2. huj.] & Z A ipsi A E est æqualis. & [per 26.dat.] data est Z Θ; ergo [per 7. dat.] & punctum Δ datum. data quoque est [per 28.dat.] positione Δ A, quæ nempe per Δ ducta ipsi Θ E positione datæ parallela est; & sectio data est positione: ergo & punctum A datur. sed & Z [ex hyp.] datum: recta igitur Z A E positione data erit.

Componetur autem hoc pacto. Sit sectio A B, cujus asymptoti E Θ, Θ Z, & datum punctum Z sit in una asymptotôn sectionem continentium. & secetur [per 10.1.] Z Θ bifariam in Δ, ducaturque [per 30. 1.] per Δ recta Δ A ipsi Θ E parallela, & jungatur Z A. & quoniam Z Δ est æqualis Δ Θ, & Z A [per 26. & 9.5.] ipsi A E æqualis erit. quare ex iis, quæ [ad 9.2. huj.] demonstrata sunt, Z A sectionem contingit.

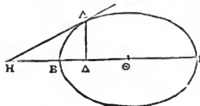
IISDEM positis, sit datum punctum K in loco qui deinceps est angulo sectionem continenti, & oporteat ab ipso K rectam ducere, quæ contingat sectionem. factum sit, & sit K A, junctaque K Θ producatur. erit igitur [per 26. dat.] positione data. si ideo in sectione sumatur punctum Γ, & per Γ ducatur Γ Δ ipsi K Θ parallela; erit [per 28. dat.] Γ Δ positione data. ac si Γ Δ bifariam

N n

bifariam in E secetur, junctaque EΘ producatur, & ipsi BΘ ponatur æqualis ΘH: ergo HB transversa diameter est ipsi KΘΛ conjugata. ponatur vero quartæ parti figuræ quæ est ad BH æquale rectangulum KΘΛ, perque Λ ipsi BH parallela ducatur ΛA, & jungatur KA. patet igitur KA sectionem contingere, per conversam trigesimi octavi theorematis primi libri.

At si datum punctum sit in loco inter ZΘΠ interjecto, problema erit impossibile. recta enim contingens secabit HΘ, & utrique ipsarum ZΘ, ΘΠ occurret; quod est absurdum, ex iis quæ in trigesimo primo theoremate primi libri, & in tertio hujus demonstrata sunt.

Iisdem positis, sit sectio data Ellipsis, datum vero punctum in sectione A; & oporteat ab ipso A ducere rectam quæ sectionem contingat. Ponatur factum; sitque ea recta AH, & ab A ad BΓ axem ordinatim applicetur AΔ: erit igitur [per 47.2.huj.] punctum Δ datum, & [per 36.1.huj.] ut ΓΔ ad ΔB ita erit ΓH ad HB. sed [per 1. dat.] ratio ΓΔ ad ΔB data est: ergo & ratio ΓH ad HB data erit; & idcirco [per 2.dat.] punctum H. sed & A datur: quare & AH erit positione data.



Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis AΔ, & ipsius ΓH ad HB ratio eadem sit [per 10.6.] quæ ratio ΓΔ ad ΔB, jungaturque AH: constat igitur [per 34. 1. huj.] AH sectionem contingere, sicut in hyperbola.

Sit rursus datum punctum K, à quo oporteat rectam contingentem ducere. factum sit, & sit ea recta KA, ductaque KΛΘ per Θ centrum

παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ ΚΘΛ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ λη΄. τοῦ πρώτου βιβλίου.

ΕΑΝ δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ· ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΘΠ, ὅπερ ἀδύνατον, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα΄. τοῦ πρώτου, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου βιβλίου.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ τομὴ Ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α· καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΕΣΤΩ δὲ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω



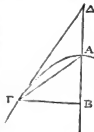


ἄρα τοῦ Δ Β πρὸς Β Γ δοθείς. τοῦ δὲ Β Δ πρὸς Β Α λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Α Β ἄρα πρὸς Β Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Β Α Γ. καὶ ἐστι πρὸς θέσει τῇ Β Α καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ Γ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ Γ Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολὴ, ἧς ἄξων ἡ Α Β, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ Ε Ζ Η· καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς Ε Ζ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ Ε Η, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ Ζ Η τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θ Ε, καὶ τῇ ὑπὸ τῆς Η Θ Ε γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῆς Β Α Γ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ Β Γ, καὶ τῇ Β Α ἴση κείσθω ἡ Α Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Δ· ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ τῆς τομῆς. λέγω δὴ ὅτι ἡ ὑπὸ τῆς Γ Δ Β τῇ ὑπὸ τῆς Ε Ζ Η ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Η Θ οὕτως ἡ Δ Β πρὸς Β Α, ἔστι δὲ καὶ ὡς Θ Η πρὸς Η Ε οὕτως ἡ Α Β πρὸς Β Γ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Ζ Η πρὸς Η Ε οὕτως ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Γ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.

re [per 40. dat.] data est ratio Δ B ad B Γ. sed [per 35. 1.huj.] ratio Δ B ad B A est data: ratio igitur A B ad B Γ [per 8. dat.] data erit. & datus est angulus qui ad B: ergo & B A Γ angulus est datus. & est ad rectam B A positione datam & ad datum punctum A: igitur Γ A positione dabitur. at sectio data est positione: ergo punctum Γ datum. & Γ Δ sectionem contingit: quare & positione data erit.

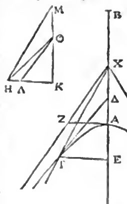
Componetur autem problema hoc modo. Sit data coni sectio primum Parabola, cujus axis A B, datus autem angulus acutus E Z H, sumptoque in E Z puncto E, ducatur perpendicularis E H, & Z H in Θ bifariam secetur, & jungatur Θ E, & angulo H Θ E æqualis constituatur angulus B A Γ; & ducta perpendiculari B Γ ipsi B A ponatur æqualis A Δ, jungaturque Γ Δ: ergo [per 35. 1.huj.] Γ Δ sectionem continget. dico itaque angulum Γ Δ B angulo E Z H æqualem esse. quoniam enim [per constr.] est ut Z H ad H Θ ita Δ B ad B A, & est ut Θ H ad H E ita A B ad B Γ: erit ex æquali [per 22.5.] ut Z H ad H E ita Δ B ad B Γ. sed [per constr.] anguli qui ad H, B recti sunt: angulus igitur Z [per 6. 6.] angulo Δ est æqualis.



Sit

punctum. & [per 49. 2.huj.] [illegible] con-tingens: igitur Γ Δ est positione data. ducatur Z X sectionis asymptotos: ergo [per 3. 2. huj.] Γ Δ producta asymptoto occurret. occurrat in Z: erit igitur Z Δ B angulus angulo Z X Δ major. & propterea, in compositione problematis, oportebit datum angulum acutum majorem esse quam est dimidius ejus qui ab asymptotis continetur.

Componetur itaque problema hoc modo. Sit data hyperbola, cujus axis quidem A B, asymptotos autem X Z, & datus angulus acutus sit K Θ H, qui sit major angulo A X Z: fiatque [per 23.1.] angulo A X Z æqualis angulus K Θ Λ, & à puncto A ad rectos angulos ipsi A B ducatur A Z, in H Θ vero sumatur aliquod punctum H, à quo ad Θ K perpendicularis ducatur H K. quoniam igitur angulus Z X A angulo Λ Θ K est æqualis, & anguli ad A, K recti sunt; erit [per 4, 6.] ut X A ad A Z ita Θ K ad K Λ. sed [per 8.5.] Θ K ad K Λ majorem rationem habet quam Θ K ad K H: ergo quadratum ex X A ad quadratum ex A Z majorem habet rationem quam quadratum ex Θ K ad quadratum ex K H. ut autem quadratum ex X A ad quadratum ex A Z ita [per 1. 2.huj.] transversum figuræ latus ad rectum: quare transversum figuræ latus ad rectum majorem rationem habet quam quadratum ex Θ K ad quadratum ex K H. itaque si fiat ut quadratum ex X A ad quadratum ex A Z ita aliud quoddam ad quadratum ex K H: erit illud quadrato ex Θ K majus. sit rectangulum M K Θ, & jungatur H M. igitur quoniam quadratum ex M K majus est rectangulo M K Θ; habebit quadratum ex M K ad quadratum ex K H majorem rationem quam rectangulum



[illegible] ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ Z X· ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Z· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Z Δ E γωνία τῆς ὑπὸ Z X Δ. δεήσει ἄρα, εἰς τὴν σύνθεσιν, τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἧς ἄξων A B, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ X Z, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα, μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν A X Z, ἡ ὑπὸ K Θ H· καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν A X Z ἴση ἡ ὑπὸ K Θ Λ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A τῇ A B πρὸς ὀρθὰς ἡ A Z, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς H Θ τὸ H, καὶ ἤχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν Θ K κάθετος ἡ H K. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Z X A τῇ ὑπὸ Λ Θ K, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς A, K γωνίαι ὀρθαί· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ X A πρὸς A Z οὕτως ἡ Θ K πρὸς K Λ. ἡ δὲ Θ K πρὸς K Λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Θ K πρὸς K H· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Θ K πρὸς τὸ ἀπὸ K H. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Θ K πρὸς τὸ ἀπὸ K H. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ K H, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ Θ K. ἔστω τὸ ὑπὸ M K Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ H M. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ M K τοῦ ὑπὸ M K Θ· τὸ ἄρα ἀπὸ M K πρὸς τὸ ἀπὸ K H μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ M K Θ πρὸς τὸ ἀπὸ K H,

ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι, ἐπὶ ταυτὰ τῇ τομῇ, ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ. Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθείς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ· τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καὶ ἐστὶ πρὸς θέσει δοθείσῃ καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

Συντεθήσεται δὴ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα,

rectam ducere, quæ sectionem contingat, & cum axe ad partes sectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Factum sit, & sit ΓΔ: ergo angulus ΓΔΑ est datus. ducatur perpendicularis ΓΕ: ratio igitur quadrati ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΓ [per 4. & 22. 6.] data est. sit sectionis centrum Χ, & jungatur ΓΧ: erit igitur [per 37. 1.huj.] ratio quadrati ex ΓΕ ad rectangulum ΔΕΧ data; eadem enim est quæ ratio recti lateris ad transversum: ergo dabitur [per 8. dat.] ratio quadrati ex ΔΕ ad rectangulum ΔΕΧ, & idcirco [per 1. 6.] ratio ΔΕ ad ΕΧ. ratio autem ΔΕ ad ΕΓ est data: data igitur est & ratio ΓΕ ad ΕΧ. & angulus qui est ad Ε rectus est: ergo [per 41.dat.] datur angulus ad Χ. & est ad rectam positione datam, & ad datum punctum: quare [per 29. & 25. dat.] datum erit punctum Γ, & à dato puncto Γ ducitur ΓΔ sectionem contingens: ergo est positione data recta ΓΔ.

Componetur autem problema hoc modo. Sit datus angulus acutus ΖΗΘ, sumaturque in ΖΗ punctum Ζ, & [per 12. 1.] ΖΘ perpendicularis ducatur, & fiat ut rectum latus ad transversum ita quadratum ex ΖΘ ad rectangulum ΗΘΚ, & jungatur ΚΖ. sit sectionis centrum Χ, & [per 23.1.] angulo ΗΚΖ æqualis constituatur angulus ΑΧΓ, & demittatur perpendicularis ΓΕ,& [per 49.2.huj.] ducatur ΓΔ sectionem contingens: dico rectam ΓΔ conficere proble-

 ma,

Rectam datam coni sectionem contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem.

SIT data coni sectio primum Parabola, cujus axis A B, & datus angulus sit Θ: oportet vero ducere rectam, quæ parabolam contingat, & cum diametro per tactum ductâ contineat angulum æqualem dato angulo Θ. factum sit, & contingens sit Γ Δ, faciens cum diametro E Γ per tactum ducta angulum E Γ Δ angulo Θ æqualem, & Γ Δ axi in puncto Δ occurrat. quoniam igitur [per 46. 1. huj.] A Δ est parallela E Γ, angulus A Δ Γ angulo E Γ Δ est æqualis. & datus est angulus E Γ Δ; est enim [ex hyp.] æqualis angulo Θ: ergo & A Δ Γ angulus datus erit.

Componetur itaque hoc modo. Sit parabola cujus axis A B, & datus angulus Θ. ducatur [per præced.] Γ Δ sectionem contingens, quæ cum axe faciat angulum A Δ Γ æqualem angulo Θ; & per Γ ducatur E Γ ipsi A B parallela. quoniam igitur angulus Θ angulo A Δ Γ est æqualis; angulus autem A Δ Γ est æqualis ipsi E Γ Δ: ideo angulus Θ angulo E Γ Δ æqualis erit.

SIT sectio Hyperbola, cujus axis A B, centrum E, & asymptotos E T; datus autem angulus sit Ω, & Γ Δ sectionem contingat, jungaturque Γ E conficiens problema, & Γ H perpendicularis ducatur: itaque [datâ sectione] ratio transversi lateris ad rectum data est; igitur & [per 37. 1. huj.] data ratio rectanguli E H Δ ad qua-

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ὁ A B, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ, ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ E Γ τὴν ὑπὸ E Γ Δ γωνίαν ἴσην τῇ Θ· καὶ συμπιπτέτω ἡ Γ Δ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ A Δ τῇ E Γ· ἡ ὑπὸ A Δ Γ γωνία τῇ ὑπὸ E Γ Δ ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ E Γ Δ, ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ A Δ Γ.

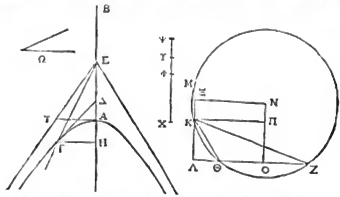
Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω παραβολή, ἧς ἄξων ὁ A B, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Γ Δ, ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῆς A Δ Γ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ A B παράλληλος ἤχθω ἡ E Γ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ A Δ Γ, ἡ δὲ ὑπὸ A Δ Γ ἴση τῇ ὑπὸ E Γ Δ· καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ E Γ Δ.

ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ὑπερβολή, ἧς ἄξων ἡ A B, κέντρον δὲ τὸ E, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ E T, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ E ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ Γ H· δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ E H Δ πρὸς τὸ

ἀπὸ

… ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων ᾗ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ· ἡ ᾗ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΨΧ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ. ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω τμῆμα κύκλου μεῖ-

Componetur autem hoc modo. Sit data hyperbola ΑΓ, cujus axis ΑΒ, centrum vero Ε, & asymptotos ΕΤ: datus autem angulus acutus sit Ω, & data ratio transversi lateris ad rectum sit eadem quæ ΨΧ ad ΧΦ, & [per 10. 1.] ΨΦ in Υ bifariam secetur. exponatur data recta ΖΘ, & super ipsam circuli portio major semicirculo [per 33.3.] describatur, capiens angu-



ζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὴν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθω-

lum æqualem angulo Ω, sitque ΖΚΘ; sumatur autem [per 1. 3.] circuli centrum Ν, à quo ad rectam ΖΘ perpendicularis demittatur ΝΟ, & [per 10. 6.] ΝΟ secetur in Π, ita ut ΝΠ ad ΠΟ eandem habeat rationem quam ΥΦ ad ΦΧ, & [per 30. 1.] per Π ipsi ΖΘ parallela ducatur ΠΚ, & à puncto Κ ad ΖΘ productam perpendicularis ΚΛ demittatur, & jungantur ΖΚ, ΚΘ,

* Per conversam Lemmatis 9. *Pappi*: & adhuc plenius per Lem. 3. in librum VI. quod sane huc pertinere videtur.

producaturque



tum ex E A ad quadratum ex A T ita est transversum latus ad rectum; & ut transversum latus ad rectum ita rectangulum Z Λ Θ ad quadratum ex Λ K; quadratum autem ex Z Λ ad quadratum ex Λ K majorem rationem habet quam rectangulum Z Λ Θ ad quadratum ex Λ K: habebit igitur quadratum ex Z Λ ad quadratum ex Λ K majorem rationem quam quadratum ex E A ad quadratum ex A T. & sunt anguli ad A, Λ recti: angulus igitur Z [per 6.lem.2.] angulo A E T minor erit. itaque [per 23.1.] constituatur angulus A E Γ æqualis angulo Λ Z K: ergo [per 2.2.huj.] E Γ sectioni occurret. occurrat in puncto Γ, & à Γ ducatur [per 49.2.huj.] Γ Δ contingens sectionem, & Γ H perpendicularis: erit itaq; [per 37.1.huj.] ut transversum latus ad rectum ita rectangulum E H Δ ad quadratum ex H Γ: ut igitur rectangulum Z Λ Θ ad quadratum ex Λ K ita rectangulum E H Δ ad quadratum ex H Γ: ideoq; [per 7.lem.2. & 3.lem. 6.] triangulum K Z Λ triangulo Γ E H est simile, & triangulum K Θ Λ simile triangulo Γ Δ H, & K Z Θ ipsi Γ E Δ: quare angulus E Γ Δ angulo Z K Θ, hoc est [per constr.] ipsi Ω, est æqualis. si vero transversi lateris ad rectum ratio sit æqualis ad æquale; recta K Λ circulum Z K Θ continget, & recta conjungens centrum & punctum K parallela erit ipsi Z Θ, & hæc ipsa problema conficiet.

δὴ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΤ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ. καί εἰσιν αἱ πρὸς Α, Λ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῆς ΑΕΤ. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛΖΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΓ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ, ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΓΕΗ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΚΘΛ τῷ ΓΔΗ, καὶ τὸ ΚΖΘ τῷ ΓΕΔ· ὥστε ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΚΘ, τουτέστι τῇ Ω. ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσου ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ ΚΛ ἐφάψεται τοῦ ΖΚΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ΖΘ, καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

Prop. LII. *Theor.*

Si ellipsim recta linea contingat: angulus, quem facit cum diametro per

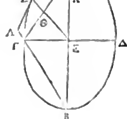
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

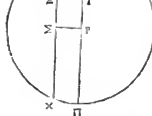
Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ· ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ,

οὐκ

[illegible] τὸ ἀπὸ Ε Κ πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτω τὸ ὑπὸ Η Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Η Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ οὕτω τὸ ἀπὸ Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ Η Κ τῇ Κ Ε. ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ Μ Υ Ν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ Α Γ Β. ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ Α Γ Β· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι Μ Υ Ν. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ Η Κ πρὸς Κ Ε οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Υ Ξ Χ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Υ, Υ Ν, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ Μ Ν κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ο Τ Π· διάμετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἡ Ρ Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Ο, Ο Ν. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ Μ Ο Ν ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Α Γ Β, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα τῶν Α Β, Μ Ν κατὰ

eſt ſicut quadratum ex E K ad quadratum ex K Z. ſed ut quadratum ex E B ad quadratum ex E Γ, hoc eſt ut rectangulum A E B ad quadratum ex E Γ, ſive latus tranſverſum ad rectum, ita [per 37. 1. huj.] rectangulum H K E ad quadratum ex K Z: non eſt igitur rectangulum H K E ad quadratum ex K Z ſicut quadratum ex E K ad quadratum ex K Z; ac proinde H K non eſt ipſi K E æqualis. exponatur circuli portio M Υ N, capiens angulum æqualem angulo A Γ B. angulus autem A Γ B eſt obtuſus: ergo [per 31. 3.] circuli portio M Υ N eſt ſemicirculo minor. fiat vero ut H K ad K E ita N Ξ ad Ξ M, & per Ξ ad rectos angulos ipſi M N ducatur Υ Ξ X, & jungantur M Υ, Υ N; ſecetur autem M N bifariam in T, & ad rectos angulos ducatur O T Π: erit igitur [per 3. 3.] hæc diameter. ſit P circuli centrum, à quo perpendicularis ducatur P Σ & jungantur M O, O N. itaque quoniam angulus M O N eſt æqualis angulo A Γ B, & utraque ipſarum A B, M N in punctis E, T bifariam





gulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ: ergo rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ minorem habet rationem quam ΧΞ ad ΞΥ, hoc est [per 1.6.] quam rectangulum ΧΞΥ ad quadratum ex ΞΥ, hoc est [per 35. 3.] rectangulum ΝΞΜ ad quadratum ex ΞΥ. si igitur fiat ut rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ ita rectangulum ΝΞΜ ad aliud quoddam; erit quidem ad majus quadrato ex ΞΥ. sit ad quadratum ex ΞΦ: itaque quoniam est ut ΗΚ ad ΚΕ ita [per constr.] ΝΞ ad ΞΜ, & sunt ΚΖ, ΞΦ ad rectos angulos, & rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ est ut rectangulum ΝΞΜ ad quadratum ex ΞΦ: erit propterea angulus ΗΖΕ æqualis angulo ΝΦΜ: ergo major est angulus ΝΥΜ, hoc est ΑΓΒ, angulo ΗΖΕ. qui vero deinceps est, videlicet ΑΖΘ, major est angulo ΑΓΘ: igitur angulus ΑΖΘ non est angulo ΑΓΘ minor.

Prop. LIII. *Probl.*

Rectam ellipsim datam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo deinceps ei qui rectis ad mediam sectionem inclinatis continetur.

πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς ἄλλο τι· ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΞΥ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ· διὰ ταῦτα ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΦΜ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΥΜ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας. ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΑΖΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΘ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ γωνίας.

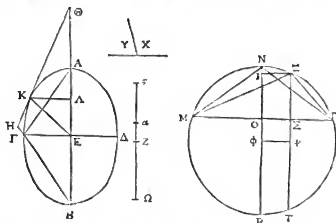
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ΄.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. δεῖ δὲ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

ΕΣΤΩ

καὶ τετμήσθω ἡ Μ Π δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τῦ Ο τῇ Μ Π πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ν Ο Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Ν, Ν Π· ἡ ἄρα ὑπὸ Μ Ν Π γωνία τῆς ὑπὸ Α Γ Β ἐλάσσων ἐςίν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ Μ Ν Π ἡμίσειά ἐςιν ἡ ὑπὸ Μ Ν Ο, τῆς δὲ ὑπὸ Α Γ Β ἡ ὑπὸ Α Γ Ε· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ Μ Ν Ο τῆς ὑπὸ Α Γ Ε. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα Α Ε πρὸς Ε Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Μ Ο πρὸς Ο Ν, ὥςε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Μ Ο πρὸς τὸ ἀπὸ Ο Ν. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ Α Ε ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ Α Ε Β, τὸ δὲ ἀπὸ Μ Ο ἴσον τῷ ὑπὸ Μ Ο Π, τουτέςι τῷ ὑπὸ Ν Ο Ρ· τὸ ἄρα ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, τουτέςιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν,

[per 10.1.] bifariam fecetur Μ Π in Ο, & per Ο [per 11. 1.] ducatur Ν Ο Ρ ad rectos angulos ipsi Μ Π, & jungantur Μ Ν, Ν Π: angulus igitur Μ Ν Π minor est angulo Α Γ Β. anguli autem



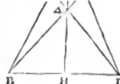
Μ Ν Π [per 4.1.] dimidius est angulus Μ Ν Ο, & anguli Α Γ Β dimidius est Α Γ Ε: ergo Μ Ν Ο angulus angulo Α Γ Β est minor. & anguli ad Ε & Ο recti sunt: quare Α Ε ad Ε Γ majorem rationem habet quam Μ Ο ad Ο Ν; & ideo quadratum ex Α Ε ad quadratum ex Ε Γ majorem habet rationem quam quadratum ex Μ Ο ad quadratum ex Ο Ν. sed quadratum ex Α Ε æquale est rectangulo Α Ε Β; & quadratum ex Μ Ο æquale rectangulo Μ Ο Π, hoc est [per 35.3.] ipsi Ν Ο Ρ: ergo rectangulum Α Ε Β ad quadratum ex Ε Γ, hoc est [per 21. 1.huj.] transversum latus ad rectum,

ad ας ita ΦΟ ad ΟΙ, & ΨΣ ad ΣΞ; componendoque ut Ζς ad ςα ita ΨΞ ad ΞΣ; & antecedentium dupla, ut Ως ad ςα ita ΤΞ ad ΞΣ; & dividendo, ut Ωα ad ας, hoc est [per constr.] ut transversum latus ad rectum, ita ΤΣ ad ΣΞ. jungantur itaque ΜΞ, ΞΠ, & ad rectam ΑΕ, & ad punctum in ea Ε constituatur [per 23. 1.] angulus ΑΕΚ æqualis angulo ΜΠΞ, & per Κ ducatur [per 49. 2. huj.] ΚΘ sectionem contingens, & ΚΛ ordinatim applicetur. quoniam igitur angulus ΜΠΞ æqualis est angulo ΑΕΚ, & rectus angulus ad Σ est æqualis recto ad Λ; erit [per 32. 1.] triangulum ΞΣΠ æquiangulum triangulo ΚΛΕ; & ut transversum latus ad rectum ita est ΤΣ ad ΣΞ, hoc est [per 1. 6.] rectangulum ΤΣΞ ad quadratum ex ΞΣ, hoc est [per 35. 3.] rectangulum ΜΣΠ ad quadratum ex ΞΣ: simile igitur est [per lem. 7. 2. huj.] triangulum ΘΛΚ triangulo ΜΣΞ, & triangulum ΘΚΕ simile ipsi ΜΞΠ: & propterea angulus ΜΞΠ est æqualis angulo ΘΚΕ. est autem [per 21. 3.] angulus ΜΞΠ æqualis angulo ΜΝΠ, hoc est [per constr.] angulo Χ: quare & ΘΚΕ angulus angulo Χ est æqualis: angulus igitur deinceps ΗΚΕ [per 13. 1.] ei qui deinceps est angulo Τ æqualis erit; ergo ducta est ΗΘ sectionem contingens, quæ cum diametro ΚΕ per tactum ductâ facit ΗΚΕ angulum dato angulo Τ æqualem: quod erat faciendum.

τῇ ΝΡ παράλληλοι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζα πρὸς τὴν ας οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ΟΙ, καὶ ἡ ΨΣ πρὸς ΣΞ· καὶ συνθέντι ὡς Ζς πρὸς ςα οὕτως ἡ ΨΞ πρὸς ΞΣ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ως πρὸς ςα οὕτως ἡ ΤΞ πρὸς ΞΣ· καὶ διελόντι ὡς ἡ Ωα πρὸς ας, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω, πρὸς τῇ ΑΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ, τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τὸ Λ ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΛΕ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚ τρίγωνον τῷ ΜΣΞ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΘΚΕ τῷ ΜΞΠ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ. ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Τ ἐστὶν ἴση· δῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ ΚΕ, γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Τ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΑΠ-

σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΘΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΓΖ πρὸς ΖΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

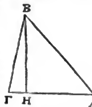


ducantur. itaque quoniam BH est æqualis ipsi HΓ; erit [propter æquiangula triangula BΔH, KΔA, item HΔΓ, AΔΘ] & ΘA ipsi AK æqualis: ergo [propter æquiangula triangula BEΓ, AEΘ, item BZΓ, KZA] ut BΓ ad ΘA, hoc est ut BE ad EA, ita BΓ ad KA, hoc est ΓZ ad ZA: quare EZ ipsi BΓ est parallela.

ΛΗΜΜΑ β'.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.

Ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ ἥμισύ ἐστι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν.



LEMMA II.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ angulos A, Δ æquales habentia; & sit rectangulum BAΓ æquale rectangulo EΔZ. dico triangulum triangulo æquale esse.

Ductis enim perpendicularibus BH, EΘ; erit [per 4. 6.] ut HB ad BA ita EΘ ad EΔ: ergo [per 1. 6.] ut rectangulum sub BH & AΓ ad rectangulum BAΓ ita rectangulum sub EΘ & ΔZ ad rectangulum EΔZ. est autem [ex hyp.] rectangulum BAΓ rectangulo EΔZ æquale: ergo [per 14. 5.] & rectangulum sub BH & AΓ æquale rectangulo sub EΘ & ΔZ. sed [per 41. 1.] rectanguli sub BH & AΓ dimidium est ABΓ triangulum; & rectanguli sub EΘ & ΔZ dimidium triangulum ΔEZ: triangulum igitur ABΓ triangulo ΔEZ æquale erit. Perspicuum autem est & parallelogramma ipsorum dupla inter se æqualia esse.

quadrato ex EZ, atque est quadratum ex AZ æquale rectangulo ΓAB una cum quadrato ex BZ; commune auferatur quadratum ex BZ: reliquum igitur rectangulum ΓEB æquale est rectangulo ΓAB una cum rectangulo ΔEA: quare ΓEB rectangulum superat rectangulum ΓAB ipso ΔEA rectangulo. Q. E. D.

τὸ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ, κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ ΒΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΑΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὥστε καὶ τὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ. ὅπερ ἔ. δ.

Si vero punctum E sit inter A & B; rectangulum ΓEB minus est quam rectangulum ΓAB, eodem ipso spatio, videlicet rectangulo ΔEA: quod simili ratione demonstrabitur.

A E B Z Γ Δ

Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Α, Β σημείων· τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὅπερ δεῖ κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις.

Quod si punctum E sit inter B & Γ; eadem ratione rectangulum ΓEB minus erit quam rectangulum AEΔ rectangulo ABΔ.

A B E Z Γ Δ

Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Β, Γ, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΑΒΔ, τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ.

LEMMA V.

Sit recta AB æqualis ipsi BΓ, & duo puncta Δ, E sumantur. dico quadratum ex AB quater sumptum æquale esse rectangulo AΔΓ bis, una cum rectangulo AEΓ bis & quadratis ex BΔ, BE bis sumptis.

ΛΗΜΜΑ έ.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε· ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΒΕ τετραγώνων.

HOC autem perspicuum est, quadratum enim ex AB bis sumptum, propter bisectionem, æquale est [per 5. 2] rectangulo AΔΓ bis & quadrato ex ΔB bis: itemque quadratum ex AB bis est æquale rectangulo AEΓ bis & bis quadrato ex EB.

A Δ E B Γ

A Δ B E Γ

Τοῦτο δὲ φανερόν. τὸ μὲν γὰρ δὶς ἀπὸ ΑΒ, διὰ τὴν διχοτομίαν, ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΔ· τὸ δὲ δὶς ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΒ τετραγώνῳ.

LEMMA VI.

Sit recta AB æqualis ipsi ΓΔ, & sumatur punctum E. dico quadrata ex AE, EΔ æqualia esse quadratis ex BE, EΓ & rectangulo sub AΓΔ bis sumpto.

ΛΗΜΜΑ ϛ'.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ σημεῖον τὸ Ε. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

SEcetur BΓ bifariam in Z. & quoniam quadratum ex ΔZ bis sumptum æquale est [per 5. 2.] rect.

Τετμήσθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ἀπὸ τῆς ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ

Κεῖσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ καὶ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν· ὅλη ἄρα ἡ ΑΔ ὅλῃ τῇ ΔΒ ἴση.



Ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΔΕ: ergo [per 5.2.] rectangulum ΓΒΕ una cum quadrato ex ΔΕ, hoc est quadrato ex ΓΔ, æquale est quadrato ex ΔΒ; hoc est [ex hyp.] rectangulo ΑΓΒ una cum quadrato ex ΓΔ: quare rectangulum ΓΒΕ est æquale rectangulo ΑΓΒ: est igitur [per 1 6] linea ΑΓ æqualis ipsi ΕΒ. sed & ΓΔ æqualis est ΔΕ: tota igitur ΑΔ toti ΔΒ est æqualis.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.

Κεῖσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ ΓΕΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΒΔ, τῇ ΔΓ. ὅ. ἔ. δ.

LEMMA IX.

Sit rursus rectangulum ΒΑΓ una cum quadrato ex ΔΕ æquale quadrato ex ΑΔ. dico lineam ΓΔ æqualem esse ipsi ΔΒ.

Ponatur enim ipsi ΔΒ æqualis ΑΕ. & quoniam rectangulum ΒΑΓ una cum quadrato ex ΔΒ, hoc est cum quadrato ex ΕΑ, æquale est quadrato ex ΑΔ; commune auferatur rectangulum ΔΑΓ: ergo reliquum, quod sub ΒΔ & ΑΓ continetur, videlicet rectangulum ΕΑΓ, una cum quadrato ex ΕΑ, quod [per 3.2.] est rectangulum ΓΕΑ, æquale erit [per 2.2.] ipsi ΑΔΓ rectangulo: quare recta ΕΑ, hoc est ΒΔ, ipsi ΔΓ æqualis est.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς τρία σημεῖα τὰ Γ, Δ, Ε, οὕτως ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΕΓ ἴσον. ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δὶς τὰ ἡγούμενα, καὶ διελόντι· ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ.



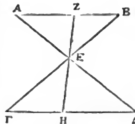
LEMMA X.

Sit recta linea ΑΒ, in qua sumantur tria puncta Γ, Δ, Ε, ita ut ΒΕ sit æqualis ΕΓ, & rectangulum ΑΕΔ æquale quadrato ex ΓΕ. dico ut ΒΑ ad ΑΓ ita esse ΒΔ ad ΔΓ.

Quoniam enim rectangulum ΑΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ; erit [per 17 6.] ut ΑΕ ad ΕΓ ita ΓΕ ad ΕΔ: unde per conversionem rationis, antecedentibusque bis sumptis, & dividendo proportionales erunt, nempe ΒΑ ad ΑΓ sicut ΒΔ ad ΔΓ.

data igitur sunt.

Sed licet & aliter demonstrare absque composita ratione hoc pacto. quoniam enim [per 4.6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita est ΔΕ ad ΕΓ; erit [per 1 6.] rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΕΒ ut rectangulum ΔΕΓ ad quadratum ex ΕΓ. ut autem quadratum ΕΒ ad quadratum ex ΒΖ ita [per 1. & 22. 6.] quadratum ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΗ: quare ex æquo [per 22.5.] ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΒΖ ita rectangulum ΔΕΓ ad quadratum ex ΓΗ. sed ut quadratum ex ΒΖ ad rectangulum ΒΖΑ ita quadratum ex ΓΗ ad rectangulum ΓΗΔ: ex æquo igitur, ut rectangulum ΑΕΒ ad rectangulum ΑΖΒ ita rectangulum ΓΕΔ ad rectangulum ΓΗΔ. Q. E. D.



Ἔστι δὲ καὶ οὕτως ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συγκειμένῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ οὕτω τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ. ὅ. ἔ. δ.

* Hoc est, adhibendo 19am quinti, quæ sic incipit, & postea conversionem rationis, & demum [per 16.6.] æquando rectangulum sub extremis cum rectangulo sub mediis. † Nempe ratio rectanguli ΑΕΒ ad ΓΕΔ componitur ex ratione ΑΕ ad ΕΔ, & ratione ΒΕ ad ΕΓ: & ratio ΑΖΒ ad ΓΗΔ componitur ex ratione ΑΖ ad ΗΔ, & ratione ΖΒ ad ΗΓ. Cumque componentes rationes æquales sint, constat propositum.

ΑΠΟΛ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Β, καὶ τῆς Α Β ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε Α Γ καὶ ἡ Β Δ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ Γ Β, Δ Α, συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α Δ Ε τρίγωνον τῷ Ε Β Γ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν Β Δ ἡ Α Ζ, τεταγμένως ἄρα κατῆκται. Ἔσται δή, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, ἴσον τὸ Α Δ Β Ζ παραλληλόγραμμον τῷ Α Γ Ζ τριγώνῳ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ Α Ε Β Ζ, λοιπὸν τὸ Α Δ Ε τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Β Ε τριγώνῳ.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ Η κέντρον. ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ Α Ζ, καὶ

Prop. I. *Theor.*

Si coni sectionem vel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter se conveniant; per tactus vero ducantur diametri, quæ contingentibus occurrant: triangula ad verticem facta sibi ipsis æqualia erunt.

SIT coni sectio vel circuli circumferentia A B, quam contingant rectæ A Γ, B Δ convenientes in puncto E, & per tactus A, B diametri sectionis Γ B, Δ A ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis Γ, Δ: dico triangulum A Δ E triangulo E B Γ æquale esse.

Ducatur enim à puncto A recta A Z ipsi B Δ parallela, quæ propterea ordinatim applicata erit. Erit igitur, in parabola, parallelogrammum A Δ B Z æquale [per 42.1.huj.] triangulo A Γ Z: quare, ablato communi A E B Z, triangulum A Δ E, quod relinquitur, æquale est triangulo Γ B E.

In aliis vero, conveniant diametri in centro H. & quoniam ordinatim applicata est A Z, &

ΑΗΓ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum ΑΗΖ ad triangulum ΑΗΓ ita triangulum ΑΗΖ ad triangulum ΔΗΒ: & propterea [per 9.5.] triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΗΒ est æquale. commune auferatur ΑΗΒΕ, [in hyperbola ΗΔΕΓ:] reliquum igitur triangulum ΑΕΔ reliquo ΓΕΒ æquale erit.

οὕτως τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΔΗΒ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΔΗΒ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΗΒΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕΒ.

EUTOCIUS.

Tertius conicorum liber, amicissime *Anthemi*, dignus ab antiquis existimatus est in quem multum studii ac diligentiæ conferretur, quod variæ ipsius editiones ostendunt. sed neque epistolam præfixam habet quemadmodum alii libri, neque commentarios in ipsum docti alicujus viri ex iis qui ante nos fuerunt, quanquam in eo multa sint contemplatione dignissima, ut ipse *Apollonius* in proœmio totius libri asserit. omnia autem à nobis manifeste explicata sunt ac demonstrata ex præcedentibus libris & commentariis in eosdem.

Τὸ τρίτον τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, πολλῆς μὲν φροντίδος ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἠξίωται, ὡς αἱ πολύτροποι αὐτοῦ ἐκδόσεις δηλοῦσιν. ὅτι δὲ ἐπιστολὴν ἔχει προγεγραμμένην, καθάπερ τὰ ἄλλα, οὐδὲ σχόλια εἰς αὐτὸ ἀξιόλογα τῶν πρὸ ἡμῶν εὑρίσκεται, καίτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀξίαν ἐχόντων θεωρίας, ὡς καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ παντὸς βιβλίου φησίν. πάντα δὲ ὑφ' ἡμῶν σαφῶς ἐκκεῖταί σοι δεικνύμενα ἐκ τῶν προλαβόντων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων.

Invenitur etiam alia demonstratio, in parabola quidem, hujusmodi.

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς.

Quoniam ΑΓ sectionem contingit, & ordinatim applicata est ΑΖ: erit [per 35. 1.huj.] & ΓΒ æqualis ipsi ΒΖ, & [per 34.1.] ΒΖ ipsi ΑΔ: ergo ΑΔ,ΓΒ inter se æquales sunt. sed & [per 34. 1.] parallelæ: triangulum igitur ΑΔΕ æquale est & simile triangulo ΕΒΓ.

Ἐπεὶ δὴ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΖ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΑΔ ἴση· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ παράλληλος· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ.

In reliquis vero, junctis ΑΒ, ΓΔ, dicendum.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ, λεκτέον.

Quoniam [per 37. 1. huj. & 16.6.] ut ΖΗ ad ΗΒ ita est ΒΗ ad ΗΓ, ut vero ΖΗ ad ΗΒ ita ΑΗ ad ΗΔ, est enim ΑΖ ipsi ΔΒ parallela; ergo [per 11. 5.] ut ΒΗ ad ΗΓ ita ΑΗ ad ΗΔ, & propterea [per 2. 6.] ΑΒ parallela est ipsi ΓΔ: triangulum igitur ΑΔΓ æquale est [per 37.1.] triangulo ΒΓΔ. & communi ΓΔΕ ablato, relinquitur triangulum ΑΔΕ triangulo ΓΒΕ æquale.

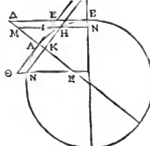
Ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, παράλληλος γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΓΔΕ, λοιπὸν τὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ.

Ad casus quod attinet, dicendum, in parabola quidem & hyperbola non dari casus; in ellipsi vero esse duos. vel enim contingentes rectæ in punctis tactuum diametris occurrentes productis etiam conveniunt, sicuti in textûs figura: vel ad alteras partes ad quas est Ε, quemadmodum in hyperbola.

Περὶ δὲ τῶν πτώσεων λεκτέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔχει δύο. αἱ γὰρ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰς ἁφὰς συμβάλλουσι ταῖς διαμέτροις καὶ ἐκβαλλόμεναι αὐταῖς συμπίπτουσιν, ὡς ἐν τῷ ῥητῷ κεῖται· ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη καθ' ἃ ἔστι τὸ Ε, ὥσπερ ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ Η Κ Λ, Η Μ Ζ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Λ Ι Μ τρίγωνον τῷ Γ Λ Η Ι τετραπλεύρῳ.

Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ Η Κ Μ τρίγωνον τῷ Α Λ τετραπλεύρῳ, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ Ι Κ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ Λ Ι Μ τρίγωνον ἴσον τῷ Γ Η τετραπλεύρῳ.



ducantur Η Κ Λ, Η Μ Ζ contingentibus parallelæ: dico triangulum Λ Ι Μ æquale esse quadrilatero Γ Λ Η Ι.

Quoniam enim ostensum est [ad 42. & 43. 1. huj.] Η Κ Μ triangulum æquale quadrilatero Α Λ; commune apponatur vel auferatur quadrilaterum Ι Κ, & fiet triangulum Λ Ι Μ quadrilatero Γ Η æquale.

EUTOCIUS.

Τὰς πτώσεις τούτου θεωρήματος εὑρήσεις διὰ τοῦ μβ΄. καὶ μγ΄. θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου, καὶ τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων σχολίων. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι ἐὰν τὸ Η σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β ληφθῇ, ὥστε παραλλήλους εἶναι τὰς Δ Ε Β, Μ Η Ζ· Λ Ε Γ, Λ Η Κ, ἐκβληθῇ δὲ ἡ Λ Κ μέχρι τῆς τομῆς ὡς κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ Β Δ παράλληλος ἀχθῇ ἡ Ν Ξ· ἔσται διὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, κατὰ τὸ μθ΄. καὶ ν΄. θεώρημα καὶ τὸ τούτων σχόλιον, τὸ Κ Ν Ξ τρίγωνον τῷ Κ Γ τετραπλεύρῳ ἴσον. ἀλλὰ τὸ Κ Ν Ξ ὅμοιόν ἐστι τῷ Κ Μ Η, διότι παράλληλός ἐστιν ἡ Μ Η τῇ Ν Ξ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἴσον, διότι ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ Λ Γ, παράλληλος δὲ αὐτῇ ἡ Η Ν, καὶ διάμετρος ἡ Μ Ξ, καὶ ἴση ἄρα ἡ Ν Κ τῇ Κ Η. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ Κ Ν Ξ τρίγωνον τῷ Κ Γ τετραπλεύρῳ· κοινοῦ προστεθέντος τοῦ Λ Ν, γίνεται τὸ Λ Θ Ξ τρίγωνον τῷ Ν Γ τετραπλεύρῳ ἴσον.

Casus hujus theorematis invenientur per quadragesimum secundum & quadragesimum tertium theorema primi libri, & commentarios in ea conscriptos. oportet autem scire, si punctum Η inter Α, Β sumatur, ita ut æquidistantes sint Δ Ε Β, Μ Η Ζ, itemque Λ Ε Γ, Λ Η Κ, & producatur Λ Κ usque ad sectionem in Ν, & per Ν ducatur Ν Ξ ipsi Β Δ æquidistans: ex iis quæ tradita sunt in theoremate quadragesimo nono & quinquagesimo primi libri, & in ipsa commentariis, erit triangulum Κ Ν Ξ æquale quadrilatero Κ Γ. sed triangulum Κ Ν Ξ simile est triangulo Κ Μ Η, cum Μ Η æquidistans sit Ν Ξ. est autem & eidem æquale, quoniam Λ Γ est recta contingens, cui æquidistat Η Ν, & Μ Ξ est diameter, & Ν Κ æqualis Κ Η. quoniam igitur triangulum Κ Ν Ξ æquale est quadrilatero Κ Γ; adjiciatur commune quadrilaterum Λ Ν, ac fiet triangulum Λ Θ Ξ æquale quadrilatero Ν Γ.

PROP.



bus punctis Z, H, ducantur per Z quidem lineæ contingentibus parallelæ Z Θ K Λ, N Z I M, per H vero ducantur N H Ξ O, H Θ Π P: dico quadrilaterum Λ H quadrilatero M Θ, & quadrilaterum Λ N ipsi P N æquale esse.

Quoniam enim antea [ad 2. 3. huj.] demonstratum est triangulum P Π A æquale quadrilatero Γ H, & triangulum A M I quadrilatero Γ Z; est autem A P Π triangulum majus quam triangulum A M I quadrilatero Π M: erit & quadrilaterum Γ H majus quam Γ Z eodem M Π quadrilatero: & propterea quadrilaterum Γ H æquale est quadrilateris Γ Z, M Π, hoc est ipsis Γ Θ, P Z. commune auferatur Γ Θ: reliquum igitur quadrilaterum Λ H æquale est reliquo Θ M: quare & totum Λ N toti P N æquale erit.

καὶ διὰ μὲν τοῦ Z τῆς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε Z Θ K Λ καὶ ἡ N Z I M, διὰ δὲ τοῦ H ἥ τε N H Ξ O καὶ H Θ Π P· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Λ H τετράπλευρον τῷ M Θ, τὸ δὲ Λ N τῷ P N.

Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ P Π A τρίγωνον τῷ Γ H τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ A M I τῷ Γ Z, τὸ δὲ A P Π τοῦ A M I μεῖζόν ἐστι τῷ Π M τετραπλεύρῳ· καὶ τὸ Γ H ἄρα τοῦ Γ Z μεῖζόν ἐστι τῷ M Π τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ Γ H ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Z καὶ τῷ M Π, τουτέστι τῷ Γ Θ καὶ τῷ P Z. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ Θ· λοιπὸν ἄρα τὸ Λ H ἴσον ἐστὶ τῷ Θ M· καὶ ὅλον ἄρα τὸ Λ N τῷ P N ἴσον ἐστίν.

EUTOCIUS.

Hoc theorema plures casus habet, quos ut in antecedente inveniemus. sed animadvertendum est duo puncta quæ sumuntur, vel esse inter duas diametros, vel extra & ad easdem partes. nam si alterum quidem extra sumatur, alterum vero inter diametros, non constituentur quadrilatera de quibus in propositione dictum est. sed neque ad utrasque diametrorum partes constituentur.

Τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις, ἃς εὑρήσομεν ὁμοίως τοῖς πρὸ αὐτοῦ. δεῖ μέντοι ἐπισκέψασθαι ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ μεταξὺ δεῖ τῶν δύο διαμέτρων, ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰ γὰρ τὸ μὲν ἕτερον ἐκτὸς λάβοιμεν, τὸ δὲ ἕτερον μεταξὺ τῶν διαμέτρων, οὐ συνίσταται τὰ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενα τετράπλευρα. ἀλλ' οὐδὲ ἐφ' ἑκάτερα τῶν διαμέτρων.

ΠΡΟ-

πτώσεις, ἐπὶ τῶν ἀντικειμένων λέγει ἀδιορίστως· καί τινα μὲν τῶν ἀντιγράφων τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς ἔχει, τινὰ δὲ οὐκέτι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν μίας συμπιπτούσας ἀλλήλαις (ὡς εἴρηται ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ) ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῶν ἀσυμπτώτων. καὶ οὕτως δὲ κἀκείνῳ συμβαίνει τὰ τῆς προτάσεως. ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις καταγράφουσιν ἐπισκέπτεσθαι. καὶ δῆλον ὅτι, εἰ μὲν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ πλαγία διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· εἰ δὲ ἑκατέρας μία ἐστὶν ἐφαπτομένη, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ ὀρθία διάμετρός ἐστιν.

quuntur, scire oportet *Apollonium* indeterminate dicere *oppositas sectiones*: & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una sectione: nonnulli vero non duas contingentes in una, sed singulas in utraque sectione contingentes, quæ inter se conveniunt (uti dictum est in secundo libro) in angulo qui deinceps est angulo asymptotôn; & ita eveniunt ea quæ in propositione dicuntur. licet autem iis, qui volunt, hoc descriptis figuris considerare. ac manifestum est, si unam sectionum duæ rectæ lineæ contingant; quæ per punctum concursûs earum & centrum ducitur recta, oppositarum sectionum transversa diameter est: si vero utramque sectionem singulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, est recta diameter sectionum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ, τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει, τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ.

Prop. V. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant; & in quavis sectionum aliquod punctum sumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidistans, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: triangulum, quod ab ipsis constituitur ad diametrum per occursum ductam, à triangulo quod est ad occursum contingentium differt, triangulo facto ad contingentem & ad diametrum illam quæ per tactum ducitur.

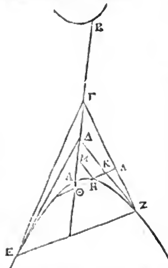
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέ-

SINT oppositæ sectiones Α, Β, quarum centrum Γ; & lineæ contingentes sint ΕΔ, ΔΖ,

S f quæ

Quintum quidem theorema satis constat: verumtamen in figura quæ diametrum habet rectam, ita dicemus. quoniam ostensum est [ad 45. I. huj.] triangulum ΗΘΜ majus esse quam triangulum ΓΛΘ triangulo ΓΔΖ; erit triangulum ΗΘΜ æquale triangulo ΓΘΛ una cum triangulo ΓΔΖ: ergo & æquale triangulo ΚΔΘ una cum triangulo ΚΛΖ: triangulum igitur ΗΜΘ à triangulo ΚΔΘ differt triangulo ΚΛΖ. communi ablato triangulo ΘΔΚ; reliquum ΚΛΖ triangulum æquale est quadrilatero ΚΔΜΗ.

In figura vero quæ transversam diametrum habet, hoc modo. quoniam prius demonstratum est [ad 44. I.] ΓΛΘ triangulum majus esse quam triangulum ΜΘΗ triangulo ΓΔΖ; erit ΓΘΛ triangulum æquale triangulo ΘΗΜ una cum triangulo ΓΔΖ. commune auferatur quadrilaterum ΓΔΚΛ: reliquum igitur ΚΘΔ triangulum æquale est triangulo ΘΗΜ una cum triangulo ΛΖΚ. rursus commune auferatur ΜΘΗ: ergo triangulum ΖΚΛ quadrilatero ΔΜΗΚ æquale erit. Casus habet plures quos ex demonstratis in quadragesimo quarto & quadragesimo quinto theoremate primi libri addiscere oportet. Cum autem dicitur, *auferatur vel apponatur quadrilaterum vel triangulum*, ablationes & appositiones juxta proprietatem casuum fieri debent. quoniam vero sequentia plures casus continent, ob punctorum sumptiones & parallelas lineas; ne confusionem commentariis afferamus multas figuras describentes, unam in singulis theorematibus faciemus, quæ oppositas sectiones & diametros & lineas contingentes habeat; ut servetur illud quod in propositione dictum est. *Iisdem positis*, & parallelas quousque occurrant producemus, in unoquoque occursu literas ponentes, ita ut quilibet, observatis consequentiis, facile possit casus omnes demonstrare.



Ἔστι δὲ σαφὲς τὸ πέμπτον θεώρημα· λεκτέον δὲ ἐπὶ μὲν τῆς καταγραφῆς τῆς ἐχούσης τὴν ὀρθίαν διάμετρον· ἐπεὶ δέδεικται τὸ ΗΘΜ τοῦ ΓΛΘ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΗΘΜ τῷ ΓΘΛ καὶ τῷ ΓΔΖ· ὥστε καὶ τῷ ΚΔΘ μετὰ τοῦ ΚΛΖ· τὸ ἄρα ΗΜΘ τοῦ ΚΔΘ διαφέρει τῷ ΚΛΖ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΘΔΚ, λοιπὸν τὸ ΚΛΖ ἴσον τῷ ΚΔΜΗ.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐχούσης τὴν πλαγίαν διάμετρον· ἐπειδὴ προδέδεικται τὸ ΓΛΘ τοῦ ΜΘΗ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘΛ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΓΔΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΔΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΛΚΖ. ἔτι κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΘΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΚΛ τῷ ΔΜΗΚ ἴσον. Πτώσεις δ' ἔχει πολλάς, ἃς δεῖ ἐφαρμόζειν ἀπὸ τῶν δεδειγμένων ἐν τῷ μδ'. καὶ με'. θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου. Ἐν δὲ τῷ λέγειν "ἀφῃρήσθω ἢ προσκείσθω τετράπλευρον ἢ τρίγωνον", τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις κατὰ τὴν οἰκειότητα τῶν πτώσεων χρὴ ποιεῖσθαι. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἑξῆς πολύπτωτά ἐστι διὰ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα καὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα μὴ ὄχλον παρέχωμεν τοῖς ὑπομνήμασι, πολλὰς ποιοῦντες καταγραφὰς καθ' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων, μίαν ποιοῦμεν ἔχουσαν τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἵνα σώζηται τὸ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενον. "τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων" καὶ τὰς παραλλήλους πάσας ποιῶμεν συμπίπτειν, στοιχεῖα καθ' ἑκάστην σύμπτωσιν θέντες, ἵνα φανερὸν ᾖ τοῖς τὰ ἀκόλουθα δυναμένοις πάσας τὰς πτώσεις ἀποδεικνύειν.

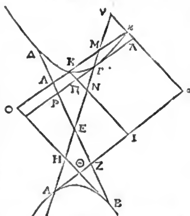
ΠΡΟ-

ΑΖ ἦκ]) ἡ ΚΛ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ.

ipsi ΒΔ occurrens, & ducta est ΚΛ parallela ipsi ΑΖ: triangulum ΑΙΝ [per 2. 3. huj.] quadrilatero ΚΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἑξῆς πάντων, ὡς εἴρηται ἐν τοῖς τοῦ πέμπτου θεωρήματος σχολίοις, πολλαί εἰσιν· ἐπὶ πασῶν μέντοι τὰ αὐτὰ συμβαίνει. ὅμως δὲ πλείονος σαφηνείας, καταγεγράφθω μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· φανερὸν δὴ ὅτι παράλληλός ἐστι τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΜΛ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ θεωρήματι, κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν, τὸ ΓΠΝ τῷ ΛΚΠΡ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΜΠ· τὸ ἄρα ΜΚΝ τρίγωνον τῷ ΜΛΡΓ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΡΕ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ΑΕΖ, διὰ τὰ ἐν τῷ μαʹ. τοῦ πρώτου βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΚΝ καὶ τῷ ΑΕΖ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΚΜΝ, λοιπὸν τὸ ΑΕΖ τῷ ΚΛΕΝ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΛΖΙ ἴσον ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΝΗΟ.

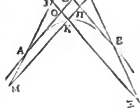


Casus hujus theorematis, & quidem omnium sequentium, multi sunt; ut dictum est in scholiis ad quintam propositionem: eadem tamen eveniunt in singulis. Verum, majoris evidentiæ gratiâ, describatur eorum unus, & ducatur recta ΓΠΡ sectionem contingens in Γ: patet igitur eam ipsis ΑΖ, ΜΛ parallelam esse. Quoniam autem, per secundum theorema hujus, in figura hyperbolæ, demonstratum est triangulum ΓΠΝ quadrilatero ΛΚΠΡ æquale, commune addatur quadrilaterum ΜΠ; ac triangulum ΜΚΝ quadrilatero ΜΛΡΓ æquale erit. commune adjiciatur triangulum ΓΡΕ, ipsi ΑΕΖ [per 41. primi huj.] æquale: erit igitur totum triangulum ΜΕΛ triangulis ΜΚΝ, ΑΕΖ simul æquale. utrinque auferatur commune triangulum ΚΜΝ; ac reliquum ΑΕΖ quadrilatero ΚΛΕΝ æquabitur. dein addatur commune quadrilaterum ΖΕΝΙ; totum igitur triangulum ΑΙΝ quadrilatero ΚΛΖΙ æquale est †. Pariter triangulum ΒΟΛ æquale erit quadrilatero ΚΝΗΟ.

† Ac si producatur ΛΜ ad κ, ac ducatur νκα ipsi ΒΗ parallela: erunt, ob ΚΜ ipsi Μκ æqualem, triangula ΚΜΝ, κΜν æqualia; ac proinde quadrilaterum ΙΝνα parallelogrammo Κα æquale. adjiciantur æqualia ΑΙΝ & ΚΛΖΙ, ac fiet triangulum Ανα quadrilatero κΛΖα æquale.

Prop.

lum AEZ æquale quadrilatero KE. est autem [per *Eutoc.* 6. 3. huj.] & BEH triangulum quadrilatero ΛE æquale: & [per 1. 3. huj.] triangulum ΛEZ triangulo BHE: ergo & quadrilaterum ΛE æquale est quadrilatero IKPE. commune apponatur NE: totum igitur TK toti IΛ; & KT ipsi PΛ æquale erit.



τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἔστι τὸ ΛΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΛΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΤ τῷ ΡΛ.

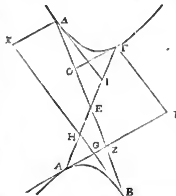
Prop. VIII. *Theor.*

Iisdem positis, pro punctis K, Λ sumantur Γ, Δ, in quibus diametri cum sectionibus conveniunt; & per ipsa contingentibus parallelæ ducantur: dico ΞE quadrilaterum quadrilatero ET; & quadrilaterum ΞI quadrilatero TO æquale esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΕ τετράπλευρον τῷ ΕΤ, καὶ τὸ ΞΙ τῷ ΟΤ.

QUONIAM enim triangulum AHΘ ostensum est [per 1. 3. huj.] æquale triangulo ΘBZ: & [per 1. lem.] linea quæ à puncto A ducitur ad B æquidistat lineæ à puncto H ad Z ductæ: erit [per 2. 6.] ut AE ad EH ita BE ad EZ; & per conversionem rationis ut EA ad AH ita EB ad BZ. est autem ut ΓA ad AE ita ΔB ad BE; utraque enim [per 30. 1. huj.] utriusque est dupla: ergo ex æquali [per 22. 5.] ut ΓA ad AH ita ΔB ad BZ. & sunt triangula similia, propter lineas [ex hyp.] parallelas: ut igitur ΓTA trian-



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα, διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ

ΑΘΗ

ρον. ἐπεὶ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΛΕΖ, τὸ δὲ ΛΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ· ὥστε ἢ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΛΟ.

... quo supposito demonstratum est [per 4. 3. huj.] ΓΕΟ triangulum æquale triangulo ΛΕΖ; triangulumque ΛΕΖ [per corol. 2. 3. huj.] æquale est quadrilatero ΚΕ; ergo & triangulum ΓΡΜ quadrilatero ΚΟ; & quadrilaterum ΛΜ quadrilatero ΛΟ est æquale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα, μὴ καθ' ὃ συμβάλλουσι διάμετροι ταῖς τομαῖς· δεικτέον δὴ ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΛΤ, ΚΙ· μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τοῦ ΥΩΛ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ, καὶ τὸ

Prop. X. *Theor.*

Iisdem positis, sumantur Κ, Λ, quæ non sint puncta in quibus diametri sectionibus occurrunt: demonstrandum est quadrilaterum ΛΤΡΧ quadrilatero ΩΧΚΙ æquale esse.

Quoniam enim rectæ lineæ ΑΖ, ΒΗ sectionem contingunt; & per tactus diametri ΑΕ, ΒΕ ducuntur; & sunt ΛΤ, ΚΙ contingentibus parallelæ: triangulum ΤΥΕ majus est [per 43. 1. huj.] quam triangulum ΥΩΛ triangulo ΕΖΑ. similiter & triangulum ΞΕΙ majus est quam triangulum ΞΡΚ triangulo ΒΕΗ. sed [per 1. 3. huj.] triangulum ΑΕΖ æquale est triangulo ΒΕΗ: quare eodem excessu & triangulum ΤΕΥ excedit triangulum ΥΩΛ, quo triangulum ΞΕΙ excedit ipsum ΞΡΚ:

Tt

trum Θ, junganturque Α Δ & Ε Θ Η; & sumpto in sectione Α Β quovis puncto Β, ducatur Β Ζ Λ quidem ipsi Α Η parallela, Β Μ vero parallela ipsi Α Ε: dico triangulum Β Ζ Μ à triangulo Α Κ Λ differre triangulo Κ Ε Ζ.

Lineam enim Α Δ ab ipsa Ε Θ bifariam secari [ex 38, & 39. 2. huj.] perspicuum est; & Ε Θ diametrum esse conjugatam ei, quæ per Θ ducta ipsi Α Δ æquidistat: quare Α Η applicata est ad Ε Η. quoniam igitur Η Ε diameter est, lineaque Α Ε sectionem contingit, & applicata est Α Η, à sumpto autem in sectione puncto Β ad Ε Η applicatur Β Ζ ipsi Α Η parallela, & Β Μ parallela ipsi Α Ε: patet triangulum Β Μ Ζ [per 45. 1. huj.] à triangulo Λ Θ Ζ differre triangulo Θ Λ Ε: ergo Β Ζ Μ triangulum à triangulo Α Κ Λ differt triangulo Κ Ζ Ε; ac simul patet quadrilaterum Β Κ Ε Μ triangulo Α Κ Λ æquale esse.

ἤχθωσαν ἥ τε Α Δ καὶ ἡ Ε Θ Η, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς Α Β τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν Α Η ἡ Β Ζ Λ, παρὰ δὲ τὴν Α Ε ἡ Β Μ· λέγω ὅτι τὸ Β Ζ Μ τρίγωνον τοῦ Α Κ Λ διαφέρει τῷ Κ Ε Ζ.

Ὅτι μὲν γὰρ ἡ Α Δ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς Ε Θ φανερὸν, καὶ ὅτι ἡ Ε Θ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν Α Δ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ Α Η ἐπὶ τὴν Ε Η. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ Η Ε, καὶ ἐφαπτομένη ἡ Α Ε, κατηγμένη δὲ ἡ Α Η, καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β κατήγονται ἐπὶ τὴν Ε Η ἡ μὲν Β Ζ παρὰ τὴν Α Η, ἡ δὲ Β Μ παρὰ τὴν Α Ε· δῆλον ὅτι τὸ Β Μ Ζ τρίγωνον τοῦ Λ Θ Ζ διαφέρει τῷ Θ Α Ε· ὥστε καὶ τὸ Β Ζ Μ τοῦ Α Κ Λ διαφέρει τῷ Κ Ζ Ε· καὶ συναποδέδεικται ὅτι τὸ Β Κ Ε Μ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ Λ Κ Α τριγώνῳ.

Prop. XII. *Theor.*

Iisdem positis, si in una sectione sumantur duo puncta, & ab utrisque similiter æquidistantes ducantur: quadrilatera ab ipsis constituta inter se æqualia erunt.

Sint eadem quæ supra; & in sectione Α Β sumantur quævis puncta Β, Κ, à quibus ducantur lineæ Λ Β Μ Ν, Κ Ξ Ο Τ Π ipsi Α Δ parallelæ, itemque Β Ξ Ρ, Λ Κ Σ parallelæ ipsi Α Ε: dico quadrilaterum Β Π æquale esse quadrilatero Κ Ρ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν ὁμοίως· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα.

Ἐστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Α Β τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ Α Δ αἱ Λ Β Μ Ν, Κ Ξ Ο Τ Π, τῇ δὲ Α Ε αἱ Β Ξ Ρ, Λ Κ Σ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Β Π τῷ Κ Ρ.

Ἐπεὶ

ται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστὶν ἡ ΑΜ· συζυγὴς ἐστιν ἡ ΑΜ διάμετρος τῇ ΒΔ διαμέτρῳ, ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος. διὰ δὲ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ [a] ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. καὶ εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.

nem B contingit, & per tactum diameter est ΔΘΒ, duciturque AM parallela ipsi BE; erit [per 20. 2. huj.] AM diameter conjugata ipsi ΔΒ, quæ secunda diameter appellatur. [a] propterea autem AK ad BΔ ordinatim est applicata, contingitque AH: ergo [per 38. 1.huj.] rectangulum KΘH æquale est quadrato BΘ: & [per 17. 6.] ut KΘ ad ΘB ita BΘ ad ΘH. sed [per 4. 6.] ut KΘ ad ΘB ita KA ad BZ & AΘ ad ΘZ: ut igitur AΘ ad ΘZ ita BΘ ad ΘH. & sunt anguli BΘZ HΘZ duobus rectis æquales: ergo AHΘ triangulum triangulo BΘZ æquale erit.

EUTOCIUS.

[a] Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, καί εἰσιν αἱ πρὸς τὸ Θ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.] Ἐκκείσθω χωρὶς ἡ καταγραφὴ μόνων τῶν τριγώνων, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΘ ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΞ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ, καὶ ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΞ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗΘ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΘΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ

[a] Quoniam ut AΘ ad ΘZ ita BΘ ad ΘH, & sunt anguli BΘZ, HΘZ duobus rectis æquales: ergo AHΘ triangulum triangulo BΘZ æquale erit.] Describantur seorsum triangula; & producta AΘ ad Ξ, fiat ut HΘ ad ΘB ita ZΘ ad ΘΞ. itaque quoniam ut BΘ ad ΘH ita est AΘ ad ΘZ & ΞΘ ad ΘZ: erit [per 9.5.] AΘ ipsi ΘΞ æqualis: & propterea [per 1. 6.] triangulum AHΘ æquale triangulo HΘΞ. sed ut ΞΘ ad ΘZ ita ΘB ad ΘH, & circa æquales angulos,

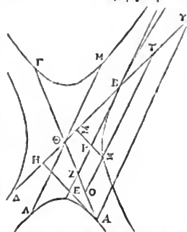
lineæ parallelæ contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ad centrum conſtituitur, à triangulo circa eundem angulum differt, triangulo baſim habente lineam contingentem & verticem ſectionum centrum.

λοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῆς διαμέτρου· τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

SINT alia quidem eadem; ſumatur autem punctum in B ſectione, quod ſit Ξ; & per ipſum ducatur Ξ Ρ Σ parallela ipſi Α Η, & Ο Ξ Τ parallela ipſi Β Ε: dico triangulum Ο Θ Τ à triangulo Ξ Σ Τ differre triangulo Θ Β Ζ.

ΕΣΤΩ τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν Α Η ἤχθωσαν ἡ Ξ Ρ Σ, παρὰ δὲ τὴν Β Ε ἡ Ο Ξ Τ· λέγω ὅτι τὸ Ο Θ Τ τρίγωνον τοῦ Ξ Σ Τ διαφέρει τῷ Θ Β Ζ.

Ducatur enim à puncto Α linea Α Υ ipſi Β Ζ parallela. quoniam igitur ex iis quæ dicta ſunt [in præc.] ſectionis Α Λ diameter eſt Λ Θ Μ; conjugata autem ipſi & ſecunda diameter Δ Θ Β; atque à puncto Α ducitur Α Η ſectionem contingens; & applicata eſt Α Υ quæ ipſi Β Ζ parallela eſt: habebit [per 40. 1. huj.] Α Υ ad Υ Η rationem compoſitam ex ratione Θ Υ ad Υ Α & ex ratione tranſverſi lateris figuræ quæ fit ad Β Ζ ad latus rectum. ſed [per 4. 6.] ut Α Υ ad Υ Η ita Ξ Τ ad Τ Σ, & ut Θ Υ ad Υ Α ita Θ Τ ad Τ Ο & Θ Β ad Β Ζ; ut autem figuræ, quæ ad Λ Μ, tranſverſum latus ad rectum, ita [ut oſtenſum in nota ad 20.2.] figuræ, quæ ad Β Δ, rectum latus ad tranſverſum: ergo Ξ Τ ad Τ Σ rationem habebit compoſitam ex



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν Β Ζ ἡ Α Υ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, τῆς Α Λ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ Λ Θ Μ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ Δ Θ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ Α Η, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν Β Ζ ἡ Α Υ· ἕξει ἡ Α Υ πρὸς τὴν Υ Η τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Υ πρὸς Υ Α καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ Λ Μ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ Α Υ πρὸς Υ Η οὕτως ἡ Ξ Τ πρὸς Τ Σ, ὡς δὲ ἡ Θ Υ πρὸς Υ Α οὕτως ἡ Θ Τ πρὸς Τ Ο καὶ ἡ Θ Β πρὸς Β Ζ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ Λ Μ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ τοῦ πρὸς τῇ Β Δ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· ἕξει ἄρα ἡ Ξ Τ πρὸς Τ Σ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Θ Β πρὸς

[illegible] αὐ- τοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΤ· λέγω ὅτι τὸ ΣΛΤ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερὸν δὴ ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΣΛΘΟ. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΛΕ, γεγονέτω ὡς ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστὶν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἴδους. δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ οὕτως ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἴδους. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ,

ΒΓ parallela, & ΣΤ ipsi ΑΕ: dico ΣΑΤ triangulum majus esse quam triangulum ΘΑΖ, triangulo ΘΓΒ.

Ducatur enim per Θ, ΞΘΗ parallela ipsi ΒΓ; & per Η ipsi ΑΕ parallela ducatur ΚΙΗ, & ΣΟ parallela ipsi ΒΤ: quare perspicuum est [per 20. 2. huj.] diametrum ΞΗ conjugatam esse ipsi ΒΤ; & ΣΟ, quia parallela ipsi ΒΤ, ad ΘΗΟ ordinatim esse applicatam; itemque parallelogrammum esse ΣΑΘΟ. Quoniam igitur ΒΓ sectionem contingit, ducitur que ΒΘ per tactum, & contingens alia est ΑΕ; fiat ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΝ ad duplam ipsius ΒΓ: & erit [per 50.1.huj.] ΜΝ ea quæ figuræ ad ΒΤ constitutæ rectum latus appellatur. bifariam secetur ΜΝ in Π: erit igitur ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΒΓ. deinde fiat ut ΞΗ ad ΤΒ ita ΤΒ ad lineam Ρ: erit igitur Ρ [ex natura secund. diam.] latus rectum figuræ quæ fit ad ΞΗ. itaque quoniam ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΓΒ, & [per 1. 6.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita quadratum ΔΒ ad ΔΒΕ rectangulum; ut autem ΜΠ ad ΓΒ ita rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ: erit igitur ut quadratum ex ΔΒ ad rectangulum ΔΒΕ ita rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ. sed rectangulum sub ΜΠ, ΒΘ æquale est quadrato ex ΘΗ; propterea quod

triangulo ΓΒΘ. Rursus quoniam ΘΒ ad ΒΓ compositam rationem habet ex ratione ΘΒ ad ΜΠ & ex ratione ΜΠ ad ΒΓ; & ut ΘΒ ad ΜΠ ita ΤΒ ad ΜΝ, & ita latus rectum Ρ [ut ostensum in nota ad 20. 2. huj.] ad ΞΗ; ut autem ΜΠ ad ΒΓ ita ΔΒ ad ΒΕ: habebit igitur ΘΒ ad ΒΓ rationem compositam ex ratione ΔΒ ad ΒΕ & ratione Ρ ad ΞΗ. & quoniam parallelæ sunt ΒΓ, ΣΛ, triangulum ΘΓΒ simile est triangulo ΘΛΖ; & ob id ut ΘΒ ad ΒΓ ita est ΘΛ ad ΛΖ: quare ΘΛ ad ΛΖ compositam rationem habet ex ratione ipsius Ρ ad ΞΗ & ratione ΔΒ ad ΒΕ, hoc est ΗΘ ad ΘΙ. quoniam igitur ΗΣ est hyperbola, cujus diameter quidem ΞΗ, rectum vero latus Ρ; & ab aliquo ipsius puncto Σ applicatur ΣΟ, describiturque ab ea quæ ex centro, videlicet à ΘΗ, figura ΘΙΗ; & ab applicata ΣΟ, vel ΘΛ ipsi [per 34. 1.] æquali, figura ΘΛΖ; à ΘΟ autem, quæ est inter centrum & applicatam, vel à ΣΛ ipsi ΘΟ æquali, describitur ΣΛΥ figura similis figuræ ΘΙΗ quæ fit ab eâ quæ ex centro; & rationes habentur compositæ, prout dictum est †: erit [per 41. 1. huj.] triangulum ΣΛΥ majus quam ΘΛΖ triangulum triangulo ΘΗΙ, hoc est [ut modo ostensum] triangulo ΘΓΒ.

ΜΝ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· ἔχει ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΣΛ, καὶ ὅμοιον τὸ ΘΓΒ τρίγωνον τῷ ΘΛΖ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ· ἔχει ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ρ πρὸς ΞΗ καὶ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΙ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΗΣ, διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞΗ ὀρθίαν δὲ τὴν Ρ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣΟ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘΗ εἶδος τὸ ΘΙΗ· ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣΟ, ἤτοι τῆς ΘΛ ἴσης αὐτῇ, τὸ ΘΛΖ· ἀπὸ δὲ τῆς ΘΟ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης, ἤτοι τῆς ΣΛ ἴσης αὐτῇ, τὸ ΣΛΥ εἶδος, ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ΘΙΗ, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὡς εἴρηται· τὸ ἄρα ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.



* Quod autem rectangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΓΒΗ sit ut triangulum ΔΒΕ ad ΓΒΗ triangulum, sic ostenditur. A punctis Δ & Γ in ΒΗ demittantur normales ΔΥ, ΓΖ: eritque ut ΔΥ ad ΔΒ ita ΓΖ ad ΓΒ. ut autem ΔΥ ad ΔΒ ita rectangulum sub ΔΥ & ΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ; & ut ΓΖ ad ΓΒ ita rectangulum sub ΓΖ & ΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ: est igitur ut rectangulum sub ΔΥ & ΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ ita rectangulum sub ΓΖ & ΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ. Sed rectangulum sub ΔΥ & ΒΕ æquale est duplo triangulo ΔΒΕ, & rectangulum sub ΓΖ & ΒΗ æquale duplo triangulo ΓΒΗ: est igitur ut triangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ ita triangulum ΓΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ, & permutando rectangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΓΒΗ ut triangulum ΔΒΕ ad ΓΒΗ triangulum.

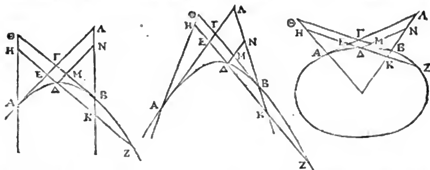
† Nempe triangulum ΛΘΖ est semissis parallelogrammi, cujus diameter est ΘΖ, æquianguli parallelogrammis, quorum semisses sunt triangula ΛΥΣ, ΘΙΗ & diametri ΥΣ, ΙΗ; estque [ut modo ostensum] ΘΛ (hoc est ΣΟ) ad ΛΖ in ratione composita ex ratione ΘΗ ad ΘΙ & ratione Ρ ad ΞΗ: ergo [per 41. 1. huj.] parallelogrammum, cujus dimidium ΛΥΣ & ΥΣ diameter, erit æquale parallelogrammo simili, cujus dimidium est ΙΘΗ & ΙΗ diameter, simul & parallelogrammo æquiangulo, cujus dimidium ΘΛΖ cujusque diameter est ΘΖ. & consequenter triangulum ΛΥΣ æquale est triangulis ΙΘΗ, ΘΛΖ simul sumptis. Ac manifestum est quadrilaterum ΘΖ, ΣΥ triangulo ΙΘΗ, hoc est triangulo ΘΓΒ, æqualem esse.

*

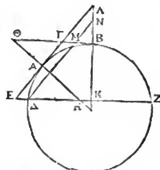
ΠΡΟ-

ZEΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ KE. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ EΛK τρίγωνον τῷ ΔNK,

que quoniam ZK æqualis est KΔ, & ipsi adjicitur ΔB; rectangulum ZEΔ una cum quadrato ex ΔK æquale erit [per 6.2.] quadrato ex KE. &

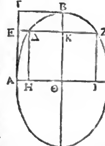


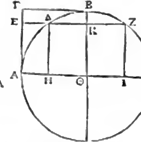
ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ EK πρὸς τὸ ἀπὸ KΔ οὕτως τὸ EΛK τρίγωνον πρὸς τὸ ΔNK· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ EK πρὸς ὅλον τὸ EΛK τρίγωνον οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔK πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔNK τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ZEΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ EK πρὸς τὸ EΛK τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ EK πρὸς τὸ EΛK οὕτως τὸ ἀπὸ ΓB πρὸς τὸ ΛΓB· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ZEΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον οὕτως



quoniam triangulum EΛK simile est triangulo ΔNK: erit [per 3.lem.3.huj.] ut quadratum ex EK ad quadratum ex KΔ ita triangulum EΛK ad triangulum ΔNK; & permutando ut totum quadratum ex EK ad totum triangulum EΛK ita ablatum quadratum ex ΔK ad ablatum triangulum ΔNK: ergo [per 19.5.] est reliquum rectangulum ZEΔ ad reliquum quadrilaterum ΔΛ ut quadratum ex EK ad triangulum EΛK. sed [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex EK ad EΛK triangulum ita est quadratum ex ΓB ad triangulum ΛΓB: ut igitur ZEΔ rectangulum ad quadrilaterum ΔΛ ita quadratum

Quoniam [per 21. 1. huj.] ut quadratum ex ΒΘ ad rectangulum ΛΘΑ ita quadratum ex ΔΗ ad rectangulum ΛΗΑ; atque est rectangulum quidem ΛΘΑ quadrato ex ΑΘ æquale, rectangulum autem ΛΗΑ æquale rectangulo ΙΑΗ; (recta enim ΑΘ æqualis est ΘΛ & ΔΚ ipsi ΚΖ, ut & æqualis ΗΘ ipsi ΘΙ & ΑΗ ipsi ΙΛ) erit igitur ut quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΒ, hoc est quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ, ita rectangulum ΙΑΗ ad quadratum ex ΔΗ, hoc est rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΕΑ.





ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΗΑ· καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ ΛΘΑ ἴσον τῷ ἀπὸ ΘΑ, τὸ δὲ ὑπὸ ΛΗΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΙΑΗ· (ἴση γὰρ ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ, καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ, καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΙ, καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΙΛ) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΙΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

Prop. XVII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes in unum conveniant; sumantur autem in sectione duo quævis puncta, & ab iis ducantur lineæ contingentibus parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter sese, ita erunt inter se rectangula contenta sub rectis similiter sumptis.

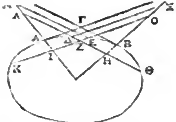
SIT coni sectio vel circuli circumferentia ΑΒ, quam contingant rectæ lineæ ΑΓ, ΓΒ, in puncto Γ convenientes; sumanturque in sectione puncta Δ, Ε, & ab ipsis ducantur ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ, quæ lineis ΑΓ, ΓΒ parallelæ sint: dico ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita esse rectangulum ΚΖΕ ad rectangulum ΘΖΔ.

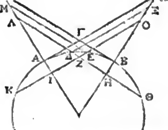
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰς ΑΓ, ΓΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

Ἤχθωσαν





οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ΙΜΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ οὕτως τὸ ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

triangulum ZIΛ: quare & reliquum KZE rectangulum ad reliquum quadrilaterum ZM est [per 19.5.] ut totum quadratum ex EI ad totum IME triangulum. sed ut quadratum ex EI ad triangulum IME ita quadratum ex ΓA ad triangulum ΓAN: ut igitur KZE rectangulum ad quadrilaterum ZM ita quadratum ex AΓ ad ΓAN triangulum. atque [per 1.3.huj.] est æquale triangulum AΓN triangulo ΓΠB, & [per 3.3.huj.] quadrilaterum ZM quadrilatero ZΞ: ergo ut rectangulum KZE ad ZΞ quadrilaterum ita quadratum ex AΓ ad triangulum ΓBΠ. Similiter demonstrabitur & ut rectangulum ΘZΔ ad quadrilaterum ΞZ ita esse quadratum ex ΓB ad triangulum ΓΠB. itaque quoniam ut rectangulum KZE ad quadrilaterum ZΞ ita quadratum ex AΓ ad ΓΠΞ triangulum; & invertendo ut quadrilaterum ZΞ ad rectangulum ΘZΔ ita triangulum ΠΓB ad quadratum ex ΓB: erit ex æquali, ut quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓB ita rectangulum KZE ad rectangulum ΘZΔ.

hoc est quadratum ex Z O, ad rectangulum ΑΠΛ; & quadratum ex E O ad rectangulum A O Λ: & est reliquum ad reliquum ut totum ad totum. itaque si à quadrato ex E O auferatur quadratum ex Δ Π, hoc est quadratum ex Z O, relinquitur [per 5.2.] rectangulum K Z E; est enim K O ipsi O E æqualis. rursus si à rectangulo Λ O Λ auferatur rectangulum Λ Π Λ, relinquitur [per *Pappi* lem. 3. in lib. 2.] M O Π rectangulum, hoc est rectangulum Θ Z Δ; namque Λ Π est æqualis M Λ, & Π N ipsi N M: ut igitur quadratum ex Λ Γ ad quadratum ex Γ B ita reliquum rectangulum K Z E ad reliquum Δ Z Θ.

Quod si punctum Z extra sectionem cadat, additiones & ablationes contrario facere oportebit.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes in unum conveniant; sumatur autem in quavis sectione aliquod punctum, & ab eo ducatur recta uni contingentium parallela quæ & sectionem & alteram contingentium secet: ut quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum ejus quæ inter parallelam & tactum interjicitur.

Sint oppositæ sectiones A B, M N, & contingentes rectæ Λ Γ Λ, B Γ Θ, quæ in puncto Γ conveniant; per tactus autem ducantur diametri A M, B N, & sumatur in sectione M N quodvis punctum Δ, à quo ducatur Z Δ E ipsi B Θ parallela: dico ut quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ A ita esse rectangulum Z E Δ ad quadratum ex A E.

ΖΟ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΟΛ· καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μὲν τοῦ ἀπὸ ΕΟ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, καταλείπεται τὸ ὑπὸ ΚΖΕ· ἴση γάρ ἡ ΚΟ τῇ ΟΕ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ΑΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, λείπεται τὸ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, ἴση γάρ ἡ ΑΠ τῇ ΜΛ καὶ ἡ ΠΝ τῇ ΝΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

Ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐκτὸς τῆς τομῆς, τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἀνάπαλιν ποιητέον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ᾽ ὁποτέρας οὖν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἀφῇ τετράγωνον.

Ἐστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΖΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

Ἤχθω

πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

angulum ΑΓΘ ad quadratum ex ΑΓ: ex æquali igitur ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ ita rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΕΑ.

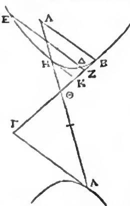
EUTOCIUS.

Ἐν τισι δὲ ἀντιγράφοις εὑρέθη ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος, ἐὰν ἑκατέρας τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συμπίπτωσι, καὶ οὕτως ἔσται τὰ εἰρημένα.

In aliquibus exemplaribus alia demonstratio hujus theorematis invenitur, cum rectæ lineæ utramque sectionem contingentes conveniant.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α,Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

Sint enim oppositæ sectiones Α,Β, quas contingant rectæ ΑΓ, ΓΒ in puncto Γ concurrentes; sumaturque aliquod punctum Δ in sectione Β, & ab eo ducatur ΔΕΖ ipsi ΑΓ parallela: dico ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita esse rectangulum ΕΖΔ ad quadratum ex ΖΒ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α διάμετρος ἡ ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παρὰ τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Β ἐφάπτεται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, τεταγμένως δὲ ἦκται ἡ ΒΛ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

Ducatur enim per Α diameter ΑΘΗ,& per Β,Η ducantur ΗΚ,ΒΛ parallelæ ipsi ΕΖ. quoniam igitur ΒΘ in puncto Β hyperbolam contingit, & ordinatim applicata est ΒΛ: erit [per 36. 1.] ut ΑΛ ad ΛΗ ita ΑΘ ad ΘΗ. sed [per 2.6.] ut ΑΛ quidem ad ΛΗ ita ΓΒ ad ΒΚ, ut vero ΑΘ ad ΘΗ ita ΑΓ ad ΚΗ: quare ut ΓΒ ad ΒΚ ita ΑΓ ad ΗΚ, & permutando ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΗΚ ad ΚΒ, & [per 22. 6.] ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita quadratum ex ΗΚ ad quadratum ex ΚΒ. sed demonstratum est [per 16.3.huj.] rectangulum ΕΖΔ esse ad quadratum ex ΖΒ ut quadratum ex ΗΚ ad quadratum ex ΚΒ: ergo ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita ΕΖΔ rectangulum ad quadratum ex ΖΒ.

Prop.

Ducantur enim per Ξ, I lineæ I Π, Ξ P parallelæ ipsis A Z, Z Δ. itaque quoniam [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex A Z ad A Z Σ triangulum ita quadratum ex Θ Λ ad triangulum Θ Λ O, & quadratum ex Θ I ad triangulum Θ I Π: erit [per 6.2. & 19.5.] & reliquum rectangulum H Λ I ad reliquum I Π O Λ quadrilaterum, ut quadratum ex A Z ad triangulum A Z Σ. atque [per 4.3.huj.] est triangulum A Z Σ triangulo Δ Z T æquale, & [per 7.3. huj.] Π O Λ I quadrilaterum quadrilatero K P Ξ Λ: ut igitur quadratum ex A Z ad triangulum Δ T Z ita rectangulum H Λ I ad quadrilaterum P Ξ Λ K. ut autem triangulum Δ T Z ad quadratum ex Z Δ ita quadrilaterum P Ξ Λ K ad rectangulum M Λ Ξ, [quod eodem prorsus modo probatur quo præmissa:] ergo ex æquali ut quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Δ ita rectangulum H Λ I ad rectangulum M Λ Ξ.

ὑπὸ M Λ Z.

Ηχθωσαν γὰρ παρὰ τὰς A Z, Z Δ διὰ τῶν Ξ, I αἱ I Π, Ξ P. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ A Z πρὸς τὸ A Z Σ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Θ Λ πρὸς τὸ Θ Λ O, καὶ τὸ ἀπὸ Θ I πρὸς τὸ Θ I Π· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ H Λ I πρὸς λοιπὸν τὸ I Π O Λ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ A Z πρὸς τὸ A Z Σ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ A Σ Z τῷ Δ Z T, καὶ τὸ Π O Λ I τῷ K P Ξ Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ A Z πρὸς τὸ Δ T Z οὕτως τὸ ὑπὸ H Λ I πρὸς τὸ P Ξ Λ K. ὡς δὲ τὸ Δ T Z πρὸς τὸ ἀπὸ Z Δ οὕτως τὸ P Ξ Λ K πρὸς τὸ ὑπὸ M Λ Ξ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ A Z πρὸς τὸ ἀπὸ Z Δ οὕτως τὸ ὑπὸ H Λ I πρὸς τὸ ὑπὸ M Λ Ξ.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus demonstratio hujus theorematis invenitur hujusmodi.

Ducatur M Λ quidem ipsi Z A parallela sectionem Δ Γ secans, H Λ vero parallela Z Δ secans ipsam A B: demonstrandum est ut quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Z A ita esse rectangulum H Λ I ad rectangulum M Λ Ξ.

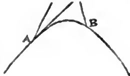
Ducantur enim per tactus A, Δ diametri A Γ, Δ B; & per B, Γ ipsæ B Π, Γ Π contingentibus parallelæ: ergo B Π, Γ Π sectiones in pun-

Εν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος τοιαύτη.

Ηχθω δὴ ἡ μὲν M Λ παρὰ τὴν Z A τέμνουσα τὴν Δ Γ τομὴν, ἡ δὲ H Λ παρὰ τὴν Z Δ τέμνουσα τὴν A B· δεικτέον ὅτι ὁμοίως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Z A οὕτως τὸ ὑπὸ H Λ I πρὸς τὸ ὑπὸ M Λ Ξ.

Ηχθωσαν γὰρ διὰ τῶν A, Δ ἁφῶν διάμετροι αἱ A Γ, Δ B, καὶ διὰ τῶν B, Γ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ B Π, Γ Π· ἐφάψονται δὴ αἱ B Π, Γ Π

ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ.



ctangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ. ut autem quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΜΓ ita quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ †: quare ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Prop. XX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant; & per occursum ducatur recta tactus conjungenti parallela, quæ secet utramque sectionem; ducatur autem alia recta parallela eidem, sectionesque & contingentes secans: erit ut rectangulum, contentum sub segmentis quæ inter occursum contingentium & sectiones interjiciuntur, ad quadratum ipsius contingentis; ita rectangulum, quod continetur sub rectis inter sectiones & contingentem interjectis, ad quadratum ejus quæ ad tactum intercipitur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ

SINT oppositæ sectiones ΑΒ, ΓΔ, quarum centrum Ε, & ΑΖ, ΖΓ lineæ contingentes; jun-

* Per conversum ejus quod demonstrat *Eutocius* in 44. 1. huj.

† Junctâ enim ΖΕ & productâ donec cum ΓΜ concurrat in Ν, erit hæc [per 37 & 39.2 huj.] parallela ΓΔ, unde triangula ΔΜΓ, ΖΜΝ sunt æquiangula; quare ΖΜ est ad ΜΝ ut ΔΜ ad ΜΓ, & permutando, componendo, invertendoque, & rursus permutando ΔΜ erit ad ΜΓ ut ΔΖ ad ΓΝ. est autem ΑΖ æqualis ΓΝ, ut modo ostensum; est igitur ut ΔΜ ad ΜΓ ita ΔΖ ad ΖΑ, & [per 22. 6.] horum quadrata sunt proportionalia.

ΗΛΞ ΗΛΖΗ triangulo ΑΛΝ : ergo ut rectangulum ΒΖΔ ad triangulum ΑΖΘ ita ΗΛΞ rectangulum ad triangulum ΑΛΝ. sed [per 3. lem 3. huj.] ut triangulum ΑΖΘ ad quadratum ex ΑΖ ita triangulum ΑΛΝ ad quadratum ex ΑΛ : ex æquali igitur, ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΗΛΞ ad quadratum ex ΑΛ.

... ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ οὕτως τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

Prop. XXI. *Theor.*

Iisdem positis, si in sectione duo puncta sumantur, & per ipsa ducantur rectæ lineæ, una quidem contingenti parallela, altera vero lineæ tactus conjungenti, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant: erit ut rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter occursum contingentium & sectiones, ad quadratum contingentis; ita rectangulum, contentum segmentis inter sectiones & rectarum occursum interjectis, ad rectangulum sub rectis inter sectionem & occursum interjectis.

Sint eadem quæ supra; & sumptis in sectione punctis Η,Κ, per ea ducantur ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΥ ipsi ΑΖ parallelæ, & ΗΛΜ, ΚΟΨΩ parallelæ ipsi ΑΓ: dico ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita esse ΚΟΩ rectangulum ad rectangulum ΝΟΗ.

Quoniam enim est [per 3. lem. 3. huj.] ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΑΖΘ ita quadratum ex ΑΛ ad ΑΛΜ triangulum, & quadratum ex ΞΟ ad triangulum ΞΟΨ, & quadratum ex ΞΗ ad triangulum ΞΗΜ: erit ut totum quadratum ex ΞΟ ad totum triangulum ΞΟΨ ita quadratum ex ΞΗ ablatum ad ablatum triangulum ΞΗΜ: quare [per 19.5.] & reliquum rectangulum ΝΟΗ ad reliquum quadrilate-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσαπτομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

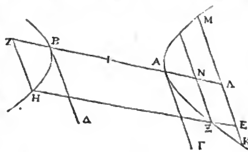
Εστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΥ· παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΨΩ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς τὸ ΞΟΨ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς τὸ ΞΗΜ· ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΗΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν ἐστιν

ἔσται ὡς τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

vero parallela ei quæ tactus conjungit: erit ut tranſverſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus conjungentem conſtituitur; ita rectangulum, contentum lineis inter ſectiones & rectarum occurſum interjectis, ad rectangulum ſub rectis inter ſectionem & occurſum interjectis.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, διήχθωσαν δὲ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΕΚΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευρὰν οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.



Ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΗΖ, ΞΝ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσιν, ἔσται διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ

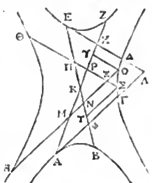
SINT oppoſitæ ſectiones A, B, quas contingant rectæ lineæ AΓ, BΔ inter ſe parallelæ; & juncta AB ducatur EΞH ipſi AB parallela, & KBΛM parallela ipſi AΓ: dico ut AB ad rectum figuræ latus, ita eſſe HEΞ rectangulum ad rectangulum KEM.

Ducantur enim per H, Ξ rectæ HZ, ΞN ipſi AΓ parallelæ. & quoniam AΓ, BΔ parallelæ ſunt inter ſe & ſectiones contingunt, erit [per converſ. 31. 2. huj.] & AB diameter, & rectæ KΛ, ΞN, HZ ad ipſam ordinatim applicabuntur: ut igitur AB ad rectum latus ita [per 21. 1. huj.] BΛA rectangulum ad quadratum

rectæ contingentibus parallelæ, quæ & sibi ipsis & alteris sectionibus oppositis occurrant: ut quadrata contingentium inter sese; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ inter sectiones & occursum interjiciuntur, ad rectangulum quod rectis similiter sumptis continetur.

... τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

SINT oppositæ sectiones conjugatæ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, sitque earum centrum Κ; & sectiones ΑΒ, ΕΖ contingant rectæ lineæ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ convenientes in Λ, & junctæ ΑΚ, ΕΚ ad Β, Ζ producantur; à puncto autem Η ducatur ΗΜΝΞΟ ipsi ΑΛ parallela, & à puncto Θ ducatur ΘΠΡΞΣ parallela ipsi ΕΛ: dico ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΑΛ ita esse ΘΞΣ rectangulum ad rectangulum ΗΞΟ.



Ducatur enim per Σ recta ΣΤ parallela ΑΛ; & per Ο ducatur ΟΥ ipsi ΕΛ parallela. quoniam igitur oppositarum sectionum conjugatarum ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ diameter est ΒΕ, & ΕΛ sectionem contingit, ipsique parallela ducta est ΘΣ: erit [per 20. 2. huj.] ΘΠ æqualis ΠΣ; & eadem ratione ΗΜ æqualis ΜΟ. & quoniam ut quadratum ex ΕΛ ad ΕΦΛ triangulum ita est [per 19. & 20. 6.] quadratum ex ΠΣ ad triangulum ΠΤΣ; & quadratum ex ΠΞ ad triangulum ΠΝΞ: erit etiam & reliquum rectangulum sub ΘΞΣ [per 5. 2.] ad quadrilaterum ΤΝΞΣ ut quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΦΛΕ.

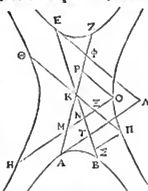
ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΛ ἡ ΘΠΡΞΣ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ἡ ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ἡ ΟΥ. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἦκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΗΜ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ, καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ· καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον.

τὸ ὑπὸ ΛΕΤ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ΘΚΝ τρίγωνον, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΕΤ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ τῷ ΚΗΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΗΚΜ τρίγωνον. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ΗΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΚΣ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.

ut quadratum ex ΛΕ ad triangulum ΛΕΤ ita [per 22.6.] quadratum ex ΚΘ ad triangulum ΘΚΝ; atque est triangulum ΛΕΤ æquale triangulo ΛΑΠ, triangulum vero ΘΚΝ triangulo ΚΗΜ: ut igitur quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΛΠΑ ita quadratum ex ΘΚ ad triangulum ΗΚΜ. est vero ut triangulum ΛΠΑ ad quadratum ex ΛΑ ita triangulum ΗΚΜ ad quadratum ex ΗΚ: ergo ex æquali ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita quadratum ex ΚΘ, hoc est rectangulum ΘΚΣ, ad quadratum ex ΗΚ, hoc est ad rectangulum ΗΚΟ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἡ μὲν ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ παρὰ τὴν ΕΛ ἀγομένη, διὰ τοῦ Κ κέντρου ἐμπίπτῃ, ἡ δὲ ΗΟ μὴ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ο, Π τῆς ἐφαπτομένης παράλληλοι αἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΟΡ τοῦ ΜΝΚ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΛΚΤ, τὸ δὲ ΛΚΤ ἴσον τῷ ΚΣΠ· ἴσον ἄρα τὸ ΜΟΡ τοῖς ΜΝΚ, ΚΣΠ τριγώνοις· ὥστε λοιπὸν τὸ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ τετραπλεύρῳ ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ



Iisdem manentibus, si recta ΘΚΠ, hoc est ipsi ΕΛ parallela, transeat per Κ centrum, ΗΟ vero per centrum non transeat: dico similiter ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita esse rectangulum ΘΞΠ ad rectangulum ΗΞΟ. ducantur enim per Ο, Π contingentibus parallelæ ΟΡ, ΠΣ. quoniam igitur [per 15. 3. huj.] triangulum ΜΟΡ excedit triangulum ΜΝΚ triangulo ΛΚΤ; triangulum autem ΛΚΤ æquale est triangulo ΚΣΠ: erit ΜΟΡ triangulum æquale triangulis ΜΝΚ, ΚΣΠ: quare sublato communi, videlicet triangulo ΜΞΚ, reliquum quadrilaterum ΞΡ quadrilatero ΞΣ est æquale. & quoniam [per 22. 6.] est ut quadratum

denique erunt reliqua ac in prop. XIX.

πρὸς τὸ Α Ε. καὶ τὰ λοιπὰ ὅμοια ἔσται τῷ ιθ'.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si in oppositis sectionibus conjugatis à centro ad sectiones ducantur duæ rectæ, quarum una quidem appelletur transversa diameter, altera vero recta; & ducantur aliæ his diametris parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectionibus occurrant, ita ut occursus sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus lineæ diametro transversæ parallelæ, una cum eo ad quod rectangulum sub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ rationem habet eandem quam diametri rectæ quadratum ad quadratum transversæ, æquale erit duplo quadrati quod fit è dimidia transversæ diametri.

Sint oppositæ sectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ, quarum centrum Ε; perque Ε ducantur ΑΕΓ transversa diameter & ΔΕΒ recta; & ducantur ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ parallelæ ipsis ΑΓ, ΔΒ, quæ in puncto Ξ conveniant, primum quidem intra angulum ΣΕΦ vel ΤΕΥ: dico rectangulum ΖΞΛ, una cum eo ad quod rectangulum ΜΞΡ rationem habet eandem quam quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΑΓ, æquale esse duplo quadrati ex ΑΕ.

Ducantur enim asymptoti sectionum ΣΕΤ, ΥΕΦ; & per Α ducatur ΣΗΑΦ sectionem con-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

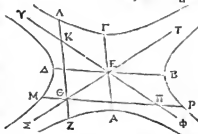
Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἥ τε ΑΕΓ πλαγία καὶ ἡ ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ, πρῶτον μὲν κατὰ τὸ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΥΕΤ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ

πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

æquale est [per 4.lem.3.huj.] rectangulo ΡΞΜ: ergo ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita ΡΞΜ rectangulum ad rectangulum ΚΞΘ una cum rectangulo ΚΖΘ. itaque demonstrare oportet rectangulum ΖΞΛ una cum rectangulo ΚΞΘ & rectangulo ΚΖΘ æquale esse duplo quadrati ex ΕΑ. commune auferatur quadratum ex ΑΕ, hoc est [per 11.2.huj.] rectangulum ΚΖΘ: reliquum igitur, rectangulum nempe ΚΞΘ una cum rectangulo ΛΞΖ demonstrandum est æquale quadrato ex ΑΕ. quod quidem ita se habet: nam [per 4. lem. 3. huj.] rectangulum ΚΞΘ una cum rectangulo ΛΞΖ æquale est rectangulo ΛΘΖ sive ΚΖΘ, hoc est [per 11.2.huj.] quadrato ex ΑΕ.

Συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.



Conveniant deinde ΖΛ, ΜΡ in una asymptotôn ad punctum Θ. æquale autem est rectangulum ΖΘΛ quadrato ex ΑΕ; & rectangulum ΜΘΡ quadrato ex ΔΕ: quare ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita rectangulum ΜΘΡ ad rectangulum ΖΘΛ. & propterea quærimus duplum rectanguli ΖΘΛ æquale duplo quadrati ex ΑΕ, quod quidem ita est.

Ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΤ γωνίας, ἢ τῆς ὑπὸ ΦΕΤ· ἔσται δὴ ὁμοίως, διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι

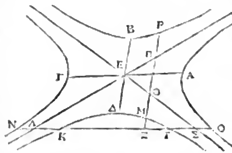
Sit postremo Ξ intra angulum ΣΕΤ vel ΦΕΤ: erit igitur similiter [atque in cas. 1.] per compositionem rationum, ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita ΠΞΝ rectangulum ad rectangulum ΚΞΘ. sed [per 11. 2.huj.] quadrato ex ΔΕ rectangulum ΠΜΝ, hoc est ΡΝΜ, est æquale;

drato ex A E.

Prop. XXV. *Theor.*

Iisdem positis, sit rectarum ipsis Α Γ, Β Δ parallelarum occursus intra unam sectionum Β, Δ, atque, ut supponitur, in puncto Ξ: dico rectangulum contentum portionibus ejus quæ transversæ diametro parallela est, videlicet Ο Ξ Ν, majus esse quam illud ad quod rectangulum sub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ, sive ad Ρ Ξ Μ, eandem rationem habet quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ, duplo quadrati è dimidia transversæ diametri.

EST enim propter eandem rationem [atque in præc.] ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α ita rectangulum Π Ξ Θ ad rectangulum Σ Ξ Λ. quadratum autem ex Δ Ε æquale est [per 11. 2.huj.] rectangulo Π Μ Θ; & quadratum ex Α Ε æquale rectangulo Λ Ο Σ: ergo ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α ita Π Μ Θ rectangulum ad rectangulum Λ Ο Σ. itaque quoniam ut totum rectangulum Π Ξ Θ ad totum Λ Ξ Σ ita ablatum rectangulum Π Μ Θ ad ablatum Λ Ο Σ, hoc est ad Σ Τ Λ; erit & reliquum [per 4. lem. 3.huj.] Ρ Ξ Μ ad reliquum [per 4.lem.part.ult.] Τ Ξ Κ ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α. ostendere



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς Α Γ, Β Δ ἐντὸς μιᾶς τῶν Β, Δ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ· λέγω ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ο Ξ Ν, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Μ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

ΔΙΑ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α οὕτως τὸ ὑπὸ Π Ξ Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Σ Ξ Λ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ Δ Ε τῷ ὑπὸ Π Μ Θ, τὸ δὲ ἀπὸ Α Ε τῷ ὑπὸ Λ Ο Σ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Α Ε οὕτως τὸ ὑπὸ Π Μ Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Ο Σ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ Π Ξ Θ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ Λ Ξ Σ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Π Μ Θ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Λ Ο Σ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Σ Τ Λ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Ρ Ξ Μ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ Τ Ξ Κ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Δ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Α. δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ

Ο Ξ Ν

ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΞΘ.

dem quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ. ergo demonstrare oportet rectangulum ΛΞΖ minus esse quam rectangulum ΚΞΘ una cum quadrato ex ΑΕ duplo quadrati ex ΑΕ. commune auferatur quadratum ex ΑΕ: reliquum igitur, nempe rectangulum ΛΞΖ, minus esse quam ΚΞΘ quadrato ex ΑΕ, hoc est [per 11.2.huj.] rectangulo ΛΘΖ, demonstrandum restat. quod quidem ita se habet: nam [per 4. lem.3.huj.] rectangulum ΛΘΖ una cum ΛΞΖ æquale est rectangulo ΚΞΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς, ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ, ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

Prop. XXVII. *Theor.*

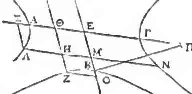
Si in ellipsi vel circuli circumferentia conjugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem sit recta, altera vero transversa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris parallelæ, quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant: quadrata è portionibus lineæ transversæ diametro parallelæ, quæ inter sectionem & linearum occursum interjiciuntur, una cum figuris ex portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ inter ductarum occursum & sectionem interjectis, similibus & similiter descriptis ei quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt.

autem [per 21.1.huj.] & ut ΠΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΝΞ ad rectangulum ΒΞΔ: quare [per 9.5.] figura quæ fit ex ΝΞ, hoc est ex ΖΛ, similis ei quæ ad ΑΓ, rectangulo ΒΞΔ est æqualis. eodem modo demonstrabimus figuram quæ fit ex ΚΛ similem illi quæ ad ΑΓ rectangulo ΒΛΔ æqualem esse. & quoniam recta linea ΝΘ secatur in partes æquales in Η & in partes inæquales in Ζ; quadrata ex ΘΖ, ΖΝ [per 9.2.] dupla sunt quadratorum ex ΘΗ, ΗΖ, hoc est ex ΝΗ, ΗΖ. eadem quoque ratione quadrata ex ΜΖ, ΖΚ quadratorum ex ΚΛ, ΛΖ sunt dupla; & [per 22.6.] figuræ quæ fiunt ex ΜΖ, ΖΚ similes ei quæ ad ΑΓ duplæ sunt figurarum similium quæ ex ΚΛ, ΛΖ. figuræ autem quæ fiunt ex ΚΛ, ΛΖ rectangulis ΒΛΔ, ΒΞΔ [ut modo ostensum] sunt æquales; & quadrata ex ΝΗ, ΗΖ æqualia sunt quadratis ex ΞΕ, ΕΛ: ergo quadrata ex ΝΖ, ΖΘ, una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ similibus ei quæ ad ΑΓ, dupla sunt rectangulorum ΒΞΔ, ΒΛΔ & quadratorum ex ΞΕ, ΕΛ. itaque quoniam recta ΒΔ secatur in partes æquales in Ε & in inæquales in Ξ, rectangulum ΒΞΔ [per 5.2.] una cum quadrato ex ΞΕ æquale est quadrato ex ΒΕ: similiter & rectangulum ΒΛΔ una cum quadrato ex ΛΕ æquale est quadrato ex ΒΕ: quare rectangula ΒΞΔ,

[illegible] ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος (τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ) ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ εἴδη (ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ ΒΛΔ, ΒΞΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἰδῶν (ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· * ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα ἐστὶ

* Vide Lemma quintum Pappi in hunc librum.

μένωσιν ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗ, ΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



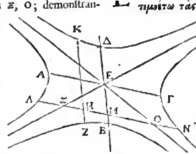
Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Λ, Ζ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῶν ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΞΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕ, ΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜ, ΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘ, ΘΗ. καὶ ἐστι τῶν μὲν ἀπὸ ΛΜ,

hus occurrant. dico quadrata ex ΛΗ, ΗΝ ad quadrata ex ΖΗ, ΗΚ eandem rationem habere quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ.

A punctis enim Λ, Ζ ordinatim applicentur ΛΞ, ΖΟ, quæ parallelæ erunt diametris ΑΓ, ΒΔ. & à puncto Β ducatur ipsius ΒΔ rectum latus ΒΠ: itaque constat [per 20. 6.] ut ΠΒ ad ΒΔ ita esse quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ, & [per 15. 5.] quadratum ex ΑΕ ad quadratum ex ΕΒ; & [per 21. 1. huj.] quadratum ex ΖΟ ad ad rectangulum ΒΟΔ; & rectangulum ΓΞΛ ad quadratum ex ΛΞ: est igitur [per 12. 5.] sicut unum antecedentium ad unum consequentium ita antecedentia omnia ad omnia consequentia: quare ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita rectangulum ΓΞΛ una cum quadrato ex ΑΕ & quadrato ex ΟΖ, hoc est quadrato ex ΕΘ, ad rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ & quadrato ex ΛΞ, hoc est quadrato ex ΜΕ. sed [per 6.2.] rectangulum ΓΞΛ una cum quadrato ex ΑΕ æquale est quadrato ex ΞΕ, & rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ æquale quadrato ΟΕ: ergo ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita sunt quadrata ex ΞΕ, ΕΘ ad quadrata ex ΟΕ, ΕΜ, hoc est quadrata ex ΛΜ, ΜΗ ad quadrata ex ΖΘ, ΘΗ. quadratorum autem ex ΛΜ,

ΜΗ

S asymptotos in punctis Ξ, O; demonstrandum est quadrata ex ΞH, HO, una cum dimidio quadrati ex ΛΓ (hoc est duplo quadrati ex EΛ, hoc est [per 10.2.huj.] duplo rectanguli ΛΞN) ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habere quam quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex BΔ.



τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, O· δεικτέον ὅτι τὰ ἀπὸ ΞH, HO, προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΛΓ (τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ EΛ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ ΛΞN) πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ.

ᵃ Quoniam enim ΛΞ [per 16.2.huj.] æqualis est ON, quadrata ex ΛH, HN superant [per 6.lem.3.huj.] quadrata ex ΞH, HO duplo rectanguli ΛΞN: ergo quadrata ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex ΛE æqualia sunt quadratis ex ΛH, HN. sed [per 28. 3.huj.] quadrata ex ΛH, HN ad quadrata ex ZH, HK eandem habent rationem quam quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex BΔ: quadrata igitur ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex EΛ ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habent quam quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex BΔ.

ᵃ Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ON, τὰ ἀπὸ τῶν ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞN· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞH, HO μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΛE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛH, HN. τὰ δὲ ἀπὸ ΛH, HN πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞH, HO ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ EΛ πρὸς τὰ ἀπὸ ZH, HK λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ.

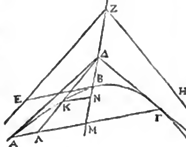
EUTOCIUS.

ᵃ Quoniam enim ΛΞ æqualis est ON; quadrata ex ΛH, HN superant quadrata ex ΞH, HO, duplo rectanguli ΛΞN.*] Sit recta linea ΛN, auferanturque ab ipsa æquales ΛΞ, NO, & figura describatur. manifestum est, ob similitudinem & propterea quod ΛΞ est æqualis ipsi ON, quadrata ΛΓ, ΔN, ΛK, MB inter se æqualia esse. quoniam igitur quadrata quæ fiunt ex ΛH, HN sunt quadrata ΛZ, ZN, & quæ ex HΞ, HO sunt KZ, ZΔ; sequitur quod quadrata ex ΛH, HN superant quadrata ex ΞH, HO gnomonibus ΣPX, TΦY. & quoniam rectangulum HΔ est æquale rectangulo MΠ, & rectangulum EI ipsi MΘ; erunt gnomones ΣPX, TΦY æquales rectangulis ΛM, ΔB. sed ΛM est æquale ΛΔ,

ᵃ Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ON, τὰ ἀπὸ ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞN.] Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛN, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπ' αὐτῆς ἴσαι αἱ ΛΞ, NO, καὶ γεγράφθω τὸ σχῆμα. φανερὸν δὴ ὅτι ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τοῦ ἴσην εἶναι τὴν ΛΞ τῇ ON, τὰ ΛΓ, NΔ, ΛK, MB τετράγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΛH, HN τὰ ΛZ, ZN ἐστίν, τὰ δὲ ἀπὸ ΞH, HO ἐστὶ τὰ KZ, ZΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΛH, HN τῶν ἀπὸ ΞH, HO ὑπερέχει τοῖς ΣPX, TΦY γνώμοσι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ HΔ τῷ MΠ, τὸ δὲ EI τῷ MΘ, οἱ ΣPX, TΦY γνώμονες ἴσοι εἰσὶ τοῖς ΛM καὶ τῷ ΔB. τὸ δὲ ΛM τῷ ΛΔ ἴσον, καὶ τὰ ΔΛ, ΔB ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς

* Vide aliam hujus rei demonstrationem ad VI. *Pappi* Lemma.

ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλὰ ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· * ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν, προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.



ex B E ita [ex 1.2. huj.] est Θ B ad rectum latus: quare ut quadratum ex Δ N ad quadratum ex N K ita Θ B ad rectum latus. sed [per 21.1.huj.] ut Θ B ad rectum latus ita rectangulum Θ N B ad quadratum ex N K: ut igitur quadratum ex Δ N ad quadratum ex N K ita Θ N B rectangulum ad quadratum ex N K: ergo [per 9.5.] rectangulum Θ N B quadrato ex Δ N est æquale. est autem [per 37.1.huj.] rectangulum M Z Δ æquale quadrato ex Z B, propterea quod recta A Δ sectionem contingit, & Λ M ordinatim est applicata: quare rectangulum Θ N B una cum quadrato ex Z B æquale est rectangulo M Z Δ una cum quadrato ex Δ N. sed [per 6.2.] rectangulum Θ N B una cum quadrato ex Z B est æquale quadrato ex Z N: ergo & rectangulum M Z Δ una cum quadrato ex Δ N æquale est quadrato ex Z N: * & idcirco [per conv. 6.2.] recta Δ M ad punctum N bifariam secatur, adjunctam habens Δ Z. & parallelæ sunt K N, Λ M; recta igitur Δ K [per 2.6.] ipsi K Λ est æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

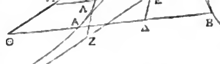
Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ,

Prop. XXXI. *Theor.*

Si duæ rectæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per

* Hic locum habet Lemma septimum *Pappi*.

ex Λ H. sed ut quadratum ex E K ad quadratum ex K Z, ita demonstratum est [in antec.] N Λ K rectangulum ad quadratum ex Λ H: ergo rectangulum N Λ K quadrato ex M Λ est æquale. commune apponatur quadratum ex K E: rectangulum igitur N Λ K una cum quadrato ex K E, hoc est [per 6. 2.] quadratum ex Λ E, hoc est quadratum ex H Ξ, æquale est quadratis ex M Λ, K E. ut autem quadratum ex H Ξ ad quadrata ex M Λ, K E ita quadratum ex Ξ Γ ad quadrata ex Λ H, K Z, [propter similitudinem triangulorum Γ Ξ H, H Λ M, Z K E.] ex quibus sequitur quadratum ex Ξ Γ æquale esse quadratis ex H Λ, K Z. atqui quadratum ex H Λ æquale est quadrato ex Ξ E; & [per 1.2.huj.] quadratum ex K Z æquale quadrato ex dimidio secundæ diametri, hoc est [per 38. 1. huj.] rectangulo Γ E Δ: quadratum igitur ex Γ Ξ quadrato ex Ξ E & rectangulo Γ E Δ simul est æquale: * ac propterea [per conversf.5.2.] recta Γ Δ in partes quidem æquales secatur ad punctum Ξ, in partes vero inæquales ad E. & Δ Θ parallela est ipsi H Ξ; ergo [per 2.6.] Γ H ipsi H Θ æqualis erit.



πρὸς τὸ ἀπὸ K Z οὕτως τὸ ἀπὸ M Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ H. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ E K πρὸς τὸ ἀπὸ K Z δέδεικται τὸ ὑπὸ N Λ K πρὸς τὸ ἀπὸ Λ H· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ N Λ K τῷ ἀπὸ M Λ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ K E· τὸ ἄρα ὑπὸ N Λ K μετὰ τοῦ ἀπὸ K E, τουτέστι τὸ ἀπὸ Λ E, τουτέστι τὸ ἀπὸ H Ξ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ M Λ, K E. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ H Ξ πρὸς τὰ ἀπὸ M Λ, K E οὕτως τὸ ἀπὸ Ξ Γ πρὸς τὰ ἀπὸ Λ H, K Z· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ Ξ Γ τοῖς ἀπὸ H Λ, K Z. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ H Λ τῷ ἀπὸ Ξ E, τὸ δὲ ἀπὸ K Z τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ Γ E Δ· τὸ ἄρα ἀπὸ Γ Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ Ξ E καὶ τῷ ὑπὸ Γ E Δ· * ἡ ἄρα Γ Δ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ E. καὶ παράλληλος ἡ Δ Θ τῇ H Ξ· ἴση ἄρα ἡ Γ H τῇ H Θ.

EUTOCIUS.

Potest etiam hoc theorema eodem modo demonstrari quo præcedens, cum duæ rectæ lineæ unam sectionum contingant. sed quoniam omnino idem est atque illud quod in una hyperbola demonstratum fuit, ipsa demonstratio ut superflua omissa est.

Δυνατὸν ἐστι τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ, ποιοῦντας τὰς δύο εὐθείας μιᾶς τομῆς ἐφαπτομένας. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ πάντη ταὐτόν ἐστι τῷ ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς δεδειγμένῳ, αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπελείφθη.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si duæ rectæ hyperbolam contingentes sibi ipsis occurrant, & recta per tactus jungatur, & jungenti tactus recta parallela ducatur per contingentium occursum; perque punctum, quo bisecatur jungens tactus, ducatur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἡ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευ-

* Hic adhibetur Lemma Pappi octavum.

γνυούσης

ὑπὸ ΘΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διότι ἐφάπτεται ἡ ΑΖ καὶ κατῆκται ἡ ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΜΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΜΘ· * δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΖΘ κατὰ τὸ Μ προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ.

Γ quadrato ex ΜΘ. est autem [per 37. 1. huj.] & ΘΔΖ rectangulum quadrato ex ΔΒ æquale; propterea quod ΑΖ sectionem contingit & ΑΘ ordinatim applicata est: ergo rectangulum ΗΜΒ una cum quadrato ex ΔΒ, hoc est [per 6.2.] quadratum ex ΔΜ, æquale est rectangulo ΘΔΖ una cum quadrato ex ΜΘ: & ideo [per conversf. 6.2.] recta ΖΘ bifariam secatur in puncto Μ, adjunctam habens ΔΖ. sunt autem rectæ ΚΖ, ΛΜ parallelæ; æqualis igitur est [per 2.6.] ΚΛ ipsi ΛΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ· ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & recta jungens tactus producatur; per occursum vero contingentium ducatur recta tactus conjungenti parallela, & per punctum quod conjungentem tactus bifariam secat ducatur recta alteri asymptotôn parallela, conveniens & cum sectione & cum recta parallela per occursum ductâ: quæ inter bisectionem jungentis tactus & dictam parallelam interjicitur à sectione bifariam dividetur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΗΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· φανερὸν δὴ ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὲ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

SINT oppositæ sectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, & rectæ contingentes ΑΗ, ΗΔ, centrum autem sit Θ, & asymptotos ΚΘ; ductaque ΘΗ producatur, & jungatur ΑΛΔ: itaque ΑΔ [per 30.2.huj.] bifariam secabitur in Λ. ducantur per Η, Θ rectæ ΒΘΕ, ΓΗΖ ipsi ΑΔ parallelæ; & per Λ ducatur ΛΜΝ parallela ipsi ΘΚ: dico ΛΜ æqualem esse ipsi ΜΝ.

* *Juxta Pappi Lemma nonum.*

Applicentur

E K ita quadratum ex Θ Ξ, hoc est quadratum ex M Π, ad rectangulum H Θ Λ una cum quadrato ex Θ Π. sed ut quadratum ex Θ E ad quadratum ex E K ita est [per 4. & 22. 6.] quadratum ex M Π ad quadratum ex Π Λ: quare ut quadratum ex M Π ad quadratum ex Π Λ ita quadratum ex M Π ad rectangulum H Θ Λ una cum quadrato ex Θ Π; & propterea quadratum ex Λ Π rectangulo H Θ Λ una cum quadrato ex Θ Π æquale erit: ergo [per conv. 5. 2.] recta Λ H in partes æquales secatur ad Π & in partes inæquales ad Θ. & sunt quidem rectæ M Π, H N parallelæ; est igitur Λ M [per 2. 6.] ipsi M N æqualis.

ὡς τὸ ἀπὸ ΘΞ πρὸς τὸ ἀπὸ EK οὕτως τὸ ἀπὸ MΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ MΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ οὕτω τὸ ἀπὸ MΠ πρὸς τὸ ὑπὸ HΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ HΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛΗ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ MΠ, HN· ἴση ἄρα ἡ ΛΜ τῇ MN.

Prop. XXXIV. *Theor.*

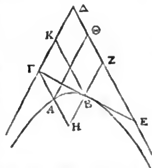
Si in una asymptotôn hyperbolæ aliquod punctum sumatur, ab eoque recta ducta sectionem contingat, & per tactum ducatur asymptoto parallela: quæ per dictum punctum transit, alteri asymptotôn parallela, à sectione bifariam dividetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ· ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

SIT hyperbola A B, asymptoti vero Γ Δ, Δ E; &, sumpto in recta Γ Δ quovis puncto Γ, per ipsum ducatur Γ B E sectionem contingens; & per B quidem ducatur Z B H parallela ipsi Γ Δ, per Γ autem Γ A H quæ ipsi Δ E æquidistet: dico rectam Γ A æqualem esse ipsi A H.

Ducatur enim per A recta A Θ parallela ipsi Γ Δ; & per B recta B K parallela ipsi Δ E. itaque quoniam [per 3. 2. huj.] Γ B æqualis est B E; erit [per 2. 6.] & Γ K ipsi K Δ, & Δ Z ipsi Z E æqualis. & cum rectangulum K B Z æquale sit [per 12. 2. huj.] rectangulo Γ A Θ, & recta B Z æqualis ipsi Δ K sive Γ K, & A Θ ipsi Δ Γ; rectangulum Δ Γ A æquale erit rectangulo K Γ H:



ἜΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔE, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓBE, καὶ διὰ μὲν τοῦ B παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ZBH, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔE ἡ ΓAH· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AH.

Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ A τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ AΘ, διὰ δὲ τοῦ B τῇ ΔE ἡ BK. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BE· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓK τῇ KΔ, καὶ ἡ ΔZ τῇ ZE. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ KBZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓAΘ, ἴση δὲ ἡ BZ τῇ ΔK, τουτέστι τῇ ΓK, καὶ ἡ AΘ τῇ ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓA ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ KΓH·

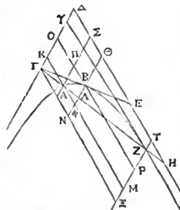
ἔστιν

… πρὸς ἄλληλα. | netur.

ΕΣΤΩ γὰρ ἡ Α Β ὑπερβολή, καὶ αἱ Γ Δ, Δ Ε ἀσύμπτωτοι, καὶ Γ Β Ε ἐφαπτομένη, καὶ ἡ Θ Β παράλληλος τῇ Γ Δ, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα Γ Α Λ Ζ Η τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Ζ Γ πρὸς Γ Α οὕτως ἡ Ζ Λ πρὸς Λ Α.

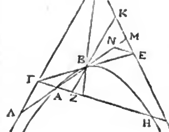
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν Δ Ε αἱ Γ Ν Ξ, Κ Α Φ Μ, Ο Π Β Ρ, Τ Ζ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν Γ Δ αἱ Α Π Σ, Τ Ζ Ρ Μ Ξ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Α Γ τῇ Ζ Η· ἴση ἄρα καὶ ἡ Κ Α τῇ Τ Η. ἡ δὲ Κ Α τῇ Δ Σ ἴση· καὶ ἡ Τ Η ἄρα τῇ Δ Σ ἴση· ὥστε καὶ ἡ Γ Κ τῇ Δ Τ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Γ Κ τῇ Δ Τ, ἴση καὶ ἡ Δ Κ τῇ Γ Τ· ὡς ἄρα ἡ Δ Κ πρὸς Κ Γ οὕτως ἡ Τ Γ πρὸς Γ Κ. ὡς δὲ ἡ Τ Γ πρὸς Γ Κ οὕτως ἡ Ζ Γ πρὸς Γ Α, ὡς δὲ ἡ Ζ Γ πρὸς Γ Α οὕτως ἡ Μ Κ πρὸς Κ Α, ὡς δὲ ἡ Μ Κ πρὸς Κ Α οὕτως τὸ Μ Δ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Δ Α, ὡς δὲ ἡ Δ Κ πρὸς Κ Γ οὕτως τὸ Θ Κ πρὸς τὸ Κ Ν παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ Μ Δ πρὸς τὸ Δ Α οὕτως τὸ Θ Κ πρὸς τὸ Κ Ν. ἴσον δὲ τὸ Α Δ τῷ Δ Β παραλληλογράμμῳ, τουτέστι τῷ Ο Ν· (ἴση γὰρ ἡ Γ Β τῇ Β Ε καὶ ἡ Δ Ο τῇ Ο Γ) ὡς ἄρα τὸ Μ Δ πρὸς τὸ Ο Ν οὕτως τὸ Θ Κ πρὸς τὸ Κ Ν, καὶ λοιπὸν τὸ

SIT A B hyperbola, cujus asymptoti Γ Δ, Δ E; contingensque Γ B E, & Θ B parallela ipsi Γ Δ; ducatur autem per Γ recta linea Γ A Λ Z H, quæ sectionem in punctis A, Z secet: dico ut Z Γ ad Γ A ita esse Z Λ ad Λ A.



Ducantur enim per puncta Γ, A, B, Z rectæ Γ N Ξ, K A Φ M, O Π B P, T Z ipsi Δ E parallelæ, & per A, Z ducantur A Π Σ, T Z P M Ξ parallelæ ipsi Γ Δ. quoniam igitur [per 8. 2. huj.] æqualis est A Γ ipsi Z H, erit & K A [per 26. 1.] æqualis T H. sed K A est æqualis Δ Σ: ergo & T H ipsi Δ Σ est æqualis; & pari modo Γ K ipsi Δ T. cumque Γ K æqualis est ipsi Δ T, & Δ K ipsi Γ T æqualis erit: ut igitur Δ K ad K Γ ita T Γ ad Γ K. sed [per 2. 6.] ut T Γ ad Γ K ita Z Γ ad Γ A, & ut Z Γ ad Γ A ita M K ad K A, & ut M K ad K A ita [per 1. 6.] M Δ parallelogrammum ad parallelogrammum Δ A, & ut Δ K ad K Γ ita parallelogrammum Θ K ad parallelogrammum K N: ergo [per 11. 5.] ut parallelogrammum M Δ ad Δ A ita Θ K ad ipsum K N. atqui [per 12. 2. huj.] parallelogrammum A Δ est æquale parallelogrammo Δ B, hoc est [per 36. 1.] ipsi O N: (est enim [per 3. 2. huj.] recta Γ B æqualis B E, & [per 2. 6.] Δ O ipsi O Γ) quare ut parallelogrammum M Δ ad O N ita Θ K ad K N; reliquum

differentia est ipsarum ΑΒ, ΒΜ. sed ΒΜ [per 8. 2. huj.] est æqualis ipsi ΛΑ; erit igitur ΝΜ differentia ipsarum ΛΑ, ΑΒ. & quoniam in triangulo ΑΜΘ ducta est ΕΝ ipsi ΑΘ parallela, ut ΑΜ ad ΝΜ ita erit ΑΘ ad ΝΕ. & est ΝΕ æqualis ipsi ΑΓ: ut igitur ΘΑ ad ΑΓ ita ΑΜ ad differentiam ipsarum ΑΒ, ΒΜ, hoc est ΑΒ ad differentiam ipsarum ΛΑ, ΑΒ. ut autem ΘΑ ad ΑΓ ita ΗΓ ad ΓΑ: (est enim ΓΑ æqualis ipsi ΘΗ) ergo ut ΗΓ ad ΓΑ ita ΑΒ ad differentiam ipsarum ΛΑ, ΑΒ, & ita ΓΖ ad excessum ipsarum ΓΑ, ΑΖ. quoniam autem quæstio est an sit ut ΗΓ ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, demonstrare oportet ut tota ΗΓ ad totam ΓΑ ita esse ablatam ΗΖ ad ablatam ΑΖ, & reliquam ΓΖ ad reliquam, videlicet ad excessum ipsarum ΓΑ, ΑΖ. demonstratum autem est ΗΓ esse ad ΓΑ ita ut ΓΖ ad excessum ipsarum ΓΑ, ΑΖ. [propter similitudinem triangulorum ΓΑΛ, ΖΑΒ.]



τῇ ΒΝ· ἡ ἄρα ΝΜ ὑπεροχή ἐστι τῶν ΑΒ, ΒΜ. ἴση δὲ ἡ ΒΜ τῇ ΛΑ· ἡ ΝΜ ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΛΑ, ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ ΑΜΘ παρὰ τὴν ΑΘ ἐστὶν ἡ ΕΝ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΝΜ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΝΕ. ἴση δὲ ἡ ΝΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΑΒ, ΒΜ, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ, ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ· (ἴση γὰρ ἡ ΓΑ τῇ ΘΗ) καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ, ΑΒ, καὶ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΑΖ ὑπεροχήν. καὶ ἐπεὶ ζητοῦ εἰ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΑ, δεικτέον ὅτι ὡς ὅλη ἡ ΗΓ πρὸς ὅλην τὴν ΓΑ οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ ΗΖ πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν ΑΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΓΖ πρὸς λοιπὴν τὴν τῶν ΓΑ, ΑΖ ὑπεροχήν. δέδεικται δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΑΖ ὑπεροχήν.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Iisdem positis, si recta à puncto ducta neque sectionem in duobus punctis secet, neque parallela sit asymptoto; cum opposita quidem sectione conveniet: erit autem ut tota ad rectam quæ inter sectionem & parallelam per tactum ductam interjicitur, ita ea quæ est inter oppositam se-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου διαχθεῖσα εὐθεῖα μήτε τῆς τομῆς τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, μήτε παράλληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ· ἔσται δὲ ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης

* Superius enim demonstraverat esse ΜΔ ad ΟΝ, hoc est ad ΒΔ, hoc est ad ΔΛ, sicut ΜΘ ad ΚΒ, hoc est ad ΛΘ.

καὶ

μῳ ἡ Ν Σ πρὸς Σ Θ οὕτως τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Γ Σ πρὸς Σ Η οὕτως τὸ Γ Ρ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Ρ Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ οὕτω τὸ Γ Ρ πρὸς τὸ Ρ Η. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ οὕτως ὅλον τὸ Ν Λ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Γ Θ μετὰ τοῦ Ρ Η παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Ε Β τῇ Β Η, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ Λ Β τῇ Β Π καὶ τὸ Λ Ξ τῷ Β Η. τὸ δὲ Λ Ξ ἴσον τῷ Γ Θ· καὶ τὸ Β Η ἄρα ἴσον τῷ Γ Θ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ οὕτως ὅλον τὸ Λ Ν πρὸς τὸ Β Η μετὰ τοῦ Η Ρ, τουτέστι πρὸς τὸ Ρ Ξ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ Ρ Ξ τῷ Λ Θ, ἐπεὶ καὶ τὸ Γ Θ τῷ Β Γ καὶ τὸ Μ Β τῷ Ξ Θ ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ οὕτως τὸ Ν Λ πρὸς τὸ Λ Θ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ Ν Γ πρὸς τὸ Γ Θ οὕτως ἡ Ν Σ πρὸς Σ Θ, τουτέστιν ἡ Α Η πρὸς Η Θ, ὡς δὲ τὸ Ν Λ πρὸς τὸ Λ Θ οὕτως ἡ Ν Ρ πρὸς τὴν Ρ Θ, τουτέστιν ἡ Α Κ πρὸς Κ Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α Κ πρὸς Κ Θ οὕτως ἡ Α Η πρὸς τὴν Η Θ.



ita parallelogrammum Ν Γ ad parallelogrammum Γ Θ; & ut Γ Σ ad Σ Η ita Γ Ρ ad Ρ Η: ergo ut Ν Γ ad Γ Θ ita Γ Ρ ad ipsum Ρ Η. & [per 12.5.] ut unum ad unum ita omnia ad omnia; quare ut Ν Γ ad Γ Θ ita totum Ν Λ ad Γ Θ & Ρ Η simul. & quoniam [per 3. 2. huj.] Ε Β est æqualis ipsi Β Η; erit & Λ Β ipsi Β Π æqualis, & [per 36. 1.] parallelogrammum Λ Ξ æquale ipsi Β Η. sed [per 12.2.huj.] Λ Ξ, Γ Θ sunt æqualia; ergo & Β Η ipsi Γ Θ parallelogrammo: ut igitur Ν Γ ad Γ Θ ita totum Λ Ν ad parallelogramma Β Η & Η Ρ simul, hoc est ad Ρ Ξ. sed Ρ Ξ est æquale ipsi Λ Θ, quoniam & Γ Θ ipsi Β Γ atque Μ Β ipsi Ξ Θ: ergo ut Ν Γ ad Γ Θ ita Ν Λ ad Λ Θ parallelogrammum. ut autem Ν Γ ad Γ Θ parallelogrammum ita recta Ν Σ ad Σ Θ rectam, hoc est Α Η ad Η Θ; & ut Ν Λ ad Λ Θ ita recta Ν Ρ ad rectam Ρ Θ, hoc est Α Κ ad Κ Θ; quare ut Α Κ ad Κ Θ ita Α Η ad Η Θ.

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Λ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ Β Κ, Δ Γ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ Β Α Δ, καὶ διηγμένη ἡ Λ Κ Δ Η Ζ, καὶ τῇ Γ Δ παράλληλος ἡ Α Ζ· δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Λ Ζ πρὸς Ζ Η οὕτως ἡ Λ Δ πρὸς Δ Η.

Ἐπεζεύχθω ἡ Α Η καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ε, Θ· φανερὸν οὖν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ Θ Α τῇ Ε Η καὶ ἡ Θ Η τῇ Α Ε. ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν Θ Γ ἡ Δ Μ, ἴση ἄρα ἡ Β Α τῇ Α Δ καὶ ἡ Θ Α τῇ Α Μ· ἡ ἄρα Μ Η

Aliter.

Sint oppositæ sectiones Α, Λ, quarum asymptoti Β Κ, Δ Γ & contingens Β Α Δ; ducatur autem Λ Κ Δ Η Ζ, & sit Α Ζ ipsi Γ Δ parallela: demonstrandum est ut Λ Ζ ad Ζ Η ita esse Λ Δ ad Δ Η.

Jungatur Α Η & ad Ε, Θ protrahatur: & erit [per 8. 2. huj.] Α Θ æqualis Ε Η, & Θ Η ipsi Α Ε. ducatur per Δ recta Δ Μ parallela ipsi Γ Θ; ergo [per 3. 2. huj.] Β Α ipsi Α Δ erit æqualis, & Θ Α ipsi Α Μ: quare Μ Η est differentia

Aliter.

Sint eadem quæ supra, & per A ducatur A M ipsi B Γ parallela. quoniam igitur AB est æqualis ipsi A Δ, erit & K M æqualis ipsi M Δ. & cum parallelæ sint Θ K, A M; erit ut H M ad M K ita H A ad A Θ, hoc est A H ad H E. ut autem A H ad H E ita Z H ad H Δ, & ut H M ad M K ita dupla ipsius H M ad duplam M K; atque est A H dupla ipsius H M, (est enim [per 16. 2. huj.] A K ipsi Δ H æqualis & K M ipsi M Δ) & Δ K dupla ipsius K M: ut igitur A H ad H Z ita K Δ ad Δ H; quare componendo ut A Z ad Z H ita K H ad H Δ, hoc est A Δ ad Δ H.

Ἄλλως.

Ἔστω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΓ ἤχθω ἡ ΑΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ, ΑΜ, ἔστιν ὡς ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΗΜ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ, καὶ ἔστι διπλασία τῆς ΗΜ ἡ ΑΗ (ἴση γὰρ ἡ ΑΚ τῇ ΔΗ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ) καὶ τῆς ΚΜ διπλασία ἡ ΔΚ· ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΗ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ.

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si duæ rectæ coni sectionem vel circuli circumferentiam vel sectiones oppositas contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus recta jungatur; ab occursu vero contingentium ducatur recta sectionem in duobus punctis secans: erit ut tota ad eam quæ extra sumitur, ita segmenta quæ à recta jungente tactus abscinduntur inter sese.

SIT coni sectio A B, contingentesque A Γ, Γ B; &, junctâ A B, ducatur Γ Δ E Z: dico ut Z Γ ad Γ Δ ita esse Z E ad E Δ.

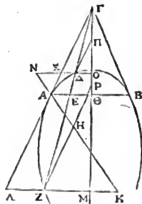
Ducantur enim per Γ, A sectionis diametri Γ Θ, A K, & per Z, Δ ducantur Δ Π, Z P; A Z M, N Δ O parallelæ ipsis A Γ, A B. quoniam igitur

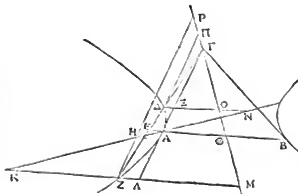
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα· ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΓ, ΑΒ, αἱ ΔΠ, ΖΡ· ΑΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός





ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΟΓ οὕτως τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ τρίγωνον, καὶ λοιπὸν τὸ ΛΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΛΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

gulum ΔΠΟ: quare [per 11. 5.] ut triangulum ΛΓΜ ad triangulum ΞΟΓ ita ΖΡΜ triangulum ad triangulum ΔΠΟ, & [per 19.5.] ita reliquum quadrilaterum ΛΓΡΖ ad reliquum ΞΓΠΔ. est autem [per 49.& 50.1. huj. & 11.3.huj] ΛΓΡΖ quadrilaterum triangulo ΑΛΚ æquale, & quadrilaterum ΞΓΠΔ æquale triangulo ΑΝΞ: ut igitur quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita ΑΛΚ triangulum ad triangulum ΑΝΞ. sed ut quadratum ex ΛΜ ad quadratum ex ΞΟ ita quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΔ, & ut triangulum ΑΛΚ ad triangulum ΑΝΞ ita quadratum ex ΛΑ ad quadratum ex ΑΞ, & quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΕΔ: ergo ut quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΔ ita quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΕΔ: & ideo [per 22.6.] ut recta ΖΓ ad ΓΔ ita ΖΕ ad ΕΔ.

Ducantur enim à punctis Z, Δ rectæ Λ Z K M, Δ Θ H Ξ N parallelæ ipsi A B; & per Z, H ducantur Z P, H Π, ipsi A Γ parallelæ. * & eodem modo quo in præcedente, demonstrabimus † ut quadratum ex Λ M ad quadratum ex Ξ Θ ita esse quadratum ex Λ A ad quadratum ex A Ξ. est au-

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Z, Δ παρὰ τὴν A B αἱ Λ Z K M, Δ Θ H Ξ N, διὰ δὲ τῶν Z, H παρὰ τὴν A Γ αἱ Z P, H Π. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Λ M πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Θ οὕτως τὸ ἀπὸ Λ A πρὸς τὸ ἀπὸ A Ξ. καὶ ἔστιν

ὡς

εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων πρὸς ἄλληλα.

vero contingentium ducta recta & utramque sectionem & rectam tactus conjungentem secet: erit ut tota ad eam quæ extra sumitur inter sectionem & conjungentem tactus, ita portiones inter sese, quæ inter utramque sectionem & contingentium occursum interjiciuntur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ Α Δ, Δ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ Α Β, Γ Δ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ Ε Δ Ζ Η· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Ε Η πρὸς τὴν Η Ζ οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς τὴν Δ Ζ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ Α Γ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ παρὰ μὲν τὴν Α Β ἤχθωσαν αἱ Ε Θ Σ Κ, Ζ Λ Ν Μ Ξ Ο, παρὰ δὲ τὴν Α Δ αἱ Ε Π, Ζ Ρ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ Ζ Ξ, Ε Σ, καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ Ε Ζ, Ξ Σ, Θ Μ· ἐστὶν ὡς ἡ Ε Θ πρὸς Θ Σ οὕτως ἡ Ζ Μ πρὸς τὴν Μ Ξ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ Ε Θ πρὸς Ζ Μ οὕτως ἡ Θ Σ πρὸς τὴν Ξ Μ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Θ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Μ οὕτως τὸ ἀπὸ Θ Σ πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Μ.

SINT oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ, & rectæ contingentes A Δ, Δ B; junctæ vero A B, Γ Δ producantur; & per Δ ducatur E Δ Z H: dico ut E H ad H Z ita esse EΔ ad Δ Z.

Jungatur enim A Γ, producaturque; & per E, Z ducantur E Θ Σ K, Z Λ N M Ξ O ipsi A B parallelæ, & E Π, Z P parallelæ ipsi A Δ. quoniam igitur Z Ξ, E Σ parallelæ sunt, & ad ipsas ducuntur E Z, Ξ Σ, Θ M; erit [per 4.6.] ut E Θ ad Θ Σ ita Z M ad M Ξ, & permutando ut E Θ ad Z M ita erit Θ Σ ad Ξ M: ergo ut quadratum ex Θ E ad quadratum ex Z M ita quadratum ex Θ Σ ad quadratum ex

ita quadratum ex K A ad quadratum ex A N, hoc est [per 4. & 22. 6.] quadratum ex E H ad quadratum ex Z H; & ut triangulum Δ Θ Σ ad triangulum Δ M Ξ ita quadratum ex Θ Δ ad quadratum ex Δ M, hoc est quadratum ex E Δ ad quadratum ex Δ Z: ergo ut E H ad H Z ita E Δ ad Δ Z.

Z H· ὡς δὲ τὸ Δ Θ Σ τρίγωνον πρὸς τὸ Δ M Ξ οὕτως τὸ ἀπὸ Θ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ M, τουτέστι τὸ ἀπὸ E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z· καὶ ὡς ἄρα ἡ E H πρὸς H Z οὕτως ἡ E Δ πρὸς Δ Z.

Prop. XL. *Theor.*

Iisdem positis, si per occursum contingentium ducatur recta linea tactus jungenti parallela; & à puncto, quod jungentem tactus bifariam dividit, ducatur recta utrique sectioni atque parallelæ ei quæ tactus conjungit occurrens: sicut tota ducta ad eam partem quæ extra sumitur inter parallelam & sectionem, ita erunt portiones ejusdem, inter sectiones & jungentem tactus interjectæ, inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

Sint oppositæ sectiones A, B, quarum centrum Γ; sintque contingentes A Δ, Δ B, & jungantur A B, Γ Δ E: erit itaque [per 39. 2. huj.] A E ipsi E B æqualis. ducatur per Δ recta Z Δ H Λ parallela ipsi A B, & per E recta ad libitum Θ E K Λ: dico ut Θ Λ ad Λ K ita esse Θ E ad E K.

Ducantur enim à punctis Θ, K rectæ N M Θ Ξ, K O T Π ipsi A B parallelæ, & Θ P, K Σ parallelæ ipsi A Δ; & ducatur Ξ A Γ T. itaque quoniam in rectas parallelas Ξ M, K Π cadunt Ξ A T, M A Π; erit [per 4. 6.] ut Ξ A ad A T ita M A ad A Π. ut autem Ξ A ad A T ita [per 34. 1.] Θ E ad E K; & ut Θ E ad E K ita Θ N ad K O, propter simi-

*

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A, B, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ A Δ, Δ B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A B καὶ ἡ Γ Δ E· ἴση ἄρα ἡ A E τῇ E B. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν A B ἤχθω ἡ Z Δ H Λ, ἀπὸ δὲ τοῦ E, ὡς ἔτυχεν, ἡ Θ E K Λ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Θ Λ πρὸς Λ K οὕτως ἡ Θ E πρὸς E K.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, K παρὰ μὲν τὴν A B αἱ N M Θ Ξ, K O T Π, παρὰ δὲ τὴν A Δ αἱ Θ P, K Σ, καὶ διήχθω ἡ Ξ A Γ T. ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς Ξ M, K Π διηγμέναι εἰσὶν αἱ Ξ A T, M A Π, ἔστιν ὡς ἡ Ξ A πρὸς τὴν A T οὕτως ἡ M A πρὸς A Π. ἀλλ' ὡς ἡ Ξ A πρὸς A T οὕτως ἡ Θ E πρὸς E K, ὡς δὲ ἡ Θ E πρὸς E K οὕτως ἡ Θ N πρὸς K O, διὰ τὴν ὁμοιότητα

τῶν

ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΞΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΤ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.



dratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΞΛ ad quadratum ex ΛΤ. ut autem quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ, & ut quadratum ex ΞΛ ad quadratum ex ΛΤ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ, & ut quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ ita quadratum ex ΘΛ ad quadratum ex ΛΚ: ut igitur quadratum ex ΘΛ ad quadratum e ΛΚ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ; & propterea ut ΘΛ ad ΛΚ ita ΘΕ ad ΕΚ.

Divisio hæc rectæ ad conicas sectiones ductæ, de qua in sex ultimis propositionibus agitur, ea est quæ *Harmonica* dicitur: qua fit ut rectangulum sub tota & parte media æquale sit rectangulo sub partibus extremis: ac datis tribus quibusvis è quatuor punctis, facile est quartum invenire, per ea quæ tradit *Pappus* in Lemmatis X. & XI. in hunc Librum. Postulatur autem hæc divisio *Harmonica* ad demonstrationes Libri quarti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ *μα'*.

Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις· εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, καὶ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ.

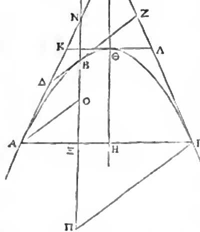
Prop. XLI. *Theor.*

Si parabolam contingentes tres rectæ inter se conveniant; in eadem ratione secabuntur.

SIT parabola ΑΒΓ, quam rectæ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ contingant: dico ut ΓΖ ad ΖΒ ita esse ΕΔ ad ΔΑ, & ΖΒ ad ΒΔ.

 Conjungatur

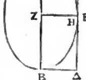
35. 1. huj.] ΜΒ ipsi ΒΠ æqualis, adeoque [per 2. 6.] ΜΖ ipsi ΖΓ. quod cum ΜΖ sit æqualis ΖΓ, & ΕΛ ipsi ΛΓ; erit ut ΜΓ ad ΓΖ ita ΕΓ ad ΓΛ, & permutando ut ΜΓ ad ΓΕ ita ΖΓ ad ΓΛ. ut autem ΜΓ ad ΓΕ ita [per 4. 6.] ΞΓ ad ΓΗ: ergo ut ΖΓ ad ΓΛ ita ΞΓ ad ΓΗ. sed ut ΛΓ ad ΓΕ ita ΗΓ ad ΓΑ: (quod utraque utriusque dupla sit) ex æquali igitur [per 22.5.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΑΓ ad ΓΞ; & per conversionem rationis ut ΓΕ ad ΕΖ ita ΓΑ ad ΑΞ; dividendoque ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΓΞ ad ΞΑ. rursus quoniam diameter est ΜΒ, contingitque ΑΝ, & ordinatim applicatur ΑΟ; erit ΝΒ ipsi ΒΟ, & ΝΔ ipsi ΔΑ æqualis. est autem & ΕΚ æqualis ipsi ΚΑ: ergo ut ΕΑ ad ΑΚ ita ΝΑ ad ΑΔ, & permutando ut ΕΑ ad ΑΝ ita ΚΑ ad ΑΔ. sed ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΝ: quare ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΚΑ ad ΑΔ. atque est ut ΓΑ ad ΑΗ ita ΕΑ ad ΑΚ: (utraque enim utriusque est dupla) ex æquali igitur erit ut ΓΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΔ; & dividendo, ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΕΔ ad ΔΑ. demonstratum est autem ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΓΖ ad ΖΕ: ergo [per 11.5.] ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΕΔ ad ΔΑ. rursus quoniam ut ΓΞ est ad ΞΑ ita [per 4.6.] ΓΠ ad ΑΟ, & est quidem ΓΠ dupla ipsius



ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΛΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΞΑ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ, καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ, καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΓΠ

τῆς

τῇ ΑΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.



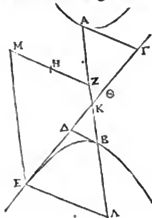
ΑΒ conjugata: ergo quadratum ex ΖΗ æquale erit quartæ parti figuræ quæ fit ad ΑΒ.

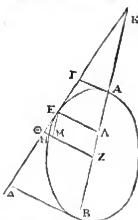
Εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ διὰ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Ε ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ· καὶ φανερὸν αὐτόθεν ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Si igitur in ellipsi & circulo recta ΖΗ per Ε transit; æquales sunt ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ: & ideo per se manifestum est rectangulum quod continetur sub ΑΓ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΖΗ, hoc est quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ constituitur.

Μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ.

Sed non transeat per Ε; & ΔΓ, ΒΑ productæ conveniant in Κ, ducaturque per Ε recta quidem ΕΛ ipsi ΑΓ parallela, ΕΜ vero ipsi ΑΒ.





ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ. ἔστι δὲ τῇ ΖΑ ἴση ἡ ΖΒ· ἀνά-

quoniam igitur rectangulum ΚΖΛ [per 37.1.huj.] quadrato ex ΑΖ est æquale; ut ΚΖ ad ΖΑ [per 17.6.] ita erit ΑΖ ad ΖΛ, & ita [per 12. vel 19. 5.] ΚΑ ad ΑΛ. sed ΖΒ ipsi ΖΑ æqualis est: quare

B continuatur.

Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbolam recta quævis contingat; abscindet ex asymptotis, ad sectionis centrum, rectas continentes rectangulum æquale ei quod continetur sub rectis ab altera contingente abscissis, ad verticem sectionis qui est ad axem.

SIT hyperbola A B, cujus asymptoti Γ Δ, Δ E, & axis B Δ; ducatur autem per B recta Z B H sectionem contingens, & alia quæpiam utcunque contingens ducatur Γ Λ Θ: dico rectangulum Z Δ H rectangulo Γ Δ Θ æquale esse.

Ducantur enim à punctis Λ, B rectæ Λ K, B Λ ipsi Δ H parallelæ, ut & rectæ Λ M, B N ipsi Γ Δ. quoniam igitur Γ Λ Θ sectionem contingit; erit [per 3.2.huj.] Γ Λ æqualis ipsi Λ Θ: quare Γ Θ dupla est ipsius Θ Λ, & Γ Δ ipsius Λ M, & Δ Θ ipsius Λ K dupla: ergo rectangulum Γ Δ Θ quadruplum est rectanguli K Λ M. eodem modo demonstrabitur rectangulum Z Δ H rectanguli Λ B N quadruplum. sed [per 12.2.huj.] rectangulum K Λ M est æquale rectangulo Λ B N: rectangulum igitur Γ Δ Θ rectangulo Z Δ H æquale erit. similiter demonstrabitur etiamsi Δ B sit alia quæpiam diameter, & non axis.

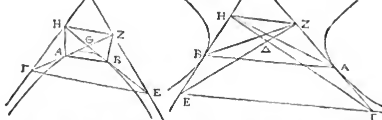
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ· ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ A B, ἀσύμπτωτοι δὲ ἡ Γ Δ, Δ E, ἄξων δὲ ὁ B Δ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη ἡ Z B H, ἄλλη δέ τις ὡς ἔτυχεν ἐφαπτομένη ἡ Γ Λ Θ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Z Δ H ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ Δ Θ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Λ, B παρὰ μὲν τὴν Δ H αἱ Λ K, B Λ, παρὰ δὲ τὴν Γ Δ αἱ Λ M, B N. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ Γ Λ Θ, ἴση ἡ Γ Λ τῇ Λ Θ· ὥστε ἡ Γ Θ τῆς Θ Λ διπλῆ, καὶ ἡ Γ Δ τῆς Λ M, καὶ ἡ Δ Θ τῆς Λ K· τὸ ἄρα ὑπὸ Γ Δ Θ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ K Λ M. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ Z Δ H τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ Λ B N. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ K Λ M τῷ ὑπὸ Λ B N· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Γ Δ Θ τῷ ὑπὸ Z Δ H. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν ἡ Δ B ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος, καὶ μὴ ἄξων.

ΠΡΟ-



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Γ Δ Ζ ἴσον τῷ ὑπὸ Η Δ Ε, ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Ε οὕτως ἡ Η Δ πρὸς Δ Ζ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Ε τῇ Ζ Η· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ Θ Η πρὸς Η Ε οὕτως ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Γ. ὡς δὲ ἡ Ε Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Γ Ζ πρὸς τὴν Ζ Α, διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ Θ Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Α· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Η τῇ Α Β.

Quoniam enim [per 43. 3. huj.] rectangulum Γ Δ Ζ æquale est rectangulo Η Δ Ε; ut Γ Δ ad Δ Ε ita erit Η Δ ad Δ Ζ: parallela est igitur [per 2.6.] Γ Ε ipsi Ζ Η; & ideo [per 4. 6.] ut Θ Η ad Η Ε ita Θ Ζ ad Ζ Γ. ut autem Ε Η ad Η Β ita Γ Ζ ad Ζ Α; utraque enim utriusque est dupla: ergo ex æquali, ut Θ Η ad Η Β ita Θ Ζ ad Ζ Α: recta igitur Ζ Η ipsi Α Β est parallela.

EUTOCIUS.

Ἀποδεδειγμένων τῶν Γ Ε, Ζ Η παραλλήλων, ἐπιζεύχθωσαν αἱ Η Α, Ζ Β. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Ζ Η τῇ Γ Ε, ἴσον τὸ Γ Η Ζ τρίγωνον τῷ Ε Η Ζ τριγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν Γ Η Ζ τοῦ Α Η Ζ διπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἡ Γ Ζ τῆς Ζ Α, τὸ δὲ Ε Ζ Η τοῦ Β Η Ζ διπλάσιον· ἴσον ἄρα τὸ Α Η Ζ τῷ Β Η Ζ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Η τῇ Α Β.

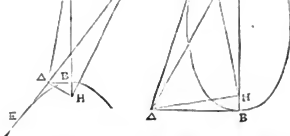
Demonstrato rectas Γ Ε, Ζ Η inter se parallelas, conjungantur Η Α, Ζ Β. quoniam parallelæ sunt Ζ Η, Γ Ε, erit triangulum Γ Η Ζ triangulo Ε Η Ζ æquale. atque est triangulum quidem Γ Η Ζ duplum trianguli Α Η Ζ, quia recta Γ Ζ ipsius Ζ Α est dupla; triangulum vero Ε Ζ Η duplum trianguli Β Η Ζ: ergo triangulum Α Η Ζ triangulo Β Η Ζ est æquale, & propterea recta Ζ Η ipsi Α Β parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με΄.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις, ἀπ᾽ ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἰ-

Prop. XLV. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremo axis rectæ ad rectos angulos ducantur; & rectangulum



Quoniam enim [ad 42. 3. huj.] ostensum est rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ æquale esse quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ fit; atque est rectangulum ΑΖΒ æquale quartæ parti ejusdem figuræ; rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ rectangulo ΑΖΒ æquale erit: ergo [per 16. 6.] ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΖΒ ad ΒΔ. & sunt anguli qui ad Α, Β recti: angulus igitur ΑΓΖ [per 6. 6.] angulo ΒΖΔ est æqualis; angulusque ΑΖΓ æqualis angulo ΖΔΒ. & quoniam angulus ΓΑΖ est rectus, anguli ΑΓΖ, ΑΖΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt. demonstratum autem est angulum ΑΓΖ æqualem esse angulo ΔΖΒ: ergo ΓΖΑ, ΔΖΒ anguli uni recto sunt æquales: angulus igitur ΔΖΓ rectus est. similiter & angulus ΓΗΔ rectus demonstrabitur.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ, ΑΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ἄρα ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

Prop. XLVI. *Theor.*

Iisdem positis, rectæ dicto modo junctæ æquales facient angulos ad contingentes.

Iisdem namque positis; dico angulum ΑΓΖ angulo ΔΓΗ, & angulum ΓΔΖ angulo ΒΔΗ æqualem esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

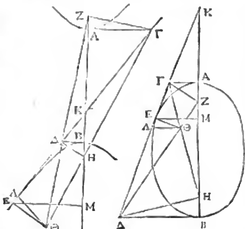
Τῶν αὐτῶν ὄντων, αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

ΤΩΝ γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

Ἐπεὶ

τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ· ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνίας, καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας. ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἐστὶ κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς



Θ; rectæ vero ΓΔ, ΒΑ productæ occurrant in puncto Κ; jungaturque ΕΘ: dico ΕΘ super ΓΔ perpendicularem esse.

Si enim non ita sit; ducatur à puncto Θ ad ΓΔ perpendicularis ΘΛ. quoniam igitur angulus ΓΔΖ æqualis est [per præced.] angulo ΗΔΒ, & angulus ΔΒΗ rectus æqualis recto ΔΛΘ; triangulum ΔΗΒ triangulo ΛΘΔ simile erit: quare [per 4. 6.] ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΒΔ ad ΔΛ. sed ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΖΓ ad ΓΘ, propterea quod [ex præc.] anguli ad Ζ, Η recti, & qui ad Θ æquales sunt. est autem ut ΖΓ ad ΓΘ ita ΑΓ ad ΓΛ, ob similitudinem triangulorum ΑΖΓ, ΛΓΘ: ut igitur ΒΔ ad ΔΛ ita [per 11. 5.] ΑΓ ad ΓΛ: & permutando ut ΔΒ ad ΓΑ ita ΔΛ ad ΛΓ. ut autem ΔΒ ad ΓΑ ita ΒΚ ad ΚΑ: ergo ut ΔΛ ad ΛΓ ita ΒΚ ad ΚΑ. à puncto Ε ducatur recta ΕΜ ipsi ΑΓ parallela, quæ proinde ad ΑΒ ordinatim applicata erit; & ut ΒΚ ad ΚΑ ita erit [per 36. 1.huj.] ΒΜ ad ΜΑ. sed [per 4. 6.] ut ΒΜ ad ΜΑ ita ΔΕ ad ΕΓ: quare [per 11. 5.] ut

ΔΛ

trum ΔΘ descriptus per puncta E, H transibit: quare [per 21. 3.] angulus ΔΘH æqualis erit angulo ΔEH; in eodem enim circuli segmento sunt. similiter & ΓEZ angulus angulo ΓΘZ est æqualis: angulus autem ΓΘZ angulo ΔΘH [per 15.1.] æqualis est; quia sunt ad verticem. angulus igitur ΓEZ angulo ΔEH æqualis erit.

Prop. XLIX. *Theor.*

Iisdem positis, si ab aliquo horum punctorum perpendicularis ad contingentem demittatur: quæ à puncto quo cadit cathetus ducuntur ad axis utramque extremitatem rectos angulos inter se continebunt.

Ponantur eadem, & à puncto H ad ΓΔ ducatur perpendicularis HΘ; & jungantur AΘ, BΘ: dico angulum AΘB rectum esse.

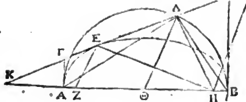
κλος ἥξει διὰ τῶν E, H σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘH τῇ ὑπὸ ΔEH, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓEZ τῇ ὑπὸ ΓΘZ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘZ τῇ ὑπὸ ΔΘH ἐστὶν ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ. καὶ ἡ ὑπὸ ΓEZ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔEH ἐστὶν ἴση.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· αἱ ἀπὸ τοῦ γινομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ HΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΘ, BΘ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ AΘB γωνία ὀρθή ἐστιν.

Ἐπεὶ



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΛΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ἔστι δὲ, διὰ τὸ προδειχθὲν, ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΛΒ γωνία· καὶ ὁ ἄρα περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΛ ἄρα, ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου, ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.

Jungantur enim EH, ΛΛ, ΛH, ΛB; & per H ducatur HM parallela ipsi EZ. quoniam igitur rectangulum AZB est æquale rectangulo ΛHB, recta AZ ipsi HB æqualis erit. est autem & AΘ æqualis ΘB: ergo & ZΘ ipsi ΘH; & propterea EΛ ipsi ΛM est æqualis. itaque quoniam demonstratum est [ad 48. 3.huj.] angulum ΓEZ angulo ΔEH æqualem esse; estque angulus ΓEZ [per 29.1.] æqualis angulo EMH: erit & angulus EMH ipsi MEH æqualis, & recta EH ipsi HM. sed & EΛ est æqualis ipsi ΛM, uti demonstravimus: recta igitur HΛ ad EM perpendicularis est. est autem [per 49. 3. huj.] & angulus AΛB rectus: quare si circa diametrum AB circulus describatur, per Λ transibit. atque est ΘΛ æqualis ipsi ΘB: ergo & ΘΛ, quæ est ex centro circuli, ipsi ΘB æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ναʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ

Prop. LI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus applicetur ad axem rectangulum æquale quartæ parti figuræ excedens figurâ qua-

dratâ;

dupla est ΖΔ; ipsius vero ΓΒ dupla ΑΒ: recta igitur ΕΖ utrique ΖΔ, ΑΒ est æqualis; & propterea ΕΖ ipsam ΖΔ superat quantitate ΑΒ.

ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ, ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

Prop. LII. *Theor.*

Si in ellipsi ad majorem axem ab utraque parte applicetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ deficiens figura quadrata; & à punctis ex applicatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur: ipsi axi æquales erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν· ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

SIT ellipsis, cujus major axis ΑΒ; & sit utrumque rectangulorum ΑΓΒ, ΑΔΒ æquale quartæ parti figuræ; & à punctis Γ, Δ ad sectionem inclinentur rectæ lineæ ΓΕ, ΕΔ: dico ΓΕ, ΕΔ axi ΑΒ æquales esse.

Ducatur enim contingens ΖΕΘ; & per centrum, quod sit Η, ducatur ΗΚΘ ipsi ΓΕ parallela. quoniam igitur angulus ΓΕΖ [per 48. 3. huj.] est æqualis angulo ΘΕΚ, & [per 29. 1.] angulus ΖΕΓ angulo ΕΘΚ; erit angulus ΕΘΚ ipsi ΘΕΚ æqualis, & [per 6. 1.] recta ΘΚ æqualis ipsi ΚΕ. & quoniam ΑΗ est æqualis ipsi ΗΒ, & ΓΑ ipsi ΔΒ; erit & ΓΗ ipsi ΗΔ æqualis: ergo [per 2. 6.] & ΕΚ æqualis ipsi ΚΔ. & ob id ΕΔ quidem dupla est ipsius ΘΚ, ut & ΕΓ [per 4. 6.] dupla ipsius ΚΗ: utraque igitur ΓΕ, ΕΔ ipsius ΗΘ est dupla. sed ΑΒ [per 50. 3. huj.] dupla est ipsius ΗΘ: quare ΑΒ ipsis ΓΕ, ΕΔ æqualis erit.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕ, ΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ΓΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ

Ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ Η παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση, καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΓΕ, ΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕ, ΕΔ.

ΠΡΟ-

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ εἶδος. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΑΖ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΓΕ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἴδει.

A puncto enim B ordinatim applicetur recta BZ: ergo [per 21. 1. huj.] ut rectangulum AZΓ ad quadratum ex ZB ita transversum figuræ latus ad rectum; & [per 1. 6.] ita quadratum ex AΓ ad ipsius figuram. sed [per 23.6.] rectanguli AZΓ ad quadratum ex BZ ratio componitur ex ratione AZ ad ZB & ratione ΓZ ad ZB: ergo ratio figuræ ad quadratum ex AΓ componitur ex ratione ZB ad AZ & ratione BZ ad ZΓ. sed ut ZB ad AZ ita EΓ [per 4. 6.] ad ΓA, & ut BZ ad ZΓ ita ΔA ad AΓ: ratio igitur figuræ ad quadratum ex AΓ componitur ex ratione ΓE ad ΓA & ratione AΔ ad ΓA. sed [per 23.6.] rectangulum contentum sub AΔ, ΓE ad quadratum ex AΓ ex eisdem rationibus componitur: ergo ut figura ad quadratum ex AΓ ita est rectangulum contentum sub AΔ, ΓE ad quadratum ex AΓ: rectangulum igitur contentum sub AΔ, ΓE æquale erit figuræ quæ fit ad AΓ.

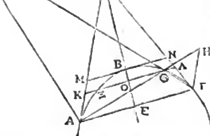
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ΄.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ

Prop. LIV. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni sectionem vel circuli circumferentiam contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem sectionis punctum ductæ rectæ parallelis occurrant: rectangulum sub abscissis ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit compositam, ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ

ipsi ΛΓ parallelæ sunt: perspicuum est [per 32. 1. huj.] rectam MN sectionem contingere. & cum ΑΕ sit æqualis ipsi ΕΓ; erit & MB ipsi BN æqualis, & KO ipsi ΟΛ, & [per 46. & 47. 1. huj.] ΘΟ ipsi ΟΞ, & ΚΘ ipsi ΞΛ. itaque quoniam MB, MA sectionem contingunt, & ipsi MB parallela ducta est ΚΘΛ; erit [per 16. 3. huj.] ut quadratum ex AM ad quadratum ex MB, hoc est ad rectangulum NBM, ita quadratum ex AK ad rectangulum ΞΚΘ, hoc est ad rectangulum ΛΘΚ. ut autem ΝΓ ad AM ita ΛΓ ad KA: [a] ut igitur rectangulum sub ΝΓ, MA ad quadratum ex AM ita rectangulum sub ΛΓ, KA ad quadratum ex AK: ergo ex æquali ut rectangulum sub ΝΓ, MA ad rectangulum NBM ita rectangulum sub ΛΓ, KA ad rectangulum ΛΘΚ. sed [per 23. 6.] rectangulum sub ΛΓ, KA ad rectangulum ΛΘΚ rationem habet compositam ex ratione ΓΛ ad ΛΘ, hoc est [per 4. 6.] ΖΑ ad ΑΓ, & ratione AK ad ΚΘ, hoc est ΗΓ ad ΓΑ, atque hæc eadem est ratio quæ rectanguli sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ: ut igitur rectangulum sub ΝΓ, MA ad rectangulum NBM ita rectangulum sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ. rectangulum vero sub ΝΓ, MA ad rectangulum NBM, (sumpto medio rectangulo ΝΔΜ) habet rationem compositam, ex ratione rectanguli sub ΝΓ, MA ad rectangulum ΝΔΜ & ratione rectanguli ΝΔΜ ad rectangulum NBM: ergo & rectangulum sub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ habet rationem compositam ex ratione rectanguli sub ΝΓ, MA ad rectangulum ΝΔΜ & ratione re-



ὅτι ἐφάπτεται ἡ MN. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ MB τῇ BN, καὶ ἡ KO τῇ ΟΛ, καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ, καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ MB, MA, καὶ παρὰ τὴν MB ἦκται ἡ ΚΘΛ· ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ MB, τουτέστι τὸ ὑπὸ NBM, οὕτως τὸ ἀπὸ AK πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς AM οὕτως ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΚΑ· [a] ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ἀπὸ AM οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, KA πρὸς τὸ ἀπὸ KA· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΓ, KA πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΛΓ, KA πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΛ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς AK πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM (τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου) τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ NBM· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὑπὸ ΝΓ, MA πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ

πρὸς

ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τε τοῦ ΔΝ πρὸς ΝΒ καὶ τοῦ τοῦ ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΒ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ· ἕξει ἄρα τὸν συγκείμενον ἐκ τε τοῦ ΔΓ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ τοῦ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὃς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

Quoniam enim rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ rationem habet compositam ex ratione ΔΝ ad ΝΒ & ratione ΔΜ ad ΜΒ; ut autem ΔΝ ad ΝΒ ita ΔΓ ad ΓΕ, & ut ΔΜ ad ΜΒ ita ΔΑ ad ΑΕ: habebit igitur rationem compositam ex ratione ΔΓ ad ΓΕ & ratione ΔΑ ad ΑΕ; quæ quidem ratio eadem est quam rectangulum ΓΔΑ habet ad rectangulum ΓΕΑ: ut igitur rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

PROP. LV. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppositas sectiones contingentes sibi ipsis occurrant, & per occursum ducatur recta jungenti tactus parallela; per tactus vero ducantur contingentibus parallelæ, & à tactibus ad idem alterutræ sectionis punctum ducantur rectæ quæ parallelas secent: rectangulum sub abscissis contentum ad quadratum ejus quæ tactus jungit eandem rationem habebit, quam rectangulum sub contingentibus factum ad quadratum rectæ ab occursu ad sectionem ductæ jungentique tactus parallelæ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ,

SINT oppositæ sectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, quas contingant rectæ ΑΗ, ΗΔ; & juncta ΑΔ ducatur per Η recta ΓΗΕ ipsi ΑΔ parallela; & à puncto Α ducatur ΑΜ parallela ipsi ΔΗ,

 atque

ctangulum Δ H A ita rectangulum K Z A ad rectangulum sub Δ A, A K: sed ratio rectanguli K Z A ad rectangulum sub A K, Δ A componitur ex ratione Z K ad K A & ratione Z A ad A Δ; ut autem Z K ad K A ita [per 4. 6.] A Δ ad Δ N, & ut Z A ad A Δ ita Δ A ad A Θ: ratio igitur quadrati ex Γ H ad rectangulum Δ H A composita est ex ratione A Δ ad Δ N & ratione Δ A ad A Θ. sed quadrati ex A Δ ad rectangulum sub A Θ, N Δ ratio ex eisdem rationibus componitur; ergo ut quadratum ex Γ H ad rectangulum A H Δ ita est quadratum ex A Δ ad rectangulum ex A Θ, N Δ; & invertendo rectangulum sub A Θ, N Δ erit ad quadratum ex A Δ ut rectangulum A H Δ ad quadratum ex Γ H.

πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΑ, ΑΚ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΚΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΔΑ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΑ πρὸς ΑΔ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΘ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΘ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ· καὶ ἀνάπαλιν τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ.

Prop. LVI. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ alteram oppositarum sectionum contingentes sibi ipsis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem alterius sectionis punctum ducantur rectæ, quæ parallelas secent: rectangulum sub abscissis contentum ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit, compositam ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ ab occursu contingentium ad punctum medium jungentis tactus ductæ inter punctum illud & alteram sectionem interceptæ ad quadratum ejus quæ inter eandem sectionem & occursum, & ex ratione quam habet rectangulum sub contin-

ΠΡΟΤΑΣΙΚ ιϛ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον, τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει (ἐπὶ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν) ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς

τὸ ὑπὸ ΠΚΓ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΑ, ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος (τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου) σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ



rectangulum ΠΚΓ. quadratum autem ex ΘΔ est æquale rectangulo ΘΔΖ, & rectangulum ΠΚΓ rectangulo ΚΓΗ; ergo ut quadratum ex ΒΘ ad rectangulum ΘΔΖ ita quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ΚΓΗ. sed ut rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ *: ex æquali igitur ut rectangulum sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ ita rectangulum ex ΑΗ, ΚΒ ad rectangulum sub ΚΓΗ. ratio autem rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ (sumpto medio rectangulo ΘΕΖ) componitur ex ratione rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ & ratione rectanguli ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ. sed ut rectangulum sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ ita quadratum ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ †. & ut rectangulum ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ ita [per 12. lem. 3. huj.] rectangulum

* Quoniam enim similia sunt triangula ΑΕΒ, ΘΕΖ, ΚΕΗ, erit ΖΕ ad ΕΑ ut ΘΕ ad ΕΒ; & ideo componendo, ut ΖΑ ad ΑΕ ita ΘΒ ad ΒΕ. Pari modo constat esse ΗΑ ad ΑΕ ut ΚΒ ad ΒΕ; & invertendo, ut ΑΕ ad ΑΗ ita ΒΕ ad ΒΚ: quare, ex æquali, est ΖΑ ad ΑΗ sicut ΘΒ ad ΒΚ; adeoque ΖΑ ad ΘΒ ut ΑΗ ad ΒΚ. sed ut ΖΑ ad ΘΒ ita rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ; & ut ΑΗ ad ΒΚ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ: est igitur ut rectangulum sub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum sub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ.

† Nam ratio rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ componitur ex ratione ΑΖ ad ΖΕ & ratione ΒΘ ad ΘΕ. sed tam ratio ΑΖ ad ΖΕ quam ratio ΒΘ ad ΘΕ eadem est cum ratione ΑΔ ad ΔΕ: ergo ratio ex illis composita (hoc est ratio rectanguli sub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ) eadem est cum ratione quadrati ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΕ.

ΑΕΒ

ΑΠΟΛ-

Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν.

ΠΡΟΤΕΡΟΝ μὲν ἐξέθηκα, γράψας πρὸς Εὔδημον τὸν Περγαμηνὸν, τῶν συντεταγμένων ἡμῖν Κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία. μετηλλαχότος δὲ ἐκείνου, τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρὸς σὲ γράψαι, διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ' ἡμῶν πραγματευόμενα, πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον. περιέχει δὲ τοῦτο κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάν περ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν· ἔτι κώνου τομὴ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις· καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις. τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασυδαῖον, οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφείς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἥψατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνείαν μόνον πεποίηται ὁ Νικοτέ-

Apollonius Attalo S. P.

ANTEA quidem ex octo libris, quos de Conicis composuimus, tres priores ad *Eudemum Pergamenum* scriptos edidimus. Verum eo mortuo, cum reliquos ad Te mittere decreverimus, quartum hunc, quod scriptorum nostrorum desiderio tenearis, in præsentia ad Te mittimus. Ostendit autem ad quot puncta, ut plurimum, Coni sectiones inter se & circuli circumferentiæ occurrant, nisi totæ totis congruant: præterea ad quot puncta, ut plurimum, Coni sectio & circuli circumferentia oppositis sectionibus conveniant; itemque oppositæ sectiones oppositis sectionibus: atque ad hæc alia non pauca his similia. Horum autem primum *Conon Samius* ad *Thrasydæum* scribens explicavit, non ritè confectis demonstrationibus: quamobrem *Nicoteles Cyrenæus* cum nonnihil reprehendit. Verum secundi mentionem tantum fecit *Ni-*

vel etiam quod nullo modo fiat. Hujusmodi autem præcognitio satis idoneam solutiones quærendi præbet ansam; & ad analyses διορισμῶν Theoremata hæc admodum utilia sunt. Verum & absque hac utilitate, propter ipsas demonstrationes digna erunt quæ recipiantur: multa enim alia in Mathematicis disciplinis ob hoc ipsum, nec ob aliquid aliud, recipere consuevimus.

ἂν γένοιτο. ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις· καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις τῶν διορισμῶν εὔχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα. χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας, καὶ δι' αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἔσται ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο, καὶ οὐ δι' ἄλλο τι, ἀποδεχόμεθα.

EUTOCIUS.

Quartus liber, *Anthemi* amicissime, inquirit, quot modis conorum sectiones inter sese & circuli circumferentiæ conveniant, sive contingentes fuerint sive secantes. Est autem & elegans & legentibus perspicuus, præsertim ex editione nostra: ac ne commentariis quidem ullis indiget, quod enim necessarium est explet ipse textus. In eo autem omnia demonstrantur argumentatione ducente ad impossibile; sicut & *Euclides* fecit in iis quæ de intersectionibus & tactionibus circuli conscripsit. quæ sane ratio & ad usum accommodata & necessaria *Aristoteli* ac Geometris, præcipue vero *Archimedi*, visa est. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit, adhibitis Conicis, resolvere & componere quodcunque propositum fuerit: quocirca & ipse *Apollonius* in principio libri dixit quatuor libros ad hujus disciplinæ elementa sufficere, reliquos autem quatuor ad abundantiorem scientiam pertinere. Perlege igitur eos diligenter, & si tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. *Vale.*

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσιν, εἴτε ἐφαπτόμεναι εἴτε τέμνουσαι. ἔστι δὲ τι χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως· καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται, τὸ γὰρ ἐνδέον αἱ παραγραφαὶ πληροῦσι. δέδεικται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὔχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει. ἀναγινώσκοντι οὖν σοὶ τὰ τέσσαρα βιβλία, δυνατόν ἐστι διὰ τῆς τῶν κωνικῶν πραγματείας ἀναλύειν καὶ συντιθέναι τὸ προτεθέν· διὸ καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος, ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου, φησὶ τὰ τέσσαρα βιβλία ἀρκεῖν πρὸς τὴν ἀγωγὴν τὴν στοιχειώδη, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι περιουσιαστικώτερα. ἀνάγνωθι οὖν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ εἰ σοὶ κατὰ θυμὸν γένηται καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον ὑπ' ἐμοῦ ἐκτεθῆναι, καὶ τοῦτο Θεοῦ ἡγουμένου γενήσεται. ἔῤῥωσο.

Prop. I. *Theor.*

Si in coni sectione, vel circuli circumferentia, aliquod punctum extra sumatur; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera vero in duobus punctis secans; & quam rationem habet

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν κώνου τομῆς, ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτηται ἡ δὲ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνου-

σα

τὰς ἁφάς ἐστιν ἡ Β Α, καὶ διήχθω ἡ Γ Δ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ Α Β κατὰ τὸ Η· ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Ε οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Ε, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Ε οὕτως ἡ Γ Ζ πρὸς Ζ Ε· οὐκ ἄρα ἡ Β Α καθ' ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν Γ Ε· κατὰ τὸ Ζ ἄρα.

Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνον, ἐὰν ἡ μὲν Δ Β ἐφάπτηται, ἡ δὲ Δ Γ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται.

Δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν Δ Α, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν.

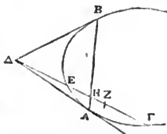
quoniam rectæ Β Δ, Δ Α sectionem contingunt; & tactus jungit recta Β Α; recta vero Γ Δ sectionem in punctis Γ, Ε secat, ipsamque Α Β secat in Η: erit [per 37. 3.huj.] ut Γ Δ ad Δ Ε ita Γ Η ad Η Ε, quod est absurdum; posuimus enim, ut Γ Δ ad Δ Ε ita esse Γ Ζ ad Ζ Ε: igitur Β Α non secat Γ Ε in alio puncto; quare in ipso Ζ secet necesse est.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt: at in hyperbola tantum, si recta Δ Β sectionem contingat, & Δ Γ in punctis Β, Γ secet, puncta vero Ε, Γ contineant tactum ad Β, & punctum Δ sit intra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet demonstratio.

Possumus enim tunc solum à puncto Δ aliam ducere contingentem Δ Α, & quæ reliqua sunt ad demonstrationem perficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

*Τῶν αὐτῶν ὄντων, τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτω τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν μεταξὺ αὐτῶν· [ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς,] τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας· δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν Δ Α, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδείκνυσιν.



Prop. II. *Theor.*

Iisdem existentibus, puncta Ε, Γ tactum ad Β non contineant; at, si fuerit hyperbola, sit punctum Δ intra angulum asymptotis comprehensum: possumus igitur [per 49. 2. huj.] à puncto Δ alteram contingentem ducere, quæ sit Δ Α, & reliqua similiter demonstrare.

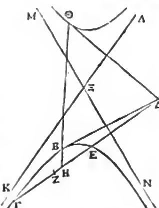
* Nam si Ellipseos diameter fuerit, res manifesta est ex 34. primi.

* Prop.

SI in Hyperbola occursus E, Γ contineant tactum ad B, & punctum Δ sit in angulo qui deinceps est angulo asymptotis comprehenso: recta, quæ à tactu ad divisionem ducitur, occurret oppositæ sectioni, & quæ ab occursu ejus ad punctum Δ ducitur eandem sectionem continget.

ΕΑΝ ἐν τῇ ὑπερβολῇ αἱ μὲν Ε, Γ συμπτώσεις τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν περιέχωσι, τὸ δὲ Δ σημεῖον ᾖ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης.

Sint oppositæ sectiones B, Θ, quarum asymptoti ΚΛ, ΜΞΝ; & punctum Δ sit in angulo ΛΞΝ; ab eo autem ducta recta ΔΒ sectionem contingat, & ΔΓ secet, ita ut occursus E, Γ tactum ad B contineant; & quam rationem habet ΓΔ ad ΔΕ eandem habeat ΓΖ ad ΖΕ. demonstrandum est rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere sectioni Θ; & quæ ab occursu ducitur ad Δ sectionem contingere.



Ducatur enim à puncto Δ recta ΔΘ sectionem contingens; & juncta ΘΒ, si fieri possit, non transeat per Z, sed per aliud punctum H: est igitur [per 37.3.huj.] ut ΓΔ ad ΔΕ ita ΓΗ ad ΗΕ, quod est absurdum; posuimus enim ut ΓΔ ad ΔΕ ita esse ΓΖ ad ΖΕ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΞΝ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ ΛΞΝ γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ ΔΒ, τεμνέτω δὲ ἡ ΔΓ, καὶ αἱ Ε, Γ συμπτώσεις περιεχέτωσαν τὴν Β ἁφήν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

Prop. V. *Theor.*

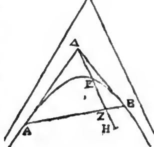
IISDEM positis, si punctum Δ sit in una asymptotôn; quæ à puncto B ad Z ducitur eidem asymptoto parallela erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ.

Ὑποκείσθω

Β Δ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ Δ Ε Ζ παράλληλος ἔστω τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ κείσθω τῇ Δ Ε ἴση ἡ Ε Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.



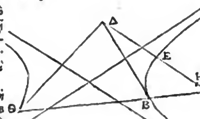
Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Δ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Β Α τεμνέτω τὴν Δ Ε, εἰ δυνατὸν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ' ἕτερον τὸ Η· ἔσται δὴ ἴση ἡ Δ Ε τῇ Ε Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ Δ Ε τῇ Ε Ζ ἴση.

tis contentum, & ab ipso Δ recta quidem Δ B ducta sectionem contingat, Δ E Z vero parallela sit alteri asymptotôn, ponaturque ipsi Δ E æqualis E Z: dico rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad Δ, sectionem contingere.

Ducatur enim Δ A, quæ sectionem contingat; & juncta B A secet ipsam Δ E, si fieri potest, non in Z, sed in alio puncto H: erit itaque [per 30.3.huj.] Δ E æqualis ipsi E H, quod est absurdum; supponebatur enim Δ E ipsi E Z æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὰ αὐτὰ συμβήσεται.



Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ Δ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ Β ἐκπιπτέτω, εἰ δυνατὸν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Ε τῇ Ε Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ Δ Ε τῇ Ε Ζ ἴση.

PROP. VII. *Theor.*

ISDEM positis, sit punctum Δ in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur: dico etiam sic eadem evenire.

Ducatur enim Δ Θ sectionem contingens; & juncta Θ B, si fieri potest, non cadat in Z, sed in aliud punctum H: ergo [per 31. 3.huj.] Δ E est æqualis ipsi E H, quod est absurdum; supponitur enim Δ E æqualis ipsi E Z.

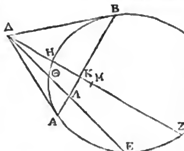
portionales ad idem punctum conveniant: quæ per divisiones ducitur recta sectioni in duobus punctis occurret; & quæ ab occursu ad punctum extra sumptum ducuntur sectionem contingent.

διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς.

SIT aliqua prædictarum sectionum A B, & ab aliquo puncto Δ ducantur rectæ Δ E, Δ Z quæ sectionem secent, illa quidem in Θ, E punctis, hæc vero in Z, H; & quam rationem habet E Δ ad Δ Θ eandem habeat E Λ & Λ Θ, & rursus quam habet Z Δ ad Δ H habeat Z K ad K H: dico rectam, quæ ab Λ ad K ducitur, utraque ex parte occurrere sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad Δ, sectionem contingere.

ΕΣΤΩ γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ A B, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ Δ E, Δ Z τέμνουσαι τὴν γραμμὴν, ἡ μὲν κατὰ τὰ Θ, E ἡ δὲ κατὰ τὰ Z, H, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ E Δ πρὸς Δ Θ τοῦτον ἐχέτω ἡ E Λ πρὸς Λ Θ, ὃν δὲ ἡ Z Δ πρὸς Δ H τοῦτον ἐχέτω ἡ Z K πρὸς K H· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ K ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ' ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς.

Quoniam enim utraque rectarum E Δ, Z Δ sectionem in duobus punctis secat, poterimus ab ipso Δ sectionis diametrum ducere; atque adeo contingentes ex utraque parte. ducantur igitur Δ A, Δ B, quæ sectionem contingant; & juncta B A, si fieri possit, non transeat per Λ, K, sed vel per alterum ipsorum tantum, vel per neutrum. transeat primo per Λ tantum, & rectam Z H in puncto M secet: ergo [per 37.3. huj.] ut Z Δ ad Δ H ita Z M ad M H, quod est absurdum: supponitur enim ut Z Δ ad Δ H ita Z K ad K H. si vero recta B A per neutrum punctorum Λ, K transeat, in utraque ipsarum Δ E, Δ Z dictum absurdum sequetur.



Ἐπεὶ γὰρ αἱ E Δ, Z Δ ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα τέμνουσι τὴν τομὴν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ' ἑκάτερα. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ A, Δ B, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ B A, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, K, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ, καὶ τεμνέτω τὴν Z H κατὰ τὸ M· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Z Δ πρὸς Δ H οὕτως ἡ Z M πρὸς M H, ὅπερ ἄτοπον· (ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Z Δ πρὸς Δ H οὕτως ἡ Z K πρὸς K H. ἐὰν δὲ ἡ B A μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Λ, K πορεύηται, ἐφ' ἑκατέρας τῶν Δ E, Δ Z συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

ΠΡΟ-

... τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔσω ἐν τῇ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ· δεικτέον ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖται τῇ τε ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

Ἔστω δὴ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ, καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. ἐὰν δὲ μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβαίνει.

producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, oppositas sectiones contingent.

SIT hyperbola ΕΗ, cujus asymptoti ΝΞ, ΟΠ, & centrum Ρ; punctum vero Δ sit in angulo ΞΡΠ; & ducantur ΔΕ, ΔΖ, quarum utraque hyperbolam in duobus punctis secet; & puncta Ε, Θ à punctis Ζ, Η contineantur; sitque ut ΕΔ ad ΔΘ ita ΕΚ ad ΚΘ, & ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΛ ad ΛΗ: demonstrandum est rectam per Κ, Λ ductam occurrere & sectioni ΕΖ & ei quæ ipsi opponitur; ac rectas quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, sectiones contingere.

Sit itaq; sectio opposita Μ; & à puncto Δ ducantur ΔΜ, ΔΣ, quæ sectiones contingant; junctaque ΜΣ, si fieri possit, non transeat per Κ, Λ; sed vel per alterum ipsorum, vel per neutrum. transeat primum per Κ, & secet ΖΗ in Χ: est igitur [per 37.3.huj.] ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΧ ad ΧΗ, quod est absurdum; supponitur enim ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΛ ad ΛΗ. si vero ΜΣ per neutrum punctorum Κ, Λ transeat, in utraque ipsarum ΕΔ, ΔΖ impossibile istud eveniet.

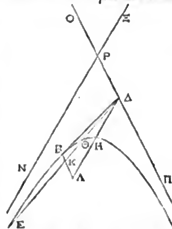
Prop.

ita Z X ad X H, quod est absurdum *: recta igitur à puncto B ducta parallela ipsi Π O per unum tantum eorum non transibit; ergo per utrumque transeat necesse est.

ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ B παρὰ τὴν Π O ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ K ἐλεύσεται· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα.

Prop. XIV. *Theor.*

IISDEM positis, si punctum Δ sit in una asymptotôn, & recta quidem Δ E sectionem in duobus punctis secet, Δ H vero alteri asymptoto parallela illam secet in uno tantum, quod sit H; fiatque ut Δ E ad Δ Θ ita E K ad K Θ, & ipsi Δ H ponatur æqualis & in directo H Λ: quæ per puncta K, Λ transit recta & asymptoto parallela erit, & sectioni occurret; quæ vero ab occursu ducitur ad Δ, sectionem continget.



Similiter enim ut in superioribus, ducta recta Δ B contingente: dico eam, quæ à puncto B ducitur asymptoto Π O parallela, per puncta K, Λ transire.

Si enim per K solum transeat; non erit Δ H ipsi H Λ æqualis, quod [per 34. 3.huj.] est absurdum. si vero per Δ solum, non erit ut E Δ ad Δ Θ ita E K ad K Θ †. quod si neque per K transeat, neque per Λ, in utrisque absurdum sequetur: ergo per utrumque punctum transire necesse est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν Δ E τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ Δ H κατὰ μόνον τὸ H, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ γένηται ὡς ἡ Δ E πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ E K πρὸς K Θ, τῇ δὲ Δ H ἴση ἐπ᾽ εὐθείας τεθῇ ἡ H Λ· ἡ διὰ τῶν K, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλός τε ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ὁμοίως γὰρ τοῖς προειρημένοις, ἀχθείσης τῆς Δ B ἐφαπτομένης· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ B παρὰ τὴν Π O ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν K, Λ σημείων.

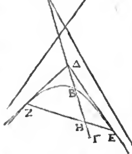
Εἰ οὖν διὰ τοῦ K μόνου ἥξει, οὐκ ἔσται ἡ Δ H τῇ H Λ ἴση, ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ τοῦ Λ μόνου, οὐκ ἔσται ὡς ἡ E Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ E K πρὸς K Θ. εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ K, μήτε διὰ τοῦ Λ, κατ᾽ ἀμφότερα συμβήσεται τὸ ἄτοπον· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται.

* Ponitur enim Z Λ ad Λ H sicut Z Δ ad Δ H. † Quod est absurdum per 35. 3 huj.

ΠΡΟ-

... ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ. ἤχθω ἡ Δ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Ζ Ε ἐκβεβλήσθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ Α Δ πρὸς Δ Β οὕτως ἡ Α Η πρὸς Η Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Α Δ πρὸς Δ Β οὕτως ἡ Α Γ πρὸς Γ Β.



strandum est rectam à puncto Z ad Γ productam occurrere sectioni; & eam quæ ab occursu ducitur ad Δ, sectionem contingere.

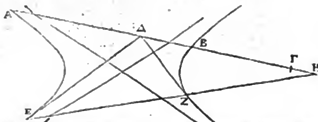
Quoniam enim punctum Δ est intra angulum qui sectionem continet, poterimus [per 49. 2. huj.] ab ipso Δ aliam contingentem ducere, quæ sit Δ E; & juncta Z E, si fieri potest, per Γ non transeat, sed per aliud punctum H: erit igitur [per 37. 3. huj.] ut A Δ ad Δ B ita A H ad H B, quod est absurdum; posuimus enim ut A Δ ad Δ B ita esse A Γ ad Γ B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω· λέγω ὅτι ἡ

PROP. XVI. *Theor.*

IISDEM positis, sit punctum Δ in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico rectam à puncto Z ad



ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

Γ productam occurrere oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad Δ, eandem oppositam sectionem contingere.

Sint

Sint eadem quæ supra, & punctum Δ in una asymptotôn; ductaque per Z eidem asymptoto parallela non transeat per Γ, si fieri potest, sed per H; erit igitur [per 36. 3. huj.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΗ ad ΗΒ, quod est absurdum *: ergo quæ à puncto Z ducitur asymptoto parallela per punctum Γ transibit.

ἧς ἐστι τὸ σημεῖον.

Ἔστωσαν τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ, εἰ δυνατόν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si in sectionibus oppositis aliquod punctum sumatur inter duas sectiones, & ab ipso duæ rectæ ducantur utramque sectionem secantes; & quas rationes habent interjectæ inter unam sectionem & punctum ad eas quæ inter idem punctum & alteram sectionem interjiciuntur, easdem habeant rectæ majores iis quæ sunt inter sectiones oppositas ad excessus ipsarum: quæ per terminos majorum rectarum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum ducuntur, sectiones contingent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη′.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἑτέρας καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου οὕτως ἔχωσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν· ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσοῦται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐφάψονται τῶν τομῶν.

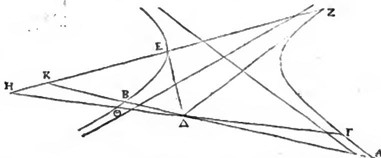
Sint oppositæ sectiones Α, Β, & punctum Δ inter sectiones, quod quidem primum ponatur in angulo sub asymptotis contento, & per Δ rectæ ΑΔΒ, ΓΔΘ ducantur; major igitur

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένῃ γωνίᾳ, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν

* Est enim, [ex hyp.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΓ ad ΓΒ.

ρείσθωσαν ὡς εἴρηται· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

dividantur: dico eam quæ per Κ, Η producitur, occurrere utrique sectionum; & quæ ab occursibus ducuntur ad Δ, sectiones contingere.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ καὶ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται. εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει, ἢ δι' οὐδετέρου· καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον.

Ducantur enim à puncto Δ rectæ ΔΕ, ΔΖ, quæ utramque sectionem contingant: ergo quæ ducitur per Ε, Ζ etiam per Κ, Η transibit. si enim non; vel transibit per alterum ipsarum, vel per neutrum: & rursus eodem modo absurdum concludetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ′.

Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά· ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς

Prop. XX. *Theor.*

Si sumptum punctum sit in una asymptotôn, & reliqua eadem fiant: recta, quæ transit per terminos excessuum, asymptoto in qua est punctum parallela erit; & quæ à puncto ducitur ad occursum sectionis & rectæ per

quidem Δ B K, alteri asymptoto parallela, in uno tantum puncto B occurrat sectioni; recta vero Γ Δ Θ H utrique sectioni occurrat; & ut Γ Δ ad Δ Θ ita sit Γ H ad H Θ, & ipsi Δ B æqualis sit B K: dico rectam, quæ per puncta K, H transit, occurrere sectioni, & asymptoto in qua est punctum Δ parallelam esse; & quæ ab occursu ad punctum Δ ducitur, sectionem contingere.

Ducatur enim recta contingens Δ Z; & à Z ducatur parallela ei asymptoto in qua est Δ: transibit igitur ea per puncta K, H. nam si non ita sit, eadem absurda sequantur necesse est.

Δ B K τῇ τομῇ κατὰ μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ B, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ Γ Δ Θ ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ Γ H πρὸς H Θ, τῇ δὲ Δ B ἴση ἔστω ἡ B K· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν K, H σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ Δ Z, καὶ ἀπὸ τοῦ Z παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν K, H. εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται.

Prop. XXII. *Theor.*

Similiter autem sint oppositæ sectiones, asymptotique; & punctum Δ sumatur in angulo deinceps ei qui sub asymptotis continetur; recta vero Γ Δ Θ secet utramque sectionem, & Δ B alteri asymptoto parallela sit; sitque ut Γ Δ ad Δ Θ ita Γ H ad H Θ, & ipsi Δ B æqualis ponatur B K; dico rectam quæ per puncta K, H transit, occurrere utrique oppositarum sectionum; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum Δ, sectiones easdem contingere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἔστωσαν δὲ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι, καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, ὁμοίως εἰλήφθω καὶ ἡ μὲν Γ Δ Θ τέμνουσα τὰς τομάς, ἡ δὲ Δ B παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ Γ H πρὸς H Θ, τῇ δὲ Δ B ἴση ἔστω ἡ B K· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν K, H σημείων συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

Ἤχθω

ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἤτοι δὴ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται, ἢ δι' οὐδετέρου. καὶ ἤτοι ἡ ΔΑ οὐκ ἔσται ἴση τῇ ΑΚ, ἀλλ' ἄλλῃ τινι, ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ ΔΒ τῇ ΒΗ οὐκ ἴση, ἢ οὐδετέρα οὐδετέρᾳ. καὶ πάλιν ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται· ἥξει ἄρα ἡ ΕΖ διὰ τῶν Κ, Η.

quæ contingant sectiones; & juncta EZ, si fieri potest, non transeat per K, H; vel igitur per alterum ipsorum, vel per neutrum transibit. unde vel ΔA non erit æqualis AK, sed alii cuipiam, quod [per 31. 3. huj.] est absurdum: vel ΔB non erit æqualis ipsi BH; vel neutra neutræ. & rursus in utrisque idem continget absurdum: recta igitur EZ per puncta K, H necessario transibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

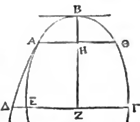
Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μέν τι εἶναι ταὐτὸν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν.

Εἰ δυνατὸν, κώνου τομὴ ἡ ΔΑΒΓ κύκλου περιφερείᾳ ἢ κώνου τομῇ τῇ ΕΑΒΓ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒΓ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ ΑΔ καὶ τὸ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ ΑΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΘ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ ΒΗΖ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΘ ἐφάψεται ἑκατέρας τῶν τομῶν, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ΔΕΓ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΔΖ τῇ ΖΓ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΕΖ τῇ ΖΓ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXIV. *Theor.*

Coni sectio coni sectioni vel circuli circumferentiæ non ita occurrit, ut pars quidem eadem sit, pars vero non sit communis.

Si enim fieri potest, coni sectio ΔABΓ coni sectioni aut circuli circumferentiæ EABΓ occurrat, atque ipsarum communis pars sit eadem ABΓ, non communis autem AΔ, AE; & sumpto in ipsis puncto Θ jungatur ΘA, & per quodvis punctum E ducatur ΔEΓ parallela ipsi AΘ, sectaque AΘ bifariam in H, ducatur per H diameter BHZ: ergo [per 32. 1. huj.] quæ per B ipsi AΘ parallela ducitur, utramque sectionem continget, & parallela erit ipsi ΔEΓ; eritque [per 46. vel 47. 1. huj.] in altera quidem sectione ΔZ æqualis ZΓ, in altera vero EZ æqualis ZΓ: quare & ΔZ ipsi ZE æqualis erit, quod fieri non potest.



EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαὶ, ὡς εἴρηται, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΔΕΓ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕΓ

Aliter.

Sint sectiones EABΓ, ΔABΓ, ducaturque utcunque recta ΔEΓ, & per A ipsi ΔEΓ parallela

potest.

Prop. XXV. *Theor.*

Coni sectio coni sectionem vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quam quatuor non secat.

SI enim fieri potest, secet in quinque punctis Α, Β, Γ, Δ, Ε; sintque Α, Β, Γ, Δ, Ε occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes, & junctæ ΑΒ, ΓΔ producantur: convenient igitur [per 24.& 25.2. huj.] inter se extra sectionem in parabola & hyperbola. itaque conveniant in Λ; & quam rationem habet ΑΛ ad ΛΒ eandem habeat ΑΟ ad ΟΒ; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΠ ad ΠΓ: ergo [per 9. 4. huj.] quæ à puncto Π ad Ο juncta producitur, ex utraque parte occurret sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad Λ sectiones contingent. occurrat in punctis Θ, Ρ, & ΘΛ, ΛΡ jungantur: contingent igitur hæ sectiones; ergo ΕΛ utramq; secabit, quoniam [ex hyp.] inter Β, Γ nullus est occursus. itaque secet in punctis Μ, Η: ergo [per 37. 3. huj.] in altera quidem sectione erit ut ΕΛ ad ΛΗ ita ΕΝ ad ΝΗ: in altera autem ut ΕΛ ad ΛΜ ita ΕΝ ad ΝΜ: quod fieri non potest *;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Κώνου τομὴ κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων.

ΕΙ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτω κατὰ πέντε σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῆς τομῆς ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς. συμπιπτέτω δὲ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται· ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἑκατέραν τομὴν, ἐπείπερ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστι. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΗ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΜ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ· τοῦτο δὲ ἀδύνατον,

* Nam ΕΛ ad ΛΜ majorem habet rationem quam ΕΛ ad ΛΗ. est vero [per 37. 3 huj.] ΕΛ ad ΛΜ ut ΕΝ ad ΝΜ; & ΕΛ ad ΛΗ ut ΕΝ ad ΝΗ: ergo ΕΝ ad ΝΜ majorem habet rationem quam ΕΝ ad ΝΗ: unde ΝΜ minor est quam ΝΗ. quod fieri non potest.

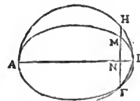
Ε... γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσι κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλλήλαις μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάψεται δὴ τῶν δύο τομῶν, καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ γινέσθω ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα· οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ᾖ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν ἀπόδειξιν, διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ.

Contingant enim sese duæ quæpiam dictarum curvarum in puncto A: dico eas non occurrere sibi ipsis ad alia puncta plura quam duo.

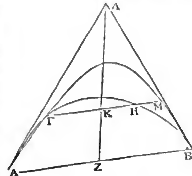
Nam, si fieri potest, occurrant ad puncta B, Γ, Δ; sintque occursus deinceps, nullum intermedium relinquentes; & juncta ΒΓ producatur; à puncto autem A ducatur contingens ΑΛ, quæ quidem continget duas sectiones & cum recta ΓΒ conveniet. conveniat in Λ, & fiat ut ΓΛ ad ΛΒ ita ΓΠ ad ΠΒ; jungaturque ΑΠ, & producatur: occurret igitur ea [per 9. 4 huj.] sectionibus; & quæ ab occursibus ad punctum Λ ducuntur, sectiones contingent. itaque occurrat in punctis Θ, Ρ, & jungantur ΘΛ, ΛΡ; contingent igitur sectiones: ergo quæ à puncto Δ ad Λ ducitur utramque sectionem secabit; & eadem quæ dicta sunt [in præced.] absurda sequentur: non igitur se secant ad plura puncta quam duo. Si vero in ellipsi & circuli circumferentia ΓΒ ipsi ΑΛ parallela sit; pari modo [atque in præced.] demonstrationem faciemus, rectam ΑΘ diametrum esse ostendentes.

At si Γ H parallela sit rectis ad puncta A, B contingentibus, ut in ellipsi in secunda figura; jungemus lineam A B, quæ [per convers. 27. 2. huj.] sectionum diameter erit; ergo utraque rectarum Γ H, Γ M in puncto N bifariam secabitur; quod est absurdum: igitur sectiones ad aliud punctum sibi ipsis non occurrunt, sed ad A, B tantum.



Ἐὰν δὲ ἡ Γ Η παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν Α Β ἐροῦμεν ὅτι διάμετρός ἐστι τῶν τομῶν· ὥστε δίχα τμηθήσεται ἑκατέρα τῶν Γ Η, Γ Μ κατὰ τὸ Ν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσι γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνα τὰ Α, Β.

Sit deinde Γ inter tactus, ut in tertia figura: perspicuum est igitur sectiones non contingere sese ad punctum Γ, quia ad duo tantum puncta contingere ponebantur. secent igitur seipsas in Γ, & à punctis A, B ducantur A Λ, Λ B, quæ sectiones contingant; jungaturque A B, quæ in Z bifariam dividatur: ergo [per 29. 2. huj.] à puncto Λ ad Z ducta diameter erit; quæ quidem per Γ non transibit. si enim transeat, quæ per Γ ipsi A B parallela ducitur [per convers. 5, & 6. 2. huj.] continget utramque sectionem, quod fieri non potest. itaque ducatur à puncto Γ recta Γ K H M parallela ipsi A B: erit igitur in altera quidem sectione Γ K æqualis ipsi K H, in altera vero ipsi K Γ æqualis K M; quare K M ipsi K H erit æqualis, quod fieri non potest. eodemque modo si contingentes inter se parallelæ sint, ex iis quæ diximus idem concludetur absurdum.



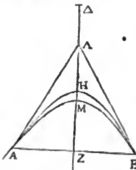
Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς· φανερὸν δὴ ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ, κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπέκειντο ἐφαπτόμεναι. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αἱ Α Λ, Λ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Β, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Ζ διάμετρός ἐστι. διὰ μὲν οὖν τοῦ Γ οὐκ ἐλεύσεται. εἰ γὰρ ἥξει, ἡ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν Α Β ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν Α Β ἡ Γ Κ Η Μ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ Γ Κ ἴση τῇ Κ Η, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ Κ Μ τῇ Κ Γ ἴση· ὥστε καὶ ἡ Κ Μ τῇ Κ Η, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ καὶ ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται.

ΠΡΟ-

duobus punctis, extra ipsam cadens.

ΕΣΤΩ παραβολὴ μὲν ἡ Α Η Β, ὑπερβολὴ δὲ ἡ Α Μ Β, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν Α, Β τομῶν, συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Β, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Δ Ζ. ἐπεὶ οὖν αἱ Α Η Β, Α Μ Β τομαὶ κατὰ τὰ Α, Β ἐφάπτονται, κατ᾽ ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα Δ Ζ κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ Δ Ζ· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω κέντρον τὸ Δ· ἔσται δὴ, διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν, ὡς ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Μ οὕτως ἡ Μ Δ πρὸς Δ Λ, καὶ λοιπὴ ἡ Ζ Μ πρὸς Μ Λ. μείζων δὲ ἡ Ζ Δ τῆς Δ Μ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Ζ Μ τῆς Μ Λ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ Ζ Η τῇ Η Λ· ὅπερ ἀδύνατον.

SIT parabola quidem A H B, hyperbola vero A M B; & si fieri potest, sese contingant in punctis A, B; & ab ipsis ducantur rectæ utramque sectionem contingentes, quæ in Δ conveniant; junctaque A B bifariam secetur in Z, & ducatur Δ Z. itaque quoniam sectiones A H B, A M B sese contingunt in punctis A, B [per 27. 4. huj.] ad aliud punctum sibi ipsis non occurrent: quare Δ Z in alio atque alio puncto sectiones secabit. secet in H, M, & producatur Δ Z: igitur [per 29. 2. huj.] in centrum hyperbolæ cadet. sit quidem centrum Δ: ergo, propter hyperbolam, ut Z Δ ad Δ M ita erit [per 37. 1. huj. & 17. 6.] M Δ ad Δ Λ; & [per 19. 5.] ita reliqua Z M ad M Λ. est autem Z Δ major quam Δ M: ergo [per 14. 5.] & Z M major quam M Λ. sed & propter parabolam [per 35. 1. huj.] erit Z H æqualis ipsi H Λ; quod absurdum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

Prop. XXX. *Theor.*

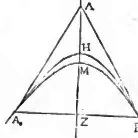
Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα, ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα.

Parabola ellipsim vel circuli circumferentiam non continget in duobus punctis, intra ipsam cadens.

ΕΣΤΩ γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Η Β, παραβολὴ δὲ ἡ Α Μ Β, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β

SIT ellipsis, vel circuli circumferentia A H B, parabola vero A M B; &, si fieri potest, in duobus punctis A, B sese contingant, & ab ipsis ducantur

punctis A, B sese contingant; & ducantur ab ipsis rectæ contingentes, quæ inter se conveniant, ut A Λ, Λ B; junctaque Δ Λ producatur ad Z,& jungatur A B: ergo [per 30.2.huj.] Δ Λ Z secat bifariam rectam A B in Z. utrasque autem sectiones in H, M secabit; quare [per 37. 1. huj.] propter hyperbolam A H B, rectangulum Z Δ Λ est æquale quadrato ex Δ H; & propter hyperbolam A M B rectangulum Z Δ Λ æquale est quadrato ex Δ M: quadratum igitur ex M Δ quadrato ex Δ H æquale erit; quod fieri non potest.

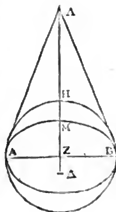


πλεσθωσαν κατὰ τὰ A, B, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν A, B ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ A Λ, Λ B, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ Δ Λ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, ἐπιζεύχθω δὲ καὶ ἡ A B. ἡ ἄρα Δ Λ Z τὴν A B δίχα τέμνει κατὰ τὸ Z, τεμεῖ δὲ ἡ Δ Λ Z τὰς τομὰς κατὰ τὰ H, M· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν A H B ὑπερβολὴν, ἴσον τὸ ὑπὸ Z Δ Λ τῷ ἀπὸ Δ H, διὰ δὲ τὴν A M B, τὸ ὑπὸ Z Δ Λ ἴσον τῷ ἀπὸ Δ M· τὸ ἄρα ἀπὸ M Δ ἴσον τῷ ἀπὸ Δ H, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si ellipsis ellipsim vel circuli circumferentiam idem centrum habentem in duobus punctis contingat; recta conjungens tactus per centrum transibit.

Contingant enim sese dictæ lineæ in punctis A, B; & juncta A B, per A, B puncta ducantur rectæ sectiones contingentes, quæ, si fieri possit, conveniant in Λ; & recta A B in Z bifariam dividatur, & jungatur Λ Z: ergo [per 29. 2. huj.] Λ Z diameter erit sectionum. sit centrum Δ, si fieri potest: rectangu-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβʹ.

Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα· ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύσα διὰ τοῦ κέντρου πεσεῖται.

ἘΦΑΠΤΕΣΘΩΣΑΝ γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ A, B σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A B, καὶ διὰ τῶν A, B ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἤχθωσαν, καὶ εἰ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ A B δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Λ Z· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Λ Z τῶν τομῶν. ἔστω, εἰ δυνατὸν, κέντρον

σιν ὅπι τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς Α Δ Β Ε Γ γραμμῆς· αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

tinent ad eas partes ad quas sunt concava sectionis Α Δ Β Ε Γ: ergo dictæ curvæ ad easdem partes habent concava sua, quod fieri non potest; posuimus enim ea ad contrarias partes sita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

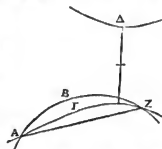
Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμπτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι· προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si coni sectio vel circuli circumferentia occurrat uni oppositarum sectionum in duobus punctis; & curvæ, quæ inter occursus interjiciuntur, ad easdem partes concava habeant: producta curva ultra occursus alteri oppositarum sectionum non occurret.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, Α Γ Ζ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Β Ζ, συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἐχέτωσαν αἱ Α Β Ζ, Α Γ Ζ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα· λέγω ὅτι ἡ Α Β Ζ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ Α Ζ, καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ Δ, Α Γ Ζ, καὶ ἡ Α Ζ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολὴν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ Δ ἀντικειμένῃ· οὐδὲ ἄρα ἡ Α Β Ζ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ Δ.



Sint oppositæ sectiones Δ, Α Γ Ζ; & coni sectio vel circuli circumferentia Α Β Ζ occurrat alteri oppositarum sectionum in duobus punctis Α, Ζ; habeantque Α Β Ζ, Α Γ Ζ concava ad easdem partes: dico curvam Α Β Ζ productam sectioni Δ non occurrere.

Jungatur enim Α Ζ; &, quoniam Δ, Α Γ Ζ oppositæ sectiones sunt, & recta Α Ζ in duobus punctis hyperbolam secat, producta [per 32.2.huj.] non occurret oppositæ sectioni Δ: quare neque curva Α Β Ζ eidem occurret.

Prop.

oppositis sectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurret.

ὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

HOC autem perspicue constat ex eo, quod sectio occurrens uni oppositarum sectionum reliquæ non occurrit ad plura puncta quam duo.

ΦΑΝΕΡΟΝ δὲ τοῦτο, ἐκ τοῦ τὴν μιᾶ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσαν τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυοῖν μὴ συμπίπτειν.

Prop. XXXVII. *Theor.*

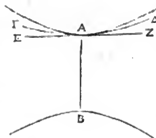
Si coni sectio vel circuli circumferentia unam oppositarum sectionum concava sui parte contingat; alteri oppositarum non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Εὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται τοῖς κοίλοις αὐτῆς· τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων ὐ συμπεσοῦνται.

SINT oppositæ sectiones A, B; & sectionem A contingat alia ΓΑΔ: dico sectionem ΓΑΔ sectioni B non occurrere.

Ducatur enim per punctum A recta contingens EAZ: utramq; igitur sectionem continget in A: quare * non occurret sectioni B; & propterea neque curva ΓΑΔ eidem occurret.



ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ τῆς A τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ B ὐ συμπεσεῖται.

Ηχθω ἀπὸ τοῦ A ἐφαπτομένη ἡ EAZ· ἑκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ A· ὥστε ὐ συμπεσεῖται τῇ B, ὥστε ὐδὲ ἡ ΓΑΔ.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

Si coni sectio vel circuli circumferentia utramque oppositarum sectionum contingat in uno puncto; oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη.

Εὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται σημεῖον καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.

* Non enim potest transire per loca quæ sunt κατὰ κορυφὴν angulo sub asymptotis sectionis.

ΕΣΤΩ

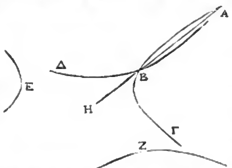
μένα συμπίπτη, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων,

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ τοῖς κοίλοις, καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε ἐ συμπεσεῖται τῇ Ζ.

Επεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ ἦν ὑπερβολὴν τὴν ΑΒΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς· ὥστε ἐ συμπεσεῖται τῇ Ζ τομῇ. ὁμοίως δὴ, διὰ τὴν ΑΒΓ ὑπερβολὴν, ἐδὲ τῇ Ε ἀντικειμένῃ συμπίπτει· ἐδὲ ἡ Ε ἄρα τῇ Ζ συμπεσεῖται.

num in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret.

SINT oppositæ sectiones ABΔ, Z; & hyperbola ABΓ sectioni ABΔ occurrat in punctis A, B, habens convexa è regione sita; sitque sectioni ABΓ opposita sectio E: dico ipsam E sectioni Z non occurrere.



Jungatur enim AB & ad H producatur. quoniam igitur ABH recta secat hyperbolam ABΔ, producta vero ex utraque parte extra sectionem cadit; ideo [per 33. 2. huj.] non occurret sectioni Z. similiter, propter hyperbolam ABΓ, neque occurret oppositæ sectioni E: ergo sectio E sectioni Z non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μʹ.

Εὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων ἐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὑπερβολὴ δὲ ΑΓΒ συμπιπτέτω ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων·

Prop. XL. *Theor.*

Si hyperbola occurrat utrique oppositarum sectionum: quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum in duobus punctis occurret.

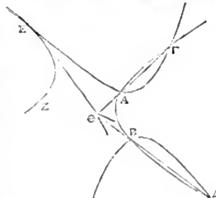
SINT oppositæ sectiones A, B; & AΓB hyperbola utrique occurrat: dico sectionem,

PROP. XLI. *Theor.*

Si hyperbola utramque oppositarum sectionum in duobus punctis secet, convexa habens è regione utrique sita; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα πρὸς ἑκατέραν τὰ κυρτά· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

SINT oppositæ sectiones A, B; & hyperbola ΓΑΒΔ utramque secet in duobus punctis, convexa habens è regione utrisque sita: dico sectionem EZ huic oppositam nulli ipsarum A, B occurrere.



Si enim fieri potest, occurrat sectioni A in puncto E; & junctæ ΓA, ΔB producantur. convenient igitur hæ inter sese. conveniant autem in Θ: erit igitur [per 25. 2. huj.] Θ intra angulum contentum sub asymptotis sectionis ΓΑΒΔ cui opponitur sectio EZ: ergo quæ à puncto E ad Θ ducitur, cadet intra angulum contentum sub ipsis AΘ, ΘB. rursus quoniam ΓAE, ΔB oppositæ sectiones sunt, recta ΔBΘ producta [per 33. 2.huj.] non conveniet sectioni ΓAE: quare si jungatur EΘ, cadet ea extra angulum AΘB, quod quidem absurdum; cadebat enim ea ipsa EΘ intra angulum AΘB: quocirca sectio EZ neutri sectionum A, B conveniet.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν A, B τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά· λέγω ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ EZ οὐδεμιᾷ τῶν A, B συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω τῇ AΓ κατὰ τὸ E, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓA, ΔB, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ EZ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη [ἐὰν ἐκβληθῇ] ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν AΘB περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΓAE, ΔB, ἡ ΔBΘ ἐκβληθεῖσα οὐ συμπίπτει τῇ ΓAE τομῇ· ἡ ἄρα EΘ ἐπιζευχθεῖσα ἐκτὸς πεσεῖται[*] τῆς ὑπὸ AΘB γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ αὐτὴ ἡ EΘ ἐντὸς τῆς ὑπὸ AΘB· οὐκ ἄρα ἡ EZ μηδεμιᾷ τῶν A, B συμπεσεῖται.

* Scil. fieri non potest ut recta ΔEΘ, transiens per tres locos [ad 33.2.huj.] definitos, secet AΓB vel B. Sed & fieri non potest ut AΓB secet B, & tamen ΔEΘ harum neutri occurrat.

EU-

μεταξὺ τῶν ΑΞ, ΗΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΠΘ, ΘΡ, μὴ συμβάλλουσι ταῖς Α, Β τομαῖς, περιέχουσι τὰς ΝΗ, ΗΛ ἀσυμπτώτους, καὶ πολλῷ μᾶλλον τὴν ΕΖ τομήν· ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

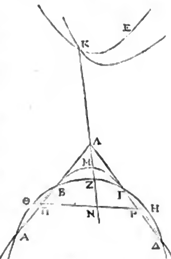
... & HN. quoniam igitur ΠΘ, ΘΡ, non occurrentes sectionibus Α, Β, continent asymptotos ΝΗ, ΗΛ, & multo magis sectionem ΕΖ; sequitur ΒΖ nulli oppositarum sectionum occurrere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα τέμνῃ σημεῖα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XLII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum in quatuor punctis secet; quæ ipsi opponitur sectio non occurret alteri oppositarum.



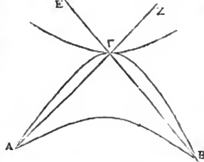
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῇ ἀντικειμένη ἡ Κ· λέγω ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ ἐχέτω ἡ ΑΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν

Sint oppositæ sectiones ΑΒΓΔ, Ε; & hyperbola ipsam ΑΒΓΔ secet in quatuor punctis Α, Β, Γ, Δ; sitque ei opposita sectio Κ: dico Κ sectioni Ε non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in Κ: & junctæ ΑΒ, ΔΓ producantur: convenient igitur [per 25.2. huj.] inter se. conveniant in Λ; & quam rationem habet ΑΛ ad ΛΒ habeat ΑΠ ad ΠΒ; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΡ ad ΡΓ: ergo [per 9.4. huj.] recta, quæ per Π, Ρ producitur, utrique sectioni occurret; & quæ ab Λ ad occursus ducuntur sectionem contingent. jungatur itaque ΚΛ, & producatur: secabit igitur angulum

& producantur: recta igitur ΑΓ, ΒΓ [per 33. 2. huj.] sectioni Δ non occurrent; sed neque occurrent sectioni Γ præterquam in uno puncto Γ. si enim in alio puncto; oppositæ sectioni ΑΒ [per 33. 2. huj.] non occurrent. positum autem est ΑΓ, ΒΓ occurrere sectioni ΑΒ: quare sequitur, ΑΓ, ΒΓ sectioni Γ in solo puncto Γ occurrere; sectioni vero Δ nullo modo: ergo Δ erit intra angulum ΕΓΖ; & propterea sectionibus oppositis ΑΒ, Γ minime occurret.



σιν· αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΓ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται· ἀλλ' οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν κατὰ τὸ Γ. εἰ γὰρ συμβάλλουσι καὶ καθ' ἕτερον, τῇ ΑΒ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσοῦνται. ὑπόκειται δὲ συμπίπτουσαι· αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ' ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲν ὅλως συμβάλλουσιν· ἡ Δ ἄρα ἔσται ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΓΖ· ὥστε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται ταῖς ΑΒ, Γ ἀντικειμέναις.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si hyperbola uni oppositarum sectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipsi opponitur, alteri oppositarum, præterquam in uno puncto, non occurret.

Sint oppositæ sectiones ΑΛΒΓ, ΔΕΖ; & hyperbola ΑΜΒΓ occurrat sectioni ΑΛΒΓ in tribus punctis Α, Β, Γ; sit autem sectioni ΑΜΒΓ opposita sectio ΔΕΚ: dico sectionem ΔΕΚ non occurrere sectioni ΔΕΖ præterquam in uno puncto.

Si enim fieri potest, in punctis Δ, Ε occurrat: & jungantur ΑΒ, ΔΕ; quæ vel parallelæ erunt inter se, vel non.

Sint primum parallelæ; secenturque ΑΒ, ΔΕ bifariam in punctis Η, Θ, & jungatur ΗΘ: est igitur [per 36. 2. huj.] ΗΘ diameter omnium se-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλείοσι καθ' ἕν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΛΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΜΒΓ συμβαλλέτω τῇ ΑΛΒΓ κατὰ τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ τῇ ΑΜΒΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕΚ τῇ ΔΕΖ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα ἢ ἕν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι παράλληλοί εἰσιν, ἢ οὔ.

Ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ πασῶν τῶν τομῶν,

καὶ



Μὴ ἔςωσαν δὲ παράλληλοι αἱ Α Β, Δ Ε, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ Γ Ο ἤχθω παρὰ τὴν Α Π, καὶ συμπιπτέτω τῇ Δ Π ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ Α Β, Δ Ε δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ Η Ν, Σ Ι, Θ Λ, Μ Σ, ἀπὸ δὲ τῶν Ν, Ι, Λ, Μ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ Τ Ι, Ν Τ, Μ Υ, Λ Τ· ἔσονται δὴ αἱ μὲν Τ Ι, Ν Τ παρὰ τὴν Δ Π, αἱ δὲ Λ Τ, Μ Υ παρὰ τὰς Α Π, Ο Ρ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ὑπὸ Α Π Β πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π Ε, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν οὕτως τὸ ὑπὸ Α Π Β πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν. διὰ τὰ αὐτὰ ἔςαι, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ Μ Υ πρὸς τὸ ἀπὸ Υ Ι οὕτως τὸ ὑπὸ Ξ Ρ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Ρ Ε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Λ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ν οὕτως τὸ ὑπὸ Ο Ρ Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Ρ Ε· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Ο Ρ Γ τῷ ὑπὸ Ξ Ρ Γ, ὅπερ ἀδύνατον.

Sed non sint parallelæ A B, Δ E; producanturque & conveniant in Π, & ducatur Γ O ipsi A Π parallela, quæ cum Δ Π productâ conveniat in P. secentur autem A B, Δ E bifariam in H, Θ; & per H, Θ ducantur diametri H N, Σ I; Θ Λ, M Σ; & in punctis N, I, Λ, M rectæ T I, N T, M T, Λ T sectiones contingant: erunt igitur [per 5. 2. huj.] T I, N T parallelæ ipsi Δ Π; & Λ T, M T ipsis A Π, O P parallelæ. & quoniam ut quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita [per 19. 3. huj.] rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E, ac (per eandem) ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E: ut igitur quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N. eadem ratione ut quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita erit rectangulum Ξ P Γ ad rectangulum Δ P E, & ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita O P Γ rectangulum ad rectangulum Δ P E: ergo rectangulum O P Γ rectangulo Ξ P Γ est æquale, quod impossibile est*.

* *Hanc propositionem fœde depravatam integritati suæ restituimus.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μιᾶς ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδεμιᾷ συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α Β Γ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ Α Β Δ τὴν μὲν Α Β Γ τεμνέτω κα-

Prop. XLV. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingat, alteram vero secet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio nulli oppositarum occurret.

Sint oppositæ sectiones A B Γ, Δ; & hyperbola A B Δ sectionem quidem A B Γ in pun-

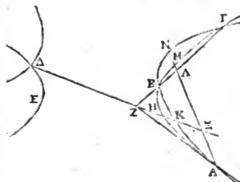
Ppp ctis

Prop. XLVI. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum in uno puncto contingat, eandemque secet in duobus punctis; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret.

Sint oppositæ sectiones ΑΒΓ, Δ, & hyperbola ΑΗΓ sectionem ΑΒΓ contingat quidem in puncto Α, secet vero in Β, Γ; & ipsi ΑΗΓ opposita sit sectio Ε: dico Ε sectioni Δ non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in Δ; junctaque ΒΓ producatur ad Ζ; & à puncto Α ducatur recta ΑΖ contingens. similiter demonstrabitur punctum Ζ esse intra angulum sub asymptotis contentum; & rectam ΑΖ utrasq; sectiones contingere; & ΔΖ productam secare sectiones inter Α, Β, videlicet in punctis Η, Κ: & quam rationem habet ΓΖ ad ΖΒ habeat ΓΛ ad ΛΒ, & juncta ΛΑ producatur; sectiones igitur in alio atque alio puncto secabit. secet in Μ, Ν: ergo [per 1. 4. huj.] quæ per Ζ ad puncta Μ, Ν ducuntur sectiones contingent. & similiter iis quæ superius dicta sunt, propter alteram quidem sectionem [per 39. 3. huj.] erit ut ΞΔ ad ΔΖ ita ΞΚ ad ΚΖ; propter alteram vero ut ΞΔ ad ΔΖ ita

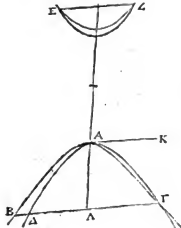


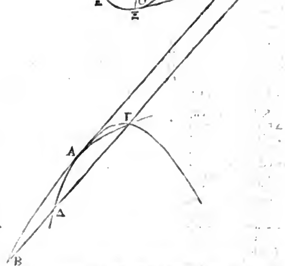
Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Ἐστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας ἐστί, καὶ ἡ ΑΖ ἐφάψεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ· καὶ ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ ἐχέτω ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΑ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Ν· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Μ, Ν ἐφάψονται τῶν τομῶν. καὶ ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον, διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ

ΞΗ





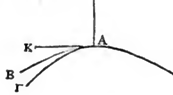
Μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ παρὰ τὴν ΑΚ ἠγμένη συμπιπτέτω τῇ ΕΖ κατὰ τὸ Ν, αἱ δὲ διάμετροι διχοτομοῦσαι τὴν ΕΖ κατὰ τὸ Μ τεμνέτωσαν τὰς τομὰς κατὰ τὰ Ξ, Ο, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ· ἔσται ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΟ, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ ΔΝΓ

At non sint parallelæ ΑΚ, ΕΖ, sed conveniant in Κ; recta vero ΓΔ ipsi ΑΚ parallela ducta conveniat cum ΕΖ in Ν; & diametri bifariam dividentes ΕΖ in puncto Μ sectiones in punctis Ξ, Ο secent; atque à Ξ, Ο ducantur ΞΠ, ΟΡ sectiones contingentes: erit igitur [ut in 44.4.huj.] quadratum ex ΑΠ ad quadratum ex ΠΞ sicut quadratum ex ΑΡ ad quadratum ex ΡΟ; & propterea [per 19. 3. huj.] ut rectangulum

* Est enim, [per 11.5.] ΞΗ ad ΗΖ ut ΞΚ ad ΚΖ. & ideo, [per 14.5.] quando ΞΗ major est quam ΞΚ, erit ΗΖ major quam ΚΖ. quod fieri non potest.

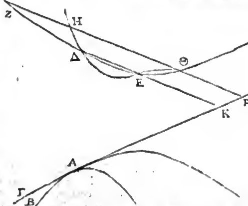
ΔΝΓ

... rallelæ; seceturque ΔE bifariam in Λ, & jungatur AΛ: erit igitur [per 34. 2. huj.] AΛ diameter duarum conjugatarum, quæ sectiones inter puncta Δ, E secabit in M, N; propter ΔΛE in puncto Λ bifariam sectam. ducatur per Θ recta ΘΞZH parallela ΔE: erit igitur in altera sectione ΘΞ æqualis ipsi ΞZ, in altera vero ΘΞ ipsi ΞH æqualis; quare ΞZ ipsi ΞH est æqualis, quod fieri non potest.



... λληλοι αἱ ΑΚ, ΔΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὴ διάμετρος ἡ ΑΛ τῶν δύο συζυγῶν, καὶ τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε, κατὰ τὰ Μ, Ν, ἐπεὶ ἡ ΔΛΕ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΞΖΗ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΖ, ἐν δὲ ἑτέρᾳ ἡ ΘΞ τῇ ΞΗ· ὥστε καὶ ἡ ΞΖ τῇ ΞΗ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Sed non sint AK, ΔE parallelæ, conveniantque in K, & reliqua eadem fiant: producta vero AK occurrat ipsi ZΘ in P. similiter ac in iis quæ jam dicta sunt, demonstrabimus, ut rectangulum ΔKE ad quadratum ex AK ita esse rectangulum ZPΘ ad quadratum ex PA in sectione ZΔE; &, in sectione HΔE, ita rectangulum HPΘ ad quadratum ex PA: rectangulum igitur HPΘ æquale est rectangulo ZPΘ, quod fieri non potest: ergo EΔZ ipsi EΔH ad plura puncta quam duo non occurret.



Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γεγονέτω. καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΖΘ κατὰ τὸ Ρ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ἐν μὲν τῇ ΖΔΕ τομῇ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ, ἐν δὲ τῇ ΗΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΡΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΡΘ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο.

ΠΡΟ-

[illegible] Α Δ, Β Η. | ... igitur sectio Ε sectionibus oppositis Α Δ, Β Η non occurret.

EUTOCIUS.

[a] Λέγω ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α Δ, Β Η συμπεσεῖται.] Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Γ, ἐντὸς τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν Α Β τομήν· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ Α Γ, Γ Β ἐκβαλλόμεναι οὐ συμπεσοῦνται ταῖς ἀσυμπτώτοις τῆς Ε τομῆς, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτάς, καὶ πολὺ μᾶλλον τὴν Ε τομήν. καὶ ἐπεὶ τῆς Α Δ τομῆς ἐφάπτεται ἡ Α Γ, ἡ Α Γ ἄρα οὐ συμπεσεῖται τῇ Β Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ Β Γ οὐ συμπεσεῖται τῇ Α Δ· ἡ ἄρα Ε τομὴ οὐδεμιᾷ τῶν Α Δ, Β Η τομῶν συμπεσεῖται.

[a] Dico E neutri sectionum A Δ, B H occurrere.] Ducantur enim à punctis A, B rectæ contingentes sectiones, atque conveniant inter se in puncto Γ, intra angulum [per 25.2.huj.] sectionem A B continentem: itaque constat rectas A Γ, Γ B productas asymptotis sectionis E non occurrere, sed ipsas continere & multo magis sectionem E. & quoniam A Γ sectionem A Δ contingit, [per 33.2.huj.] non occurret ipsi B H. similiter ostendemus rectam B Γ sectioni A Δ non occurrere: ergo sectio E neutri ipsarum sectionum A Δ, B H occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν.

Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα· οὐ συμπεσεῖται καθ' ἕτερον σημεῖον.

Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ, συμπέπτωκε ταύτῃ κατὰ τὸ Ε· ἡ ἄρα Α Β τῇ Α Γ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἤχθω-

Prop. L. *Theor.*

Si utraque oppositarum sectionum oppositarum utramque in uno puncto contingat, ad easdem partes concava habens; in alio puncto non occurret.

Contingant enim sese oppositæ sectiones in punctis A, Δ: dico eas in alio puncto sibi ipsis non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrant in E. & quoniam hyperbola unam oppositarum sectionum in Δ contingens eandem secat in E; sectio A B [per 47.4.huj.] ipsi A Γ præterquam in uno puncto non occurret. du-

Q q q cantur

non occurrere.

Si enim fieri potest, occurrat in E; & à punctis A, B ducantur contingentes sectiones AH, HB; junganturq; AB, EH & producatur EH: secabit igitur sectiones in alio atque alio puncto. sit autem ea EHΓΔΘ. itaque quoniam AH, HB sectiones contingunt, & AB conjungit tactus; erit [per 37. 3. huj.] in altera quidem conjugatione ut ΘE ad EH ita ΘΔ ad ΔH; in altera vero [ut ΘE ad EH] ita ΘΓ ad ΓH; quod fieri non potest: igitur sectio Z sectioni E non occurret.

ὐ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ E, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν A, B ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ AH, HB, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB, EH, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ EH· τεμεῖ δὴ κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. ἔστω δὲ ὡς ἡ EHΓΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ AH, HB καὶ ἡ AB τὰς ἁφὰς ἐπιζεύγνυσιν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ συζυγίᾳ ὡς ἡ ΘE πρὸς EH οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔH, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓH, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ Z τῇ E συμβάλλει.

PROP. LII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppositarum sectionum contingat, convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio alteri oppositarum non occurret.

SINT oppositæ sectiones AΔ, B; & hyperbola quædam AH sectionem AΔ in puncto A contingat; ipsi autem AH opponatur Z: dico Z sectioni B non occurrere.

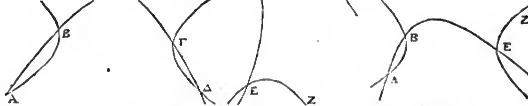
Ducatur enim à puncto A recta AΓ sectiones contingens: ergo [per 33. 2. huj.] AΓ, ob sectionem AH, se-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ AΔ, B, καὶ τῆς AΔ τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολή τις ἡ AH κατὰ τὸ A, ἀντικειμένη δὲ τῇ AH ἔστω ἡ Z· λέγω ὅτι ἡ Z τῇ B οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ AΓ· ἡ ἄρα AΓ, διὰ μὲν τὴν AH τομὴν, οὐ συμπεσεῖται



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ ΓΔ καθ' ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ τῇ ΑΒ συμβάλλει ἡ ΕΖ, καθ' ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλῃ τῇ ΑΒ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. ὑπόκειται δὲ καθ' ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ ΑΒΕ συμβάλλει ἡ ΕΖ· τῇ μὲν Δ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒΕ συμπίπτουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο *.

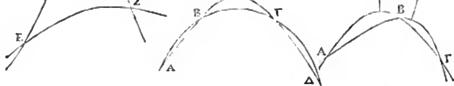
Sed ΑΒΓ sectionem quidem ΑΒΕ secet in punctis Α, Β, ipsam vero ΓΔ in uno puncto Γ, ut in secunda figura: quare [per 39. 4. huj.] ΕΖ non occurret sectioni ΓΔ. si autem sectioni ΑΒ occurrit ΕΖ, in uno tantum puncto occurrit: nam si occurrat in duobus punctis, sectio ΑΒΓ quæ [per 41. 1.4. huj.] ipsi opponitur, non occurret alteri ΓΔ. atqui in uno puncto Γ occurrere supponitur.

Quod si sectio ΑΒΓ sectionem ΑΒΕ in duobus punctis Α, Β secet, ut in tertia figura; occurrat autem ΕΖ sectioni ΑΒΕ: sectioni quidem Δ [per 39.4. huj.] non occurret; atque ipsi ΑΒΕ occurrens [per 35.4. huj.] non occurret ad plura puncta quam duo *.

---

* In figura tertia supponitur parallelismus asymptotôn sectionum ΑΒΕ & ΕΖ, quo in casu, eoque solo, oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad tria tantum puncta Α, Β, Ε occurrere possunt: nam si non parallelæ sint, sed vel tantillum inclinent versus partes Ε, Ζ, habebitur casus primus, occurrente sectione ΕΖ sectioni ΑΒΕ in alio puncto ultra Ε. Si vero in alteras partes sive versus Γ, Δ inclinent asymptoti, conveniet sectio ΑΒΓ cum sectione Δ, eritque casus secundus. Neque alius modus quo sibi conveniant ad quatuor puncta oppositæ hyperbolæ, convexa sua sibi invicem obvertentes, excogitari potest. Idem concipe de figuris propositionis proxime sequentis.

Si



Si autem, ut in sexta figura, sectio ABΓ oppositarum alteri occurrat in tribus punctis, EZ [per 44. 4. huj.] alteri in uno tantum puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur in omni diversitate casuum constat propositum, oppositæ sectiones oppositis sectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurrent.

Prop. LIV. *Theor.*

Si oppositæ sectiones oppositas in uno puncto contingant; non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quam duo.

Sint oppositæ sectiones AB, ΓΔ; aliæ vero BΓ, EZ; & sectio BΓ contingat AB in puncto B, & convexa habeant è regione sita; occurratque primum BΓΔ sectio ipsi ΓΔ in duobus punctis Γ, Δ, ut in prima figura. quoniam igitur BΓΔ in duobus punctis secat, convexa habens è regione sita; sectio EZ [per 39. 4. huj.] ipsi AB non occurret. rursus quoniam BΓΔ contingit AB in B, convexa habens è regione sita; non occurret [per 52. 4. huj.] EZ sectioni ΓΔ; quare EZ neutri sectionum AB, ΓΔ occurret: occurrunt igitur sibi ipsis ad duo tantum puncta Γ, Δ.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ABΓ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεῖα, ἡ EZ τῇ ἑτέρᾳ καθ' ἓν μόνον συμπεσεῖται. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐροῦμεν. ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθὲν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσι, οὐ συμπεσοῦνται κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ BΓ, EZ, καὶ ἡ BΓ τῆς AB ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ B, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ, καὶ συμπιπτέτω πρῶτον ἡ BΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος. ἐπεὶ οὖν ἡ BΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τέμνει, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ EZ τῇ AB οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ BΓΔ τῆς AB ἐφάπτεται κατὰ τὸ B, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ EZ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα EZ οὐδετέρᾳ τῶν AB, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται· μόνον ἄρα κατὰ δύο τὰ Γ, Δ συμβάλλουσιν.

Ἀλλὰ

τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

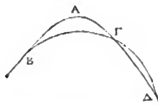
Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, [ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου σχήματος] αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις ἁρμόσουσι. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

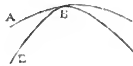
cta sunt, EZ ipsi Δ non occurret: & [per 35. 4.huj.] non occurret EZ ipsi AB ad plura puncta quam duo.

At vero si sectiones ad easdem partes concava habeant, [ut in figuris quartâ & quintâ] demonstrationes eædem accommodabuntur. quare, juxta omnes possibiles diversitates, ex jam demonstratis manifesto constabit propositum.









ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐπιψαύωσι, καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ ΑΓ, ΕΖ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὡς

Prop. LV. *Theor.*

Si sectiones oppositæ oppositas contingant in duobus punctis; in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

Sint oppositæ sectiones AB, ΓΔ, & aliæ AΓ, EZ; & primum in punctis A, Γ sese contin-

gant,



Denique si ΑΓ contingat ΑΒ in Α, & ΕΖ contingat ΕΔ in Ε, habentes concava ad easdem partes, ut in tertia figura; in alio puncto sibi ipsis [per 50.4.huj.] non occurrent: neque quidem ΒΖ occurret ipsi ΑΒ. juxta omnes igitur diversitates, ex jam demonstratis constabit illud quod proponebatur.

Εἰ δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτηται κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΕΔ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔχωσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος· καθ' ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται· οὐδὲ μὲν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ συμπεσεῖται. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

* Nescio cujus interpolatoris vitio factum est, ut in omnibus Codicibus tam *Græcis* & *Latinis* quam *Arabicis*, reperiatur casus ille tertius, quem uncis inclusum ut spurium & *Apollonio* nostro indignum abolendum censemus, nec schemate dignamur. Propositione enim LII^da hujus liquido patet, impossibile esse, si hyperbolæ duæ sese extrinsecus contingant, ut sectiones iisdem oppositæ vel conveniant vel sese contingant.

APOL-

IN

LATINUM CONVERSI,

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS.

SUBJICITUR

LIBER CONICORUM OCTAVUS

RESTITUTUS.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEII apud *Oxonienſes*
Geometriæ Profeſſoris *Saviliani.*

CONICORUM APOLLONII

VERSIONEM,

E CODICE SUO ARABICO PRÆSTANTISSIMO

ADORNATAM,

Ea qua par eſt reverentia & obſervantia

Humillime offert

EDM. HALLEIUS.

a

"… Ebn Aly Abu faraj Mohammed, *qui cogno-*
"*minatur* Ebno' Ibawwâb Bagdadensis (*Deus fortunet statum ejus*) *mense* Moharram
"*anni* 662. (*Chr.* 1263. *Octob.*) *laudans Deum pro beneficiis ejus, & orans pro propheta*
"*ejus electo* Mohammede *& familia ejus. Laus Deo, & pax super servis ejus electis:*
"*fiducia nostra est Deus & optimus protector.*

"*Absolutum est exemplar hoc, in urbe* Marága, *feria secunda, die decimo mensis* Shaa-
"bân *anno* 702, (*Chr.* 1303. *Mart.* 30.) *mensis* Persici Chordâd *die* Asmôn.

Ad marginem autem paginæ ultimæ ascribuntur hæc verba,

وجدت مكتوبا علي اخر نسخة الذي نسخت منه هذه النسخة واما المقالة
الثامنة من الكتاب لم تنقل الي العربي فلم توجد في اليوناني
hoc est,

"*Scriptum legitur in calce exemplaris unde descriptum est hoc exemplar. Partem octa-*
"*vam hujus libri in* Arabicum *non traductam fuisse, quia etiam in* Græco *non reperta*
"*est.*" *Adeo ut de octavo libro recuperando vix ulla spes sit.*

Porro urbs Marága, *in qua ante quadringentos annos nobile hoc Conicorum exemplar scriptum dicitur, est in confiniis* Mediæ *&* Assyriæ, *sub Long.* 82^{gr}. *& Lat.* $37\frac{1}{3}^{gr}$. *Urbs autem* Tûs, *unde ortus* Nasir-eddîn, *in eadem fere Latitudine ac* Marága *sita, Longitudinem habet* $92\frac{1}{3}^{gr}$. *civitate* Bagdâd *habente* 80^{gr}. *juxta Tabulas* Persicas *Geographicas* à Gravio *nostro editas.*

Benigne igitur velim accipias hoc quicquid est operis, ab oriente ad nos advectum & hoc unico (quod scimus) exemplari feliciter conservatum; & nostris quæso in eo interpretando & luce donando conatibus faveas. Errata quæ operarum incuriâ irrepserunt, aut nobis forsan quandoque minus perspicacibus exciderunt, ne ægre feras hoc modo corrigere.

Pag. 4. lin. 13. *lege*, pro ΓΖ, ΓΣ. *p.* 14. *l.* 48. pro ΓΣΠ, ΓΞΠ. *p.* 16. *l.* 13. pro *quadratum igitur ex* ΞΔ, *leg.* Excessus igitur quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΞΔ. *Prop.* 25. in Schem. Hyperb. fiat Λ pro Α. *p.* 24. *l.* 4. pro ΒΖ, ΒΕ. *p.* 42. *l.* 12. pro 11am, 10am. *p.* 66. *l.* 38. pro ΑΖ, ΛΖ. *p.* 77. *l.* 7. pro ΜΞ, ΜΧ. *p.* 91. *l.* 5. pro ΗΖΚ, ΖΗΚ. *p.* 92. *l.* 13. pro *quadr.* ex ΓΛΑ, rectangulum ΓΛΑ. *p.* 97. *l.* 13. pro *majorem*, minorem. *p.* 100. *l.* 17. pro 12am, 21am. *p.* 108. *l.* 38. pro *latus ejus rectum*, latere ejus recto. *p.* 113. *l.* 4. pro ΑΒ, ΑΓ. *p.* 123. *l.* penult. pro *recti datur: ab*, *leg.* recti: datur ab. *p.* 126. *l.* 43. pro *major*, minor.

τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία· εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα· εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα.

si majus fuerit eo, obtusus; sin minus, acutus.

ΕΣΤΩ πρότερον ἴσον, ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ· ὥστε ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία, καὶ αὐτῆς μείζων ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πάλιν ἔλασσον· καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ· ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία, καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία.

PRIMO sit æquale, ac ΒΔ erit ad ΑΔ sicut ΑΔ ad ΔΓ, & sunt circa æquales angulos, quare angulus ad Α æqualis est angulo ad Δ: ac propterea angulus ad Α rectus est. Sed sit majus, eique æquale fiat quadratum ex ΔΕ, & jungantur ΒΕ, ΕΓ; erit igitur angulus ΒΕΓ rectus, adeoque angulus ad Α obtusus sive recto major est. Si vero minus fuerit, ipsi æquale ponatur quadratum ex ΔΖ, & jungantur ΒΖ, ΖΓ; ac angulus ΒΖΓ rectus erit, eoque minor est angulus ad Α: ac proinde angulus ad Α acutus. Q. E. D.

ΛΗΜΜΑ β.

Θέσει οὐσῶν [πρὸς ὀρθὰς] δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ· γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ.

ΓΕγονέτω· κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστὶ τὸ Β. ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστί· κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Ε καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστίν. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ, δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθὲν, δέδοται ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. ἔστω δὴ ὀρθία τῆς πρὸς τῇ ΕΔ εἴδους ἡ ΔΗ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΔΓ δυνάμει ἐστὶ τὸ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ·

LEMMA II.

Duabus rectis ΑΒ, ΒΓ invicem normalibus positione datis, ac dato puncto Δ, describere per Δ hyperbolam circa asymptotos ΑΒ, ΒΓ.

PUta factum: ac centrum ejus erit Β. Jungatur igitur recta ΒΔ producaturque, quæ proinde diameter erit. Ponatur ΒΕ ipsi ΒΔ æqualis, quare data est; unde & datum punctum Ε diametri terminus est. De Δ super rectam ΒΓ demittatur cathetus ΔΖ, ac fiat ΖΓ ipsi ΒΖ æqualis, ac datum erit punctum Γ. junctâ autem & productâ rectâ ΓΔ ad punctum Α, recta ΓΑ data erit positione; ac recta ΑΒ datur positione, quare punctum Α datur. Datur etiam punctum Γ, adeoque recta ΑΓ datur magnitudine. erit quoque ΑΔ ipsi ΔΓ æqualis, ob ΒΖ ipsi ΖΓ æqualem. Sit jam ΔΗ latus rectum figuræ diametri ΔΕ; poterit igitur utraque ΑΔ, ΔΓ quartam partem rectanguli

tem ita se habente, demonstratum, est in secundo libro Conicorum, hyperbolæ asymptotos esse rectas ΑΒ, ΒΓ.

ὑπὸ ΕΔΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δεδομένῳ εἴδει. Ἐὰν δὲ ᾖ τοῦτο, [c] δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ τῆς ὑπερβολῆς.

LEMMA III.

Sit recta ΑΒ positione data, ac punctum Γ datum; ac, ductâ rectâ ΒΓ, sit recta ΒΔ data: & erigatur normalis ΔΕ. Dico punctum Ε contingere hyperbolam per punctum Γ transeuntem.

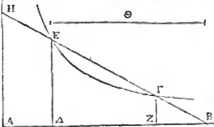
ΛΗΜΜΑ γ'.

Θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθὲν τὸ Γ· διήχθω ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω δοθεῖσα ἡ ΒΔ, ὀρθὴ δὲ ἀνήχθω ἡ ΔΕ. ὅτι τὸ Ε ἅπτεται θέσει κώνου τομῆς ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ.

SIT ΓΖ normalis, ipsique ΒΔ æqualis ponatur ΖΑ; datur itaque punctum Α: & erectâ normali ΑΗ, dabitur positione recta ΑΗ, occurrens ipsi ΒΓ productæ ad punctum Η: datis igitur positione rectis ΑΒ, ΑΗ, hyperbola, per datum punctum Γ asymptotis ΑΒ, ΑΗ descripta, transibit per punctum Ε; quia ΕΗ ipsi ΒΓ æqualis est, ob totam ΒΕ toti ΗΓ æqualem. Hoc autem ex præcedente manifestum est.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ ΑΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ συμπίπτουσα τῇ ΒΓ, ἥτις ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Η· καὶ θέσει δεδομένων τῶν ΒΑ, ΑΗ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ, ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους ΗΑ, ΑΒ ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΗ, ἐπεὶ καὶ ὅλη ΒΕ τῇ ΗΓ. καὶ ἔστι διὰ τὸ προγεγραμμένον.

Componetur autem hoc modo. Sit ΑΒ recta positione data, & punctum datum Γ; sitque ΒΓ recta ducta, data autem recta sit Θ. demissâ normali ΓΖ, ipsi Θ æqualis fiat ΖΑ; & ad angulos rectos erigatur ΑΗ occurrens rectæ ΒΓ productæ in Η: dein asymptotis ΗΑ, ΑΒ, per punctum Γ intra datum, describatur hyperbola. Dico eam problemati satisfacere, hoc est, si demittatur cathetus aliqua ΕΔ, semper fiet ΒΔ ipsi Θ æqualis. Hoc autem manifestum est propter asymptotos; æquales enim sunt ΕΗ, ΓΒ, adeoque ΑΔ ipsi ΖΒ æqualis: tota igitur ΑΖ, hoc est recta Θ, æqualis est toti ΒΔ.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ ΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ· καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς ΓΖ, ἡ ΖΑ· καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ ΑΗ· συμπιπτέτω δὲ τῇ ΒΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η· καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ, ΑΒ διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολή. λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι, ἐὰν κάθετος ἀχθῇ ἡ ΕΔ, ἴση γίνεται ἡ ΒΔ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴση γὰρ ἡ ΕΗ τῇ ΓΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶ τῇ ΒΔ.

[a] Vide Prop. LIII. Lib. primi. [b] Vide Prop. IV. Lib. secundi. [c] Vide Prop. I. Lib. secundi.

ΛΗΜΜΑ ς'.

Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ· καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τὰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δή, διὰ μὲν τὴν ΔΖ τομήν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ· διὰ δὲ τὴν ΔΕ τομήν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ. ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΘΝΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ΜΝ, ἧς πέρας τὸ Μ [ἔστω καὶ τῆς ΔΠΖ διάμετρος ἡ ΠΗ·] ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ, * μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΞ τῆς ΘΣ· καὶ διὰ τὰς τομάς, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΞΔ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ, [ἑκάτερον γὰρ τῷ ἀπὸ ΠΤ ἴσον·] ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΔ τῆς ΘΡ· ὥστε ἀεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα· ἀλλὰ καὶ παράκεινται, εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς.

LEMMA VI.

Circa easdem asymptotos ΑΒ, ΒΓ describantur hyperbolæ ΔΕ, ΔΖ. Dico eas non occurrere invicem.

Nam si fieri possit, conveniant in puncto Δ, & per Δ ducatur ad sectiones recta ΑΔΕΖΓ; erit igitur, propter sectionem ΔΖ, recta ΑΔ ipsi ΖΓ æqualis. verum, propter sectionem ΔΕ, eadem ΑΔ ipsi ΕΓ æqualis erit, adeoque ΓΖ ipsi ΓΕ æqualis: quod impossibile est. hæ sectiones igitur non concurrunt inter se.

Dico quoque quod eædem in infinitum productæ semper invicem propiores fiunt, & ad minorem procedunt distantiam. Ducatur enim alia hyperbola ΘΝΚ, sitque diameter ejus ΜΝ, cujus terminus Μ; ac sit ΗΠ diameter hyperbolæ ΔΠΖ: erit igitur rectangulum ΜΛΝ ad quadratum ex ΛΞ, ut diameter transversa ad latus rectum; & ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ ita diameter transversa ad latus rectum: quare rectangulum ΜΛΝ est ad quadratum ex ΛΞ ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, ac permutando. sed rectangulum ΜΛΝ majus est rectangulo ΗΟΠ, * quare ΖΞ major est quam ΘΣ: ac propter sectiones, rectangulum ΖΞΔ rectangulo ΣΘΡ æquale est [utrumque enim quadrato ex ΠΤ æquale] quapropter ΞΔ minor est quam ΘΡ. semper igitur sectiones accedunt invicem ad minora intervalla, sibique adjacent. nam si utraque earum asymptotis semper propius accedit, manifestum est & sibi ipsis semper appropinquare.

* *Manca*

QUoniam enim ut ΓΑ est ad ΑΒ ita ΖΔ ad ΔΕ, erit etiam ut quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ. sed ut quadratum ex ΓΑ est ad quadratum ex ΑΒ, sumptâ communi altitudine ΑΒ, ita solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ ad cubum ex ΑΒ. ut autem quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ, ob communem altitudinem ΔΕ; ita erit solidum basin habens quadratum ex ΖΔ & altitudinem ΔΕ ad cubum ex ΔΕ. Hæc igitur proportionalia sunt; ac permutando. Sed ut cubus ex ΑΒ est ad cubum ex ΔΕ ita cubus ex ΑΗ ad cubum ex ΔΘ, & ita cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ. verum ut cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ ita solidum quod est ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad solidum quod est ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. ut vero unus antecedentium est ad unum consequentium ita omnes ad omnes; quare erit, ut solidum basin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ, ad solidum basin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod ad cubum ex ΗΒ rationem habet quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod ad cubum ex ΘΕ rationem habet quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. Q. E. D.

Α Η Β Γ

Δ Θ Ε Ζ

LEMMA VIII.

Si sint Α & Β simul æqualia ipsis Γ & Δ simul. Dico Α excedere Γ eodem excessu quo Δ majus est quam Β.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβον. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΖΔ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον. καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστι. ἔστι δὲ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον, οὕτω τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.

ΛΗΜΜΑ η΄.

Ἔστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ. ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

Ἔστω

ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν.



quo ΔΕ superat ΔΖ, sive quo id quod ad ΑΒ rationem habet excedit illud quod ad ΑΓ eandem habet rationem.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β. ὅτι τὰ Α, Β ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ.

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β· τὸ δὲ Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι ᾧ τὸ Δ, Β ὑπερέχει. ὥστε τὰ Ε, Β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ, τὰ Γ, Ε, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ. ἀλλὰ τὰ Γ, Ε, Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α, Β· τὰ Α, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ. ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρέψαν· καὶ τὰ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως.







LEMMA X.

Excedat A ipsum Γ minore differentia quam qua Δ superat B. Dico A, B simul minora esse quam Γ, Δ simul sumpta.

SIT enim E excessus ipsius A supra Γ, unde A, B simul ipsis Γ, E, B simul sumptis æqualia erunt: superat autem A ipsum Γ minore quam quo Δ superat B: est autem E excessus quo A superat Γ: igitur E minor est differentia ipsarum Δ, B; adeoque E, B minora sunt quam Δ. commune addatur Γ, ac Γ, E, B simul minora erunt quam Γ, Δ. Sed demonstratum est Γ, E, B æqualia esse ipsis A, B simul: quare A, B minora sunt quam Γ, Δ simul. Pari modo constabit hujus conversa, & quid accidat ubi A minus fuerit quam Γ.

APOL-

tigisse: ideoque demonstrarunt tantum quænam Rectæ contingant Sectiones, & vicissim, nempe quidnam iis accidat propterea quod Sectionum Tangentes sint. Ac quidem de hisce egimus Libro primo, nisi quod in eorum expositione prætermisimus Minimarum *doctrinam. Constitueramus autem eum in his quoque demonstrandis servare ordinem, quem in præmissis trium Sectionum Elementis sequuti sumus, relatione habitâ ad quamlibet Sectionum diametrum: quoniam vero innumera sunt quæ hisce accidunt, id solum in præsentia conati sumus, ut ostenderemus quomodo se res habeat respectu Axium sive diametrorum principalium. Has autem Propositiones de* Minimis *accurate admodum divisimus & distinximus in suas Classes: iisque adjunximus illas quæ ad præfatam* Maximarum *doctrinam spectant. Id namque scientiæ hujus studiosis in primis necessarium est, tum ad Divisiones &* διορισμοὺς *Problematum, tum ad eorundem Compositiones: præterquam quod hæc ipsa res de earum numero sit, quæ per se contemplatione non indignæ videantur.* Vale.

13^am^ I^mi^.) Igitur rectangulum sub ΒΗ, ΖΘ simul sumptis & ΒΖ æquale est quadrato ex ΑΖ. Verum rectangulum sub utrisque ΖΘ, ΒΗ & ΒΖ duplum est quadrilateri ΒΖΗΘ. Quocirca quadratum ex ΑΖ duplum est quadrilateri ΒΖΗΘ. Q.E.D.

PROPOSITIO II.

Cadat autem ordinatim applicata super centrum Ellipseos Δ; fiat ΒΖ dimidium ipsius ΒΕ: ac jungatur ΔΖ. Dico quadratum ex ΑΔ duplum esse trianguli ΒΖΔ.

Connectatur recta ΓΕ. Quoniam enim ΒΖ ipsi ΖΕ æqualis est, atque etiam ΖΕ ipsi ΔΗ æqualis, quæ parallela est ipsi ΒΕ, ideo rectangulum sub ΔΗ, ΔΒ duplum est trianguli ΔΖΒ. Sed rectangulum sub ΔΗ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΔ (per 13^am^ I^mi^.) Igitur quadratum ex ΑΔ duplum est trianguli ΔΖΒ. Q.E.D.

PROPOSITIO III.

Cadat jam ordinatim applicata ab altera parte puncti Δ, sive ultra centrum Ellipseos, ut ΑΖ; ac fiat ΒΗ dimidium lateris recti ΒΕ, ac jungatur ΗΔ quæ producatur in directum. Per punctum Ζ ipsi ΒΕ parallela, ad occursum ipsius ΗΔ, ducatur ΖΘ. Dico quadratum ex ΑΖ duplum esse differentiæ triangulorum ΒΔΗ, ΖΔΘ.

Per punctum Γ ducatur ΓΚ ipsi ΒΕ parallela, quæ occurrat ipsi ΗΔ in puncto Κ: ac completâ Sectione ΑΒ, producatur ΑΖ ad Α. erit igitur (per primam hujus) quadratum ex ΖΑ duplum plani ΓΚΘΖ. Est autem ΖΑ ipsi ΖΑ æqualis, adeoque quadratum ex ΑΖ æquale est quadrilatero ΓΚΘΖ. Planum autem hoc ΓΚΘΖ æquale est differentiæ triangulorum ΓΔΚ, ΖΔΘ; quorum triangulum ΓΔΚ æquale est triangulo ΒΔΗ, ob ΒΔ ipsi ΔΓ æqualem. Quadratum igitur ex ΑΖ duplum est differentiæ triangulorum ΒΔΗ, ΖΔΘ. Quod erat demonstrandum.

*

PROPO-

igitur quadratum ex ΗΚ æquale est duplo rectangulo sub ΓΖ, ΓΚ: ac duplum rectangulum sub ΓΖ, ΓΚ una cum quadrato ex ΚΖ æquale erit quadratis ex ΗΚ & ΚΖ simul, hoc est, quadrato ex ΗΖ. Quoniam vero duplum rectangulum sub ΖΓ, ΓΚ una cum quadrato ex ΖΚ (*per* 7. II[di] *Elem.*) æquale est *quadratis ex* ΓΖ, ΓΚ *simul*; *æqualia erunt quadrata ex* ΓΖ, ΓΚ quadrato ex ΖΗ. Quadratum igitur ex ΖΗ excedit quadratum ex ΖΓ quadrato ipsius ΓΚ. *Ac pari argumento probabitur quadratum ex* ΖΘ, *& ex* ΑΖ *excedere quadratum ex* ΓΖ *quadratis interceptarum* ΓΛ, ΓΕ, *respectivè. Si vero* ΒΖ *fuerit ordinatim applicata ad Axem* ΓΖ, *erit duplum rectangulum* ΓΜ *in* ΓΖ, *hoc est, duplum quadratum ex* ΓΖ, *æquale quadrato ex* ΒΖ; *adeoque quadratum ex* ΒΖ *excedit quadratum ex* ΓΖ *ipso quadrato ex* ΓΖ. Hinc manifestum est ΑΖ *majorem esse quam* ΒΖ, *&* ΒΖ *quam* ΘΖ, & ΘΖ quam ΗΖ, ac ΗΖ majorem esse quam ΓΖ; omniumque *Minimam* esse ΓΖ: rectasque eidem propiores minores esse remotioribus. Patet etiam excessum quadrati cujuscunque alterius ductæ supra quadratum *Minimæ*, æqualem esse quadrato interceptæ inter normalem ab extremitate ejus ad Axem demissam & Sectionis Verticem. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI vero detur in Axe Hyperbolæ punctum, quod à Vertice Sectionis distet dimidio Lateris recti; eadem evenient in hâc quæ in Parabolâ: præterquam quod excessus quadratorum ductarum supra quadratum Minimæ *æquales erunt rectangulis factis super interceptas inter ordinatim applicatas & Sectionis Verticem, similibusque contento sub Axe transverso & eodem Axe unà cum latere ejus recto simul, ita ut in singulis Axi transverso respondeat intercepta inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓΕ; ac fiat ΓΖ æqualis dimidio lateris recti: & è puncto Ζ educantur ad sectionem rectæ quotcunque ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ. Dico quod recta ΓΖ minor est quavis aliâ de Ζ ad sectionem ducendâ; eidemque propior minor est remotiore: quodque ductæ cujuslibet ΖΑ, ΖΒ, ΖΗ, ΖΘ quadratum exce-

tinebunt ſpatia ſimilia, nempe rectangula ſub ΤΙ, ΙΝ & ſub ΓΔ, γΣ: ac recta ΤΙ, quæ ipſi ΓΜ æqualis eſt, reſpondet lateri ΓΔ. Quocirca rectangulum ſuper ΓΜ factum, quod ſimile ſit rectangulo ſub ΓΔ & ΓΔ una cum latere recto ſimul, erit rectangulum ΡΝΙΤ. Quadratum igitur ex ΘΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo facto ſuper ΓΜ, ſimili rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Pari modo demonſtrabitur quadratum ex ΗΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo facto ſuper ΓΛ, ſimilique deſcripto.

Dico quoque quadratum ex ΒΖ excedere quadratum ex ΓΖ rectangulo etiam ſimili prædictis. Quoniam enim quadratum ex ΒΖ æquale eſt duplo quadrilatero ΓΚΟΖ (per primam hujus) ac quadratum ex ΓΖ duplum eſt trianguli ΓΚΖ: ideo quadratum ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ duplo trianguli ΖΚΟ. Manifeſtum autem eſt rectangulum, trianguli ΖΚΟ duplum, fieri ſuper rectam ΓΖ, ac ſimile eſſe rectangulo modo deſcripto. Quadratum itaque ex ΒΖ excedit quadratum ex ΓΖ rectangulo ſuper ΓΖ facto & rectangulo dicto ſimili. Dico quoque quadratum ex ΑΖ eodem modo ſe habere. Quoniam enim quadratum ex ΑΕ duplum eſt quadrilateri ΓΚΠΕ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum eſt trianguli ΧΖΕ; igitur quadratum ex ΑΖ duplum eſt triangulorum ΧΚΠ, ΓΚΖ, ob quadratum ex ΑΖ quadratis ex ΑΕ, ΕΖ æquale. Duplum autem trianguli ΓΚΖ eſt quadratum ex ΓΖ; differentia igitur quadratorum ex ΑΖ & ΓΖ duplum eſt trianguli ΧΚΠ: unde pari modo demonſtrabitur, rectangulum, trianguli ΧΚΠ duplum, fieri ſuper rectam ΓΕ, ac ſimile eſſe deſcripto.

Quoniam vero exceſſus quadratorum harum rectarum, quibus ſuperant quadratum ex ΓΖ, ſunt rectangula ſuper rectas ΓΕ, ΓΖ, ΓΛ, ΓΜ facta, quæ proinde perpetuo variantur; & quod fit ſuper ΓΕ majus eſt facto ſuper ΓΖ, & quod fit ſuper ΓΖ majus eo ſuper ΓΛ, & quod ſuper ΓΛ majus facto ſuper ΓΜ: erit igitur ΓΖ omnium ductarum *Minima*: reliquarum vero quæ propiores ſunt eidem minores erunt remotioribus. Poteſt autem omnis recta ſic ducta quadratum *Minimæ*, una cum rectangulo ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ facto, quod ſimile ſit rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Q. E. D.

PROPO-

ZKN, EΛ, BΔX: & per punctum A iisdem parallela sit recta AΞ, Axique ΓA parallelæ duæ ξT, Nτ. Jam quadratum ex ZK (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΘNK; quadratum vero ex ΔK duplum est trianguli KΔξ, quia KΔ ipsi Kξ æqualis est, ob æqualitatem ipsarum ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔZ duplum est triangulorum ΔΓΘ, Θξ N. Sed quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΘ, & rectangulum ξNTτ duplum est trianguli ξΘN: quadratum itaque ex ΔZ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo ξNTτ. Est autem IΓ ad ΓΔ sive ΓΘ sicut AΓ ad Latus rectum, & Nτ est ad τΘ in eadem ratione; quare Nτ est ad τΘ sicut AΓ ad Latus rectum. Sed Nτ ipsi ΘT æqualis est, unde AΓ est ad Latus rectum sicut ΘT ad τΘ; ac per conversionem rationis ΓA erit ad excessum ejus supra Latus rectum ut ΘT est ad Tτ. Sed ΘT ipsi ξT æqualis est, ob æquales ΓΔ, ΓΘ; adeoque Tξ est ad Tτ sive ξN sicut AΓ ad excessum ejusdem supra Latus rectum: Axi vero AΓ respondet ipsa Tξ, quæ æqualis est interceptæ ΓK: rectangulum igitur ξNTτ æquale est facto super KΓ, quod simile sit contento sub AΓ & excessu ejusdem supra Latus rectum. Quadratum igitur ex ΔZ excedit quadratum ex ΔΓ spatio æquali rectangulo facto super ΓK simili que rectangulo dicto. *Eodem modo constabit quadratum ex EΔ excedere quadratum ex ΔΓ rectangulo simili super interceptam ΓΛ facto.*

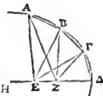
Dico quoque quadratum ex ΔB eodem modo se habere. Quadratum enim ex ΔB duplum est quadrilateri ΓΔXΘ; quadratum vero ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΘ: igitur differentia inter quadratum ex ΔB & ex ΔΓ æquale est duplo trianguli ΔΘX. Sed rectangulum factum super ΔΓ jam descripto simile, duplum est trianguli ΔΘX; quare differentia inter quadrata ex BΔ & ΔΓ æqualis est rectangulo facto super ΔΓ, quod descripto simile sit. Dico etiam quadratum ex ΔH majus esse quam quadratum ex ΓΔ rectangulo facto super MΓ similique præmonstrato. Est enim quadratum ex HM (per primam hujus) duplum quadrilateri MAOΠ: quadratum vero ex MΔ duplum est trianguli ΔMP; quia ΔM ipsi MP æqualis est, ob æquales ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔH duplum est utriusque, trianguli AIO & trapezii IΔPΠ simul.

est remotiore ab eadem. Excessus vero quadrati cujuscunque earum supra quadratum Minimæ rectangulum est rectangulo præmonstrato simile. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

S*I sumatur punctum in* Minimâ *jam descriptâ, in quavis è tribus Sectionibus, à quo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem: Earundem* Minima *erit recta jungens punctum illud & Sectionis Verticem. Cæterarum vero ad idem Axis latus ductarum, quæ propior est* Minimæ *minor erit remotiore.*

Sit ΑΒΓΔ sectio Conica, cujus Axis ΔΗ, ac in eo recta *Minima* ΔΕ: inter Δ & Ε capiatur punctum aliquod ut Ζ, à quo ducantur ad Sectionem rectæ quælibet ΖΓ, ΖΒ, ΖΑ. Dico quod ΔΖ earundem Minima est, quodque huic propior minor est remotiore.



Jungatur enim ΓΕ, quæ proinde major erit quam ΔΕ; unde angulus ΓΔΕ major erit angulo ΔΓΕ; ac angulus ΖΔΓ multo major erit angulo ΔΓΖ; adeoque ΓΖ major erit quam ΖΔ. Pariter quoniam ΒΕ major est quam ΓΕ, angulus ΒΓΕ major erit angulo ΓΒΕ, unde & multo major est angulus ΒΓΖ angulo ΖΒΓ: quare ΒΖ major est quam ΖΓ. Eodemque modo demonstrabitur ΑΖ majorem esse quam ΒΖ. Ipsa igitur ΔΖ Minima est rectarum de puncto Ζ ad Sectionem ductarum: è cæteris vero quæ eidem ΔΖ propior est minor erit remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

S*I capiatur in Axe Parabolæ punctum, quod à vertice Sectionis plus distet dimidio Lateris recti; & à puncto illo versus Sectionis Verticem ponatur Axis segmentum æquale dimidio lateris recti; à cujus extremitate erigatur Axi normalis ad occursum Secti-*

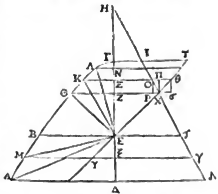
*

onis

[illegible] simul du-plum est rectanguli sub EZ, ZΓ: Quadratum igitur ex KE æquale est duplo rectangulo sub EZ, ZΓ una cum quadratis ex ZΞ, EZ. Quod autem fit sub EZ, ZΓ bis, æquale est quadrato ex ZH, ob ZE ipsi ΓN æqualem: quare quadrata ex ZH, ZE & ZΞ simul sumpta æqualia sunt quadrato ex EK. Sed quadrata ex ZH, ZE æquantur quadrato ex EH; unde quadratum ex EK æquale est quadratis ex EH, ZΞ; adeoque excessus quadrati ex EK supra quadratum ex EH æqualis est quadrato ex ZΞ. Eodem modo demonstrabitur quadratum ex EA excedere quadratum ex EH quadrato ipsius ZM. Quoniam vero duplum rectanguli sub ΓZ, ZE æquale est quadrato ex ZH, ob ZE ipsi ΓN æqualem: erit etiam excessus quadrati ex ΓE supra quadratum ex EH æqualis quadrato ex ΓZ. Est autem ZΞ minor quam ZM, & ZM quam ZΓ: recta igitur EH minor est quavis recta per E ad Sectionem ducta inter punctum H & Verticem Γ.

Pariter quadratum ex BE æquale est duplo rectangulo sub ΓN, ΓE; hoc est sub EZ, ΓE bis: quod autem fit sub ΓZ, ZE bis æquale est quadrato ex ZH: quadratum igitur ex BE æquale est quadratis ex EH & EZ simul sumptis. Unde quadratum ex BE excedit quadratum ex EH quadrato ipsius EZ. Quinetiam quadratum ex γΘ æquale est rectangulo sub Γγ, ZE bis, ob ZE ipsi ΓN æqualem. Quadratum autem ex γE excessus est quadratorum ex utraque γZ, ZE supra duplum rectangulum sub γZ, ZE; quapropter rectangulum ΓZ in ZE bis, una cum quadratis ex γZ, ZE simul æquantur quadrato ex ΘE. Sed ΓZ in ZE bis una cum quadrato ex ZE, æquale est quadrato ex EH: excessus igitur quadrati ex ΘE supra quadratum ex EH æquale est quadrato ex γZ. Simili argumento differentia quadratorum ex AE & EH æqualis erit quadrato ex ΔZ. Est autem ΔZ major quam γZ, & γZ quam ZE. Recta igitur EH minor est quavis recta per punctum E ad Sectionem ducta; & quæ illi propior est minor est remotiore: & excessus quadrati alterius cujusvis supra quadratum ejus æqualis est quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Z. Q. E. D.

puncto Z inter puncta Γ, E. Ad Z erigatur normalis super Axem ut ZΘ, ac jungatur ΘE. Dico ΘE Minimam esse è rectis de puncto E ad sectionem ductis; illique ab utroque latere propiorem minorem esse remotiore: Excessum etiam quadrati cujuscunque earum supra quadratum Minimæ æquari rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas, quod simile sit rectangulo contento sub diametro transversâ & utrisque diametro transversâ & Latere recto simul sumptis; ita ut diameter transversa respondeat interceptæ inter ordinatim applicatas.



Fiat ΓI dimidium Lateris recti, ac juncta HI producatur ad δ; ipsique Hδ occurrat ordinatim applicata ZΘ producta in X: ac jungatur & utrinque producatur EX. Ducantur etiam normales ΛN, KΞ, cæteræque ad occursum ipsarum Hδ, EX continuandæ. Jam quoniam HΓ est ad ΓI ut diameter transversa ad Latus rectum, sive (*per constructionem*) ut HZ ad ZE; ac HΓ est ad ΓI ut HZ ad ZX: ZX itaque ipsi ZE æqualis erit. Quadratum autem ex ZΘ duplum est quadrilateri ΓIZX (per primam hujus) & quadratum ex ZE duplum est trianguli EZX: quadratum igitur ex ΘE duplum est quadrilateri ΓIEX. Pariter quadratum ex KΞ duplum est plani ΓIΞO (per eandem primam) & quadratum ex EΞ duplum est trianguli EΞθ, adeoque quadratum ex EK duplum est utriusque, quadrilateri ΓIEX & trianguli OXθ simul sumpti. Demonstravimus autem quadratum ex ΘE duplum esse Trapezii ΓIEX; excessus igitur quadrati ex EK supra quadratum ex EΘ duplum est trianguli OXθ. Ducantur rectæ OP, XΠ, θσ Axi ΓΔ parallelæ: & erit ut HΓ ad ΓI ita θΠ ad ΠO, ob θΠ ipsi XΠ æqualem; adeoque θΠ est ad ΠO ut diameter transversa ad latus rectum; componendo autem θΠ erit ad θO ut diameter transversa ad rectam compositam ex diametro transversa & Latere recto. Sed θΠ æqualis est ipsi θσ: igitur rectangulum POθσ simile erit contento sub diametro transversâ & compositâ ex utraque, diametro transversâ & latere recto. Rectangulum autem POθσ duplum est trianguli OXθ, quo excessu quadratum ex EK superat quadratum ex EΘ: & PO æqualis est interceptæ

& præmonstrato rectangulo simili. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Si sumatur in Axe majore Ellipseos punctum quod distet à Vertice Sectionis plusquam dimidio lateris recti; ac dividatur intercepta inter Verticem Sectionis & punctum illud, ita ut segmentum, quod interjacet Sectionis centrum & punctum divisionis, sit ad distantiam ejusdem puncti ab illo in Axe prius sumpto in ratione diametri transversæ ad latus rectum; & à puncto divisionis erigatur Axi normalis Sectioni occurrens; & ab occursu ducatur recta ad punctum in Axe sumptum: erit hæc Minima *è rectis quæ per punctum illud ad Sectionem duci poterunt; & è cæteris quæ eidem propior est minor erit remotiore: excessus autem quadrati cujuslibet earum supra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatas ab iisdem demissas, simili vero contento sub diametro transversa & excessu diametri transversæ supra latus rectum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis cujus Axis major ΑΓ, & centrum Δ; ac sit ΕΓ major dimidio lateris recti, & fiat ΔΖ ad ΖΕ ut ΑΓ ad Latus rectum. Ad punctum Ζ erigatur normalis ΖΗ quæ producatur, ac jungatur ΕΗ. Dico ΕΗ Minimam esse è rectis ad Sectionem per punctum Ε ducendis; eidemque propiorem minorem esse remotiore ab eadem: excessum etiam, quo quadratum alterius cujuscunque ductæ superat quadratum ejus, æqualem esse rectangulo facto super interceptam inter punctum Ζ & ordinatim applicatam, quod simile sit contento sub Axe ΑΓ & excessu quo Axis ille superat latus rectum, ita ut Axi ΑΓ respondeat intercepta inter ordinatam & punctum Ζ.



autem θδ ipsi Τδ æqualis; quare rectangulum sub Τδ, δγ simile erit rectangulo sub axe transverso & excessu ejusdem supra latus rectum. Ac Τδ æqualis est ipsi ΖΧ, adeoque differentia quadratorum ex ΕΘ & ΕΗ æqualis est rectangulo super ΖΧ facto, quod simile sit rectangulo jam descripto, ita ut ΖΧ Axi transverso respondeat. Pari modo demonstrabitur, differentiam inter quadrata ex ΕΚ & ΕΗ æqualem esse rectangulo facto super ΖΡ similique prædicto: similiterque quadratum ex ΕΓ excedere quadratum ex ΕΗ rectangulo super ΖΓ facto, eisdemque simili. Recta autem ΖΧ minor est quam ΖΡ, & ΖΡ quam ΖΓ; quare recta ΕΗ minor est quam ΕΘ, & ΕΘ quam ΕΚ, & ΕΚ quam ΕΓ.

Porro quadratum ex ΒΕ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΝΕΣ. Ostendimus autem quadratum ex ΕΗ duplum est Trapezii ΓΝΕξ; quare excessus, quo quadratum ex ΒΕ superat quadratum ex ΕΗ, duplum est trianguli Εξ Σ, quod æquale est rectangulo facto super ΕΖ similique descripto, ut ex nuper allatis constabit.

Quadratum quoque ex ΔΑ (per secundam hujus) duplum est trianguli ΓΔΝ, & quadratum ex ΔΕ duplum est trianguli ΔΕΤ; quadratum igitur ex ΑΕ duplum est trianguli ΔΤξ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti: excedit igitur quadratum ex ΑΕ quadratum ex ΕΗ duplo trianguli ΔΤξ: hujus autem trianguli duplum rectangulum est factum super ΔΖ descripto simile. Quinetiam quadratum ex ΜΠ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΠΕ duplum est trianguli ΠΕσ; quapropter quadratum ex ΜΕ duplum est trianguli ΞΔΑ & quadrilateri ΕΔΟσ simul sumpti. Sed triangulum ΞΔΑ æquale est triangulo ΓΔΝ: quare quadratum ex ΜΕ duplum est Trapezii ΓΝΕξ & trianguli Οξσ simul sumpti. Hujus igitur trianguli duplum excessus est quo quadratum ex ΜΕ excedit quadratum ex ΕΗ. Duplum autem trianguli Οξσ rectangulum est super ΖΠ factum, simileque rectangulo descripto. Denique quadratum ex ΑΕ duplum est trianguli οξΞ & Trapezii ΓΝΕξ simul sumpti; excessus itaque quadrati ex ΑΕ supra quadratum ex ΕΗ duplum est trianguli οξΞ; cujus trianguli duplum æquale est rectangulo super ΖΑ formato similique descripto. Jam vero ΕΖ minor est quam ΔΖ, ac ΔΖ minor quam ΠΖ, ac ΠΖ quam ΑΖ: quocirca ΒΕ minor est quam ΕΔ, ac ΕΔ quam ΕΜ, & ΕΜ quam ΕΑ. Recta igitur ΕΗ minima est è rectis per punctum Ε ad Sectionem ΑΒΓ ducendis. Reliquarum vero quæ eidem ab utroque latere propior est minor est remotiore, & excessus quadratorum earundem supra quadratum ex ΕΗ

* æquales

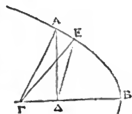
tur ΘΕ, ΕΚ, ac producantur ΗΠ, ΖΙ ad Ο, Ξ: ducantur etiam ΜΛ, ΝΞ axi ΑΓ parallelæ. Erit igitur ΕΓ ad ΓΚ ut ΕΙ ad ΙΞ. Sed ΕΓ æqualis est ipsi ΓΚ, quare ΕΙ & ΞΙ æquantur. Quadratum autem ex ΙΖ (per primam hujus) duplum est quadrilateri ΓΘΙΛ: quadratum vero ex ΙΕ duplum est trianguli ΕΙΞ: quadratum igitur ex ΖΕ duplum est triangulorum ΕΓΘ, ΕΛΞ simul sumptorum. Sed quadratum ex ΕΒ (per secundam hujus) duplum est trianguli ΕΓΘ; ac duplum trianguli ΕΛΞ rectangulum est ΛΞΜΝ; quadratum igitur ex ΕΖ excedit quadratum ex ΕΒ rectangulo ΛΝ. Verum ratio ΚΓ ad ΓΘ eadem est ac transversi axis ad Latus rectum, eademque est ratio ΞΙ ad ΙΛ; unde per conversionem rationis, ΞΙ erit ad ΞΛ ut diameter transversa ad excessum ejusdem supra latus rectum. æquales autem sunt ΞΙ, ΞΝ; rectangulum itaque sub ΛΞ, ΞΝ simile est rectangulo contento sub diametro transversâ & excessu ejusdem supra latus rectum. Sed ΕΙ ipsi ΛΜ æqualis est, quare differentia inter quadrata ex ΕΖ & ΕΒ æqualis est rectangulo facto super ΕΙ quod prædicto simile est. Eodem modo demonstrabitur excessum quadrati ex ΕΠ supra quadratum ex ΕΒ æquari rectangulo super ΕΠ formato ac jam descripto simili.

Pari argumento quadratum ex ΕΓ duplum est trianguli ΓΕΚ, & quadratum ex ΒΕ duplum est trianguli ΓΕΘ; differentia igitur quadratorum ex ΓΕ & ΕΒ duplum est trianguli ΘΕΚ. Hujus vero trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΓΕ similique descripto. Jam ΓΕ major est quam ΕΠ, & ΕΠ major quam ΕΙ, adeoque ΕΓ major est quam ΕΠ, & ΕΠ major quam ΕΖ, & ΕΖ quam ΕΒ. *Maxima* igitur è rectis per punctum Ε ductis est ΕΓ, *Minima* vero ΕΒ; è cæteris vero, inter ipsas ΕΓ, ΕΒ ductis, quæ propius distat ab ΕΓ major est remotiore: & excessus quadrati cujuscunque ductæ supra quadratum ex ΕΒ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim ad axem ΑΓ applicatam & centrum Sectionis, simili vero rectangulo prædicto. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

SI à quovis puncto in Axe Parabolæ ducatur ad Sectionem recta Minima *quæ contineat cum Axe angulum; erit angulus ille acutus: Demissâque ab extremitate ejus normali ad Axem, abscindet illa Segmentum ejus æquale dimidio Lateris recti.*

Sit AB Parabola, cujus Axis BΓ; sitque Minima ad Parabolam ducta AΓ; Dico quod angulus ad Γ est acutus, quodque normalis ab A ad BΓ demissa abscindit ab ea rectam æqualem dimidio lateris recti.



Quoniam recta AΓ Minima est, BΓ major erit dimidio lateris recti. Nam si non major fuerit eà, vel æqualis erit ei vel minor eà. quod si æqualis fuerit dimidio lateris recti, erit ipsa BΓ (per 4^am hujus) Minima; vel etiam si BΓ minor fuerit dimidio lateris recti, erit quoque (per 7^am hujus) Minima: adeoque BΓ minor esset quam ΓA, quod est contra Hypothesin. quare BΓ non est minor dimidio lateris recti, neque etiam æqualis ei, ergo major est eà. Sit itaque ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico Axi normalem è puncto Δ erectam transire per A. Nam si aliter fuerit, sit normalis illa recta ΔE; & ΓE (per octavam hujus) *Minima* erit è rectis de puncto Γ ad Sectionem ducendis: hoc autem absurdum est, nam AΓ minor est eà. Igitur perpendicularis ad punctum Δ erecta transibit per A, ac ΔΓ dimidium erit lateris recti: erit quoque angulus AΓB acutus, ob angulum BΔA rectum Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

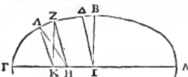
SI ducatur à puncto in Axe Hyperbolæ recta Minima, *quæ contineat cum Axe angulos deinceps: erit angulus ille, qui respicit Verticem Sectionis, acutus. Ac si ab extremitate* Minimæ *ducatur normalis ad Axem, dividet illa interceptam inter centrum Sectionis*

&

E*ductâ de puncto dato in Axe majore Ellipseos rectâ aliquâ* Minima, *si hæc* Minima *transeat per Centrum Sectionis, normalis erit super Axem majorem. Si vero transeat per aliud punctum, continebit cum Axe majore angulum obtusum versus centrum: & normalis ab extremitate* Minimæ *cadet inter punctum unde educta est & Sectionis Verticem: ita ut intercepta inter normalem & centrum sit ad interceptam inter eandem normalem & punctum illud, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ & centrum Ι: educatur primum è puncto Ι ad Sectionem recta Minima ΙΒ. Dico rectam ΙΒ normalem esse super ipsam ΑΓ. Nam si non ita sit, sit ΙΔ normalis super ΑΓ; adeoque (per 11^mam^ hujus) ΙΔ foret minima recta de puncto Ι ducenda, contra Hypothesin; posuimus enim ΙΒ Minimam esse. Recta igitur ΙΒ normalis est super ΑΓ.

Porro si capiatur punctum aliud in Axe ut Η, ac sit ΗΖ Minima ab eodem Η ducta: Dico angulum ΖΗΙ obtusum esse; ac si normalis de puncto Ζ ad ΑΓ demittatur, interceptam inter ordinatim applicatam & punctum Ι esse ad interceptam inter eandem ordinatam & punctum Η, in ratione lateris transversi ad latus rectum.



Quoniam enim ΖΗ Minima est de puncto Η ducta, erit ΗΓ (per septimam hujus) major dimidio lateris recti; ac recta ΓΙ dimidium est lateris transversi: quare ratio ΙΓ ad ΗΓ minor erit ratione lateris transversi ad latus rectum. Dividatur itaque ΗΓ in puncto Κ, ita ut ΙΚ sit ad ΚΗ ut latus transversum ad latus rectum: Dico normalem è puncto Κ occurrere Sectioni in puncto Ζ. Nam si hoc non ita sit, sit ea recta ΚΛ, ac proinde ΗΛ (per decimam hujus) minima erit è rectis per punctum Η ducendis. Est autem ΗΖ recta illa Minima: quod absurdum. Occurrit igitur normalis è puncto Κ Sectioni ad punctum Ζ, & angulus ΙΗΖ obtusus est; ac demissâ de puncto Ζ super Axem ΑΓ normali ΖΚ, ΙΚ erit ad ΚΗ sicut latus transversum ad latus rectum. Q. E. D.

cium lateris recti: & jungantur & producantur ipsæ ΞΠ, ΞΔ: demittantur etiam normales ZΘ, EK, ΠΛ, quibus parallela sit recta AX. *Occurrat producta* ZΘ *ipsis* ΞΠ, ΞΔ *in punctis* T, M, ac Axi AΓ parallelæ ducantur Mξ, Tτ. Quoniam autem ΓΔ æquale est ipsi ΓΞ, quadratum ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΔΞ: & quadratum ex ΘΔ duplum est trianguli ΘΔM; ac quadratum ex ΘZ (per primam hujus) duplum est Trapezii ΓΞΘT: quadratum igitur ex ΓΔ excedit quadratum ex ΔZ duplo trianguli TMΞ: duplum vero hujus trianguli rectangulum est TMτξ. Jam ΓΠ est ad ΠΔ ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra eandem (dimidium enim diametri transversæ est ad dimidium lateris recti sicut diameter transversa ad latus rectum) ac in eadem est ratione Tτ ad τξ sive τT ad TM: quare τT est ad TM ut diameter transversa ad excessum lateris recti supra transversam. Sed Tτ æqualis est ipsi ΓΘ; differunt igitur quadrata ex ΓΔ, ZΔ spatio æquali rectangulo facto super ΓΘ, & simili rectangulo descripto. Pari argumento probabitur excessum quadrati ex ΓΔ supra quadratum ex ΔE æquari rectangulo facto super ΓK, quod simile sit descripto. Quinetiam quadratum ex BΔ (per tertiam hujus) duplum est quadrilateri AΔΣX, & quadratum ex ΔΓ duplum est trianguli ΔΓΞ; cumque triangulum AΠX æquale est triangulo ΓΠΞ, erit differentia quadratorum ex ΓΔ, BΔ, dupla trianguli ΔΣΞ. duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΓΔ, similique rectangulo jam descripto. Est igitur ΓΔ major quam ΔZ, & ΔZ quam ΔE, & ΔE quam ΔB.

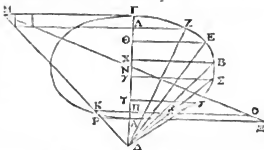
Insuper quadratum ex ΔH (per eandem tertiam) duplum est quadrilateri AΛΥX, & quadratum ex ΛΔ duplum est trianguli ΔγΛ; quare quadratum ex ΔH æquale est duplo spatio AΛΥX, una cum duplo triangulo ΔγΛ: Quadratum autem ex ΓΔ duplum est trianguli ΓΞΔ, & triangulum ΓΞΠ æquale est triangulo AXΠ. Differunt igitur quadrata ex, ΓΔ, ΔH duplo trianguli ΞΥγ, cujus trianguli duplum æquale est rectangulo facto super ΓΛ similique prædicto. Denique quadratum ex ΔA duplum est trianguli ΔAP, & triangulum ΓΠΞ æquale est triangulo ΠXA; differunt igitur quadrata ex ΔΓ, ΔA, duplo trianguli ΞXP; hujus autem trianguli duplum



gulo ΔΑΞ, duplum autem hujus trianguli æquale est rectangulo facto super ΓΖ similique descripto: quod quidem eodem omnino modo demonstratur ac præcedentia. Recta igitur ΑΓ major est quam ΑΕ, & ΑΕ quam ΑΔ, & ΑΔ quam ΑΒ. Proinde ΑΓ maxima est inter eductas de puncto Α: quæque eidem propior est major est remotiore: & excessus quadrati ipsius ΑΓ supra quadratum alicujus alterius ductæ, æqualis est rectangulo facto super interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod simile sit rectangulo *contento sub Axe minori & excessu quo latus rectum superat eundem Axem.* Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Si vero fuerit ΑΓ Axis minor Ellipseos, cujus centrum Χ: ac fiat ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico ΓΔ *Maximam* esse è rectis de puncto Δ ad Sectionem ducendis, ΔΑ vero earundem *Minimam*: propiorem autem ipsi ΓΔ, è rectis Sectionem secantibus, majorem esse remotiore: ex iis vero quæ extrinsecus Sectioni occurrunt, propiorem ipsi ΑΔ minorem esse remotiore: & excessum quadrati ipsius ΓΔ supra quadratum cujusvis alterius ductæ, æqualem esse rectangulo facto super interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod simile sit prædicto, nempe rectangulo sub Axe minore & excessu lateris ejus recti supra eundem Axem.



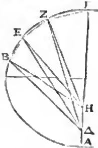
Ducantur rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, cæteræque ut in figura præcedente: ac pari argumento patebit quadratum ex ΓΔ, majus esse quadrato ex ΖΔ rectangulo facto super ΓΛ similique prædicto; & quadratum ex ΓΔ majus esse quadrato ex ΕΔ,

Est autem excessus quadrati ex ΔΓ supra quadratum ex ΔA æqualis rectangulo descripto simili, super ΓA facto; quare ΔA minor est quam ΔΞ, & ΔΞ quam ΔΓ, & ΔΓ quam ΔΣ. Est igitur ΔΓ Maxima è ductis per punctum Δ, earundem vero minima est ΔA; & inter eas quæ Sectionem intersecant, quæ propior est ipsi ΔΓ major est remotiore: ex iis vero quæ Sectioni extrinsecus occurrunt, quæ ipsi ΔA propiores sunt minores sunt remotioribus. Quadratum etiam ex ΓΔ excedit quadratum cujusvis alterius ductæ, rectangulo facto super interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod simile sit descripto. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

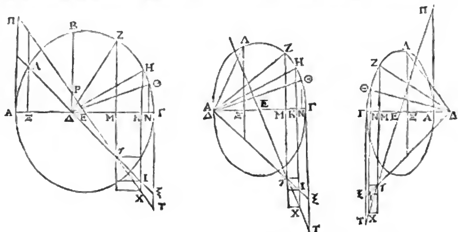
Si capiatur in Axe minore Ellipseos punctum, quod à Vertice Sectionis majori intervallo distet quam dimidio Lateris recti: erit illa Maxima *rectarum de puncto illo ad Sectionem ducendarum, quæ ad Verticem Sectionis ducitur. Reliquarum vero quæ huic propior est major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis minor sit AΓ: & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major sit semilatere recto. Dico ΓΔ maximam esse è rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Sit autem ΓH dimidium lateris recti, & ducantur è puncto Δ rectæ ΔZ, ΔE, ΔB, ac jungantur HZ, HE, HB, atque etiam rectæ ΓZ, ZE, EB. Recta igitur ΓH (per tres proximas propositiones) major est quam ZH; adeoque angulus ΓZH major erit angulo ZΓH: unde angulus ΓZΔ multo major erit angulo ZΓΔ. Recta itaque ΓΔ major est quam ZΔ. Similiter cum HZ major est quam HE, angulus ZEH major erit angulo EZH, ac angulus ZEΔ multo major erit angulo EZΔ: quocirca ΔZ major est quam ΔE. Eodemque argumento probabitur rectam ΔE majorem esse quam ΔB. ΔΓ itaque maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum, eidemque propior major est remotiore. Q. E. D.



PROPO-

meter transversa ΑΓ ad latus ejus rectum; (hoc autem fieri potest, quia dimidium lateris recti majus est quam ΔΓ) & erigatur è puncto Μ normalis ad ΑΓ ut ΖΜ, & jungatur ΖΔ. Dico quod recta ΖΔ Maxima est rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum; quodque eidem ab utrâque parte propior major est remotiore; quodque excessus quadrati ipsius ΖΔ supra quadratum alterius cujusvis ductæ æqualis est rectangulo facto super interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam, quod simile sit rectangulo in præcedentibus descripto.



Ducantur rectæ quælibet aliæ ΔΘ, ΔΗ, ΔΖ, ΔΛ, ac sit ΔΒ axi perpendicularis; & fiat ΓΤ æqualis dimidio lateris recti, & demittantur normales ΘΝ, ΗΚ, ΛΞ: jungatur etiam ΕΤ producaturque, & agantur ipsi ΑΓ parallelæ, ut fecimus in præcedentibus. Quoniam vero ΜΕ est ad ΔΜ ut latus transversum ad latus rectum, & in eadem est ratione ΕΓ ad ΓΤ; ut autem ΕΓ ad ΓΤ ita ΜΕ ad Μτ; recta igitur ΜΔ æqualis est ipsi Μτ, & quadratum ex ΜΔ duplum est trianguli ΜΔτ; quadratum autem ex ΜΖ (per primam hujus) æquale est duplo Trapezio ΓΤτΜ: quadratum igitur ex ΔΖ æquale est duplo trianguli ΜΔτ una cum duplo plani



æquale eſt triangulo ΠΕΔ: igitur differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΒ duplum eſt trianguli ΡΔΤ, quod quidem æquale eſt rectangulo facto ſuper ΔΜ ſpeciei jam deſcriptæ. Hæc autem eodem modo demonſtrantur ac propoſitio 16ma. Parique armento differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΑ æqualis eſt rectangulo ſimili ſuper ΜΞ facto.

ΔΖ igitur Maxima eſt rectarum per punctum Δ ad Sectionem ducendarum; è quibus etiam quæ eidem propior eſt major erit remotiore, & exceſſus quadrati ipſius ΔΖ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ æqualis eſt rectangulo ſpeciei deſcriptæ, facto ſuper interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam. Hæc autem omnia ita ſe habent, ſive Axis minor æqualis fuerit dimidio lateris recti, ſive major, ſive minor eo. Nam ſive major fuerit eo, ac ducantur rectæ à puncto Δ ad modum figuræ primæ; vel à puncto Α, ut in figura ſecunda; vel etiam à puncto exteriore, ut Δ in figura tertia; Maxima erit ea quam deſcripſimus: coincidente demonſtrationis modo, in figuris ſecunda ac tertia, cum ea quam in prima jam expoſuimus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

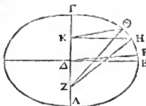
SI capiatur in aliquâ Maximâ, *in Ellipſi juxta propoſitionem præcedentem ductâ ac ultra Axem minorem productâ, punctum aliquod: erit quoque* Maxima *omnium de puncto illo ad eandem Sectionis partem ducendarum, recta ea cujus* Maxima *eſt pars; & ab utroque ejus latere quæ eidem propior eſt major erit remotiore.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, cujus Axis ΑΓ; ſitque ΒΔ recta Maxima de puncto Δ ad Sectionem ducta, modo in Prop. præcedente deſcripto. In ΒΔ capiatur punctum aliquod

normalem illam & centrum Sectionis ad interceptam inter normalem & punctum in Axe sumptum, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ; transeat autem imprimis recta Maxima per centrum ut BΔ. Dico BΔ esse ad angulos rectos super AΓ. Nam si non ita sit, sit normalis illa ΔE. erit igitur ΔE (per 11^{mam} hujus) Maxima ductarum de puncto Δ: quod est contra hypothesin; posuimus enim ΔB maximam esse. Quare recta ΔB est ad angulos rectos super AΓ.

Educatur jam recta quævis maxima ZH de puncto alio Z. Dico angulum ΓZH acutum esse; demissâque normali de puncto H ad Axem AΓ, erit intercepta inter ordinatim applicatam & centrum Δ, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & punctum Z, in ratione diametri transversæ ad latus rectum.



Erit enim recta ZΓ vel major dimidio lateris recti, vel minor eo, vel eidem æqualis. Non autem æqualis est ei, tunc enim (per 16^{m}. 17^{m}. 18^{m}. hujus) foret maxima: neque major est eo, quia sic etiam (per 19^{m} hujus) foret Maxima: Est igitur ZΓ minor dimidio lateris recti. Quare si fiat intercepta ad rectam compositam ex intercepta & ZΔ simul sumptis, sicut diameter transversa ad Latus rectum, erit intercepta illa minor quam ΓΔ, quia ΔZ minor est excessu dimidii lateris recti supra dimidium lateris transversi; adeoque ratio ejus ad ΓΔ minor erit ratione excessûs lateris recti supra diametrum transversam ad diametrum transversam: est igitur in ea ratione ad minorem quam ΓΔ. Sit ea ΔK, ut sit KΔ ad ZK in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Dico normalem super Axem AΓ ad punctum K erectam transire per punctum H. Nam si non eo transeat, cadat ad modum rectæ KΘ: & erit ΘZ (per demonstrata in 20ma hujus) Maxima. Hoc autem fieri nequit, *quia ex Hypothesi* ZH *est illa Maxima.* Transit igitur normalis de puncto H demissa per punctum K, ita ut ΔK sit ad KZ ut diameter transversa ad latus rectum. *Manifestum autem est* ΓZH *angulum esse acutum, ob* ZKH *rectum.* Q. E. D.

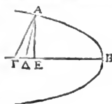
PROPO-

nima est quæ duci possit ad Sectionem de puncto Z. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

In omni Sectione Conica, duci non potest ab Axe ad idem in Sectione punctum, nisi una sola Minima.

Sit imprimis AB Parabola, cujus Axis BΓ; ac capiatur in Sectione punctum quodlibet A. Dico quod non duci potest ab Axe ad punctum A nisi una recta Minima.

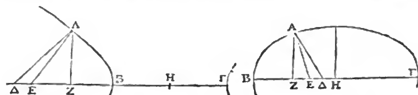


Nam si fieri potest ducantur AΓ, AΔ; ac demittatur ab A ad Axem BΓ normalis, ut AE: erit igitur EΔ (per 13^am hujus) dimidium lateris recti; atque etiam EΓ æqualis erit eidem semilateri recto. Quod absurdum. Igitur non duci possunt ab Axe ad punctum A plures quam una Minima. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

Si vero Sectio AB fuerit Hyperbola vel Ellipsis Axe ΓB ac centro H descripta; ac capiatur in ea punctum aliquod ut A. Dico quod non duci possint ab Axe ad punctum A plures quam una sola *Minima.*

Nam si fieri potest ducantur plures quam una, ut AE, AΔ; & ab A demittatur

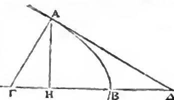


AZ normalis in Axem BΓ. Erit igitur ZH ad ZE (per demonstrata in 14ma & 15ma hujus) ut Axis transversus ad latus rectum. Oporteret autem HZ esse ad ZΔ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum. Hoc autem impossibile est; ac proinde non duci possunt duæ rectæ Minimæ ab Axe ad idem punctum A. Quod erat demonstrandum.

PROPO-

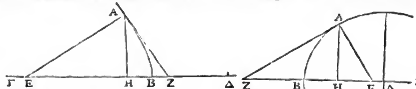
angulum ΔΑΓ rectum esse.

Demittatur normalis ΑΗ, ac (per 13am hujus) erit ΗΓ æqualis dimidio lateris recti; ac si ΑΔ tangat Parabolam, normali ΑΗ de puncto Α demissâ, erit (per 35am primi) ΒΔ ipsi ΒΗ æqualis, adeoque ΓΗ erit ad latus rectum ut ΒΗ ad ΗΔ: quare rectangulum sub ΓΗ, ΗΔ æquale erit facto sub ΒΗ & latere recto. Sed factum sub ΒΗ & latere recto (per 11mam primi) æquale est quadrato ex ΑΗ: quadratum itaque ex ΑΗ æquale est rectangulo sub ΓΗ, ΗΔ. Angulus autem ΑΗΔ rectus est: rectus est igitur (*per Lemma Pappi* I.) angulus ΔΑΓ.



PROPOSITIO XXVIII.

JAM si fuerit Sectio ΑΒ Hyperbola vel Ellipsis cujus Axis ΒΓ. Dico rectam ab extremitate Minimæ alicujus ductam, ita ut tangat Sectionem, eidem Minimæ normaliter insistere. Etenim si Minima illa fuerit pars Axis ΒΓ, manifestum est rectam Sectionem tangentem in puncto Β eidem Minimæ ad angulos rectos esse. Sit autem ΑΕ Minima alia, & sit Tangens ΑΖ. Dico angulum ΖΑΕ rectum esse.

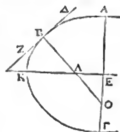


Demittatur normalis ΑΗ & sit centrum Δ: ac si fuerit ΑΕ minima & ΑΗ ordinatim applicata, erit ΔΗ ad ΗΕ (per 14am & 15am hujus) ut diameter transversa ad latus rectum. Est autem ΔΗ ad ΗΕ ut rectangulum sub ΔΗ, ΗΖ ad rectangulum sub ΗΖ, ΗΕ; adeoque erit rectangulum sub ΔΗ, ΗΖ ad rectangulum sub ΗΖ, ΗΕ ut diameter transversa ad latus rectum. Sed diameter transversa est ad latus rectum (per 37am primi) sicut rectangulum sub ΔΗ, ΗΖ ad quadratum ex ΑΗ: igitur

 rectan-

Maximam normaliter insistere.

Sit ABΓ Ellipsis cujus Axis minor AΓ, & ab Axe ad Sectionem ducatur Maxima quædam ut OB; tangat autem sectionem recta BΔ ad punctum B. Dico angulum ΔBO rectum esse.

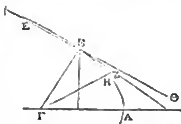


Ducatur è centro ad Sectionem Axi normalis EK, *quæ occurrat Maximæ* OB *in* Λ; quæque dimidium erit Axis majoris. Quoniam vero AΓ Axis minor est, & Axis EK occurrit Maximæ, erit (per 23^am hujus) pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem recta Minima; quare BΛ Minima est. Tangit autem Sectionem recta BΔ: BΔ igitur (per tres proximas Prop.) normaliter insistit super ipsam BΛ; *hoc est super Maximam* BO. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

S*I in qualibet trium Coni sectionum, ab eâ* Minimæ *alicujus extremitate quæ ad Sectionem est, erigatur recta eidem* Minimæ *ad angulos rectos: erit recta illa Sectionis Tangens.*

Sit enim Sectio Conica AB, & in eâ recta Minima ΓB. Dico rectam è puncto B ductam, ipsique ΓB normalem, Sectionem tangere.



Nam si fieri possit ut non tangat, intersecet eam, ut recta EBΘ: ac ducatur è puncto quodam Z, extra Sectionem quidem sumpto sed inter eam & ipsam BΘ, recta alia ut BZ: & demittatur in BZ de puncto Γ normalis ΓHZ. Erit igitur angulus ΓBZ acutus, ob angulum ΓZB rectum; adeoque ΓZ minor erit quam ΓB, ac ΓH multo minor quam ΓB: quod absurdum est. Posuimus enim ΓB Minimam esse. Recta igitur per punctum B ipsi BΓ normalis tanget Sectionem. Q. E. D.

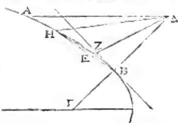
PROPOSITIO XXXII.

S*I recta tangat aliquam è Sectionibus Conicis, & erigatur è puncto contactus Tangenti normalis, quæ occurrat Axi: erit hæc recta* Minima *quæ per punctum illud ad Axem ducitur.*

Sit

tra Sectionem Conicam productis: erit portio ejus, quæ interjacet punctum illud & Sectionem, Minima *rectarum de puncto illo ad utrumvis latus Sectionis egredientium, modo non produci sed in uno tantum puncto Sectioni occurrere concipiantur: è cæteris vero quæ eidem propinquior minor erit remotiore.*

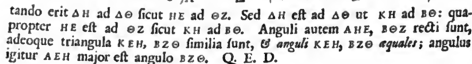
Sit ΑΒ Sectio Conica, & ΒΓ aliqua è Maximis vel Minimis, quæ producatur; & in producta capiatur punctum quodvis Δ, à quo ducantur ad sectionem rectæ ΔΑ, ΔΗ, ΔΓ, quæ singulæ occurrant sectioni in uno tantum puncto. Dico ΒΔ Minimam esse rectarum de puncto Δ ad sectionem ducendarum, eidemque propiorem minorem esse remotiore.



Nam si ducatur ΒΖ sectionem tangens in Β, erit (per 27^am & 28^am ac 30^am hujus) angulus ΖΒΔ rectus; adeoque ΔΖ *major erit quam* ΔΒ, *ac* ducta ΔΕ multo major quam ΔΒ. Jungantur rectæ ΗΒ, ΗΕ; atque angulus ΔΕΗ obtusus erit, angulus vero ΔΗΖ acutus: quapropter ΔΗ major erit quam ΔΕ. Ac pari argumento probabitur ΔΑ majorem esse quam ΔΗ. Possumus etiam idem demonstrare de rectis ab alterâ parte ipsius ΒΔ ducendis. Constat ergo Propositio.

PROPOSITIO XXXV.

I*N omni Sectione Conicâ, si ducantur plures* Minimæ; *erunt anguli comprehensi sub Axe &* Minimis *à Vertice Sectionis remotioribus majores comprehensis sub Axe & eidem Vertici propinquioribus.*



tando erit ΔΗ ad ΔΘ ficut ΗΕ ad ΘΖ. Sed ΔΗ eft ad ΔΘ ut ΚΗ ad ΒΘ: quapropter ΗΕ eft ad ΘΖ ficut ΚΗ ad ΒΘ. Anguli autem ΑΗΕ, ΒΘΖ recti funt, adeoque triangula ΚΕΗ, ΒΖΘ fimilia funt, *& anguli* ΚΕΗ, ΒΖΘ *æquales*; angulus igitur ΑΕΗ major eft angulo ΒΖΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

S*I in Hyperbola ducatur recta aliqua* Minima *quæ contineat cum Axe angulum: erit angulus ille minor angulo comprehenfo fub alterutro Afymptotorum & rectâ quæ per Verticem Sectionis ducta Axi normalis eft.*

Sit Hyperbolæ ΑΒ Axis ΓΔ, Afymptoti autem ΖΓ, ΓΗ; fitque recta quædam Minima ΑΔ: & è puncto Β erigatur Axi normalis ΖΒΗ. Dico angulum ΑΔΓ minorem effe angulo ΓΖΗ.

Fiat ΒΘ dimidium lateris recti, five cadat punctum Θ fuper Η, vel inter Β, Η, vel extra ea; ac jungatur ΑΓ. Jam ΓΒ eft ad ΒΘ, ficut axis tranfverfus ad latus rectum; eft autem ΓΕ ad ΕΔ (per 14^{am} hujus) ficut axis tranfverfus ad latus rectum: quare ΓΒ eft ad ΒΘ ut ΓΕ ad ΕΔ. Sed ΚΒ eft ad ΒΓ ut ΑΕ ad ΕΓ, adeoque ex æquo erit ΚΒ ad ΒΘ ficut ΑΕ ad ΕΔ. Ratio autem ΚΒ ad ΒΘ minor eft ratione ΖΒ ad ΒΘ; & ΖΒ eft ad ΒΘ (per 3^{am} II^{di}) ut ΓΒ ad ΒΖ. Quapropter ratio ΑΕ ad ΕΔ minor eft ratione ΓΒ ad ΒΖ. Hæc vero latera continent angulos rectos: unde manifeftum eft angulum ΑΔΓ minorem effe angulo ΓΖΒ. Q. E. D.



PROPOSITIO XXXVIII.

S*I ducantur à Sectione aliqua Conica rectæ duæ* Minimæ *ad idem Axis latus; occurrent illæ productæ ad oppofitam Sectionis partem, five ultra Axem.*

Sit

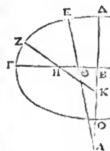
occurrunt invicem: *cumque* K I *minor est quam* K Z, *occurrent ad easdem partes Axis ad quas puncta* Γ, B. Quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO XL.

C*Oncursus rectarum* Minimarum *in Ellipsi fiunt intra angulum comprehensum sub Semiaxe ad quem ducuntur* Minimæ *& sub Axe minore.*

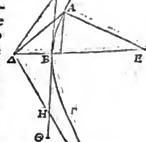
Sit ΔEΓ Ellipsis, cujus Axis minor ΔBO; sintque Minimæ duæ EΘ, ZH. Dico rectas EΘ, ZH productas concurrere intra angulum ΓBO.



Producantur enim hæ rectæ ab H & Θ ad occursum ipsius ΔBO, in punctis K, Λ. Quoniam vero EΘ Minima est, erit quoque EΛ (per conversam Prop. XXIII. hujus) Maxima. Pariter cum ZH producta occurrit ipsi BO in puncto K, erit etiam ZK Maxima. Occurrunt autem inter se EΘ, ZH productæ (per 38vam hujus) ad alteram partem Axis. Sed rectæ EΛ, ZK, cum Maximæ sint, occurrunt invicem (per 39am hujus) ad eandem Axis minoris partem. Situm est igitur punctum occursus intra angulum rectis ΓB, BO comprehensum. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

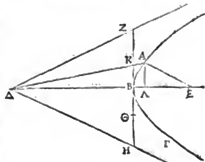
R*Ectæ* Minimæ *in Parabola vel Ellipsi de Sectione ad Axem ductæ & productæ occurrent etiam Sectioni ad alterum ejus latus.*



angulos rectos: ac fiat ΒΘ dimidium lateris recti. Quoniam vero diameter transversa non major est latere recto, ΔΒ non major erit quam ΒΘ; ac ΔΒ est ad ΒΘ (per tertiam II^di^) sicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΒΖ; quadratum igitur ex ΒΔ non majus erit quadrato ex ΒΖ, adeoque ΒΔ non major quam ΒΖ: unde & angulus ΒΖΔ non major erit angulo ΖΔΒ. Sed (per 37^am^ hujus) angulus ΒΖΔ major est angulo ΑΕΒ; quare angulus ΖΔΒ major est angulo ΑΕΒ. Angulus autem ΖΔΒ æqualis est angulo ΒΔΗ: quare angulus ΒΔΗ major est angulo ΑΕΒ. Jam angulus qui ipsi ΑΕΒ deinceps est una cum angulo ΑΕΒ æqualis est duobus rectis; adeoque angulus ΕΔΗ una cum angulo ipsi ΑΕΒ deinceps major est duobus rectis; rectæ igitur ΑΕ, ΔΗ productæ ad partes Ε & Η non occurrent inter se. Sed & recta ΑΕ non occurret sectionis parti ΒΓ (per octavam II^di^) quia non occurrit Asymptoto ΔΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIII.

Quod si fuerit diameter transversa major latere recto. Dico *Minimarum* aliquas à Sectione ΑΒΓ ductas & productas occurrere Sectioni ab alterâ ejus parte; aliquas vero eidem non occurrere.



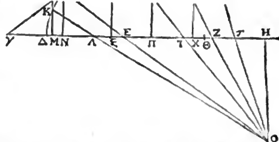
Sint duæ Sectionis Asymptoti ΖΔ, ΔΗ: cumque diameter transversa major est latere recto, erit ΔΒ major dimidio lateris recti ΒΘ; adeoque ratio ipsius ΖΒ ad ΒΘ major erit ratione ΖΒ ad ΒΔ. Fiat ΚΒ ad ΒΘ sicut ΖΒ ad ΒΔ; & jungatur ΔΚ, quæ producta (per 2^dam^ II^di^) occurret sectioni. Occurrat autem in puncto Α; & ab Α demittatur Axi ΔΕ normalis ΑΛ; ac fiat ΔΛ ad ΛΕ sicut ΔΒ ad ΒΘ, sive ut diameter transversa ad latus rectum. Quoniam vero normalis est ΑΛ, erit intercepta ΛΕ (per nonam hujus) aliqua è Minimis. Cum autem ΒΚ est ad ΒΔ sicut ΑΛ ad ΛΔ, atque etiam ΔΒ est ad ΒΘ sicut ΔΛ ad ΛΕ; erit ex æquo ΑΛ ad ΛΕ sicut ΒΚ ad ΒΘ. Sed ΒΚ est ad ΒΘ ut ΖΒ ad ΒΔ; quare ΑΛ est ad ΛΕ sicut ΖΒ ad ΒΔ. Anguli autem ΖΒΔ, ΑΛΕ sunt æquales, quia recti; atque adeo triangula ΖΒΔ, ΑΛΕ similia, & angulus ΖΔΒ angulo ΑΕΛ æqualis:

minime ejus ad Axem ducitur, auferet portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem minorem portione ab ipsa ducta abscissâ. Quod si Sectio fuerit Ellipsis, oportebit & duas Minimas *& tertiam ductam occurrere eidem majori Semiaxi Sectionis.*

Imprimis autem sit Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΔΗ; ac sint duæ Minimæ ab eadem ductæ ΒΖ, ΓΕ, quæ occurrant inter se in puncto Ο: & educatur è puncto Ο recta ΚΛ, primum extra ipsas ΟΓ, ΟΒ. Dico ΚΛ non esse aliquam è Minimis, Minimamque per punctum Κ ductam abscindere ab Axe majorem portionem, Vertici sectionis Δ conterminam, quam est ΔΛ.

Demittantur normales ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ; ac sit ΘΗ dimidium lateris recti. Quoniam vero ΒΖ Minima est, & ΒΠ normalis, erit (per 13^am hujus) ΠΖ æqualis dimidio lateris recti; adeoque ΠΖ æqualis est ipsi ΘΗ: unde & ΠΘ ipsi ΖΗ æqualis erit, ac ΗΘ erit ad ΘΠ sicut ΠΖ ad ΖΗ. Sed ΠΖ est ad ΖΗ ut ΠΒ ad ΟΗ; unde rectangulum sub ΟΗ, ΗΘ æquale erit rectangulo sub ΒΠ, ΠΘ. Eodemque modo demonstratur rectangulum sub ΓΝ, ΝΘ æquale esse rectangulo sub ΟΗ, ΗΘ: æquale est igitur rectangulum sub ΠΒ, ΘΠ rectangulo ΓΝ, ΝΘ; ac proinde ΠΒ est ad ΓΝ ut ΝΘ ad ΘΠ. Jungatur ΒΓ ac producatur ad occursum Axis ΔΗ in puncto γ; producatur etiam normalis ΚΜ ad Σ. Erit igitur ΠΒ ad ΓΝ sicut Πγ ad γΝ, adeoque Πγ est ad γΝ sicut ΝΘ ad ΘΠ, *ac dividendo* ΠΝ *est*

qualis est ipsi γN; unde γX major erit quam ΠΘ; ac ratio ΠX ad Xγ minor erit ratione XΠ ad ΠΘ. Dividendo autem ratio XΠ ad Πγ minor erit ratione ejusdem ad XΘ; ac componendo ratio Xγ ad γΠ, *hoc est* XP *ad* ΠB, minor erit ratione ΠΘ ad ΘX: quare ratio XP ad ΠB minor est ratione ΠΘ ad ΘX; ac rectangulum ΘXP minus erit rectangulo BΠΘ; adeoque rectangulum ΛXΘ multo minus erit rectangulo BΠΘ. Sed BΠΘ æquale est rectangulo OHΘ, quocirca ΛXΘ minus est rectangulo OHΘ; ad proinde ratio ΛX ad OH, hoc est XT ad TH, minor erit ratione HΘ ad ΘX: erit igitur HΘ major quam XT. Sed ΘH dimidium est lateris recti, quare XT minor est dimidio lateris recti. Minima itaque de puncto Λ ducenda auferet rectam majorem quam XT; adeoque majus erit segmentum Axis, à sectionis Vertice Δ sumptum, quam segmentum ΔT rectâ ΛT abscissum: ac propterea (per 24^am hujus) recta ΛT non est aliqua è Minimis.



Quinetiam si capiatur recta aliqua ut OΥ inter ipsas OB, OΓ intermedia: Dico quod ΥT non est Minima, quodque Minima de puncto Υ ducta abscindet segmentum Axis, vertici Δ adjacens, minus portione ejus ΔT. Demittatur enim normalis Υξ. Cumque jam probatum sit ΠΘ æqualem esse ipsi γN, erit ξγ major quam ΠΘ; adeoque ratio Πξ ad ξγ minor ratione ejusdem ad ΠΘ: & componendo ratio Πγ ad γξ minor erit ratione ξΘ ad ΘΠ. Sed Πγ est ad γξ ut BΠ ad Ξξ; unde ratio BΠ ad Ξξ minor est ratione ξΘ ad ΘΠ: ac rectangulum BΠΘ minus rectangulo Ξξ Θ, multoque minus rectangulo Υξ Θ. Rectangulum autem OHΘ æquale est rectangulo BΠΘ; quare rectangulum OHΘ minus est facto sub Υξ, ξΘ: unde & ratio OH ad Υξ minor erit ratione ξΘ ad ΘH. Sed OH est ad Υξ sicut HT ad Tξ; quare HT est ad Tξ in minore ratione quam ξΘ ad ΘH: recta igitur HΘ minor est quam Tξ. Verum HΘ dimidium est lateris recti; quapropter recta Minima de puncto Υ ducenda auferet portionem minorem quam ξT: ac segmentum Axis Vertici Sectionis adjacens minus erit quam ΔT: unde ΥT non est Minima, sed Minima de puncto Υ ducenda auferet Axis portionem minorem quam ΔT. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV.

SI vero sectio fuerit Hyperbola vel Ellipsis ut ABΓΔ, Axe MΔ centro vero N; & ducantur in sectione duæ *Minimæ*, ut BE, ΓZ; à quarum concursu in puncto Θ agatur

nendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipsi erit ΞΝ ad ΝΠ *sive* ΣΥ, sicut ΝΕ ad ΕΣ; hoc est, ut Νθ ad ΒΣ, ob similia triangula: & addendo terminos in Hyperbola, vel auferendo minores è majoribus in Ellipsi, erit Ξθ ad ΒΥ sicut ΝΕ ad ΕΣ, vel sicut ΞΝ ad ΝΠ. Jam ratio rectanguli ΞΝΜ ad rectangulum ΠΝΟ componitur ex ratione ΞΝ ad ΝΠ & ΜΝ ad ΝΟ: demonstravimus autem ΞΝ esse ad ΝΠ sicut Ξθ ad ΒΥ, & ΜΝ esse ad ΝΟ ut ΕΜ ad ξΥ, ratio igitur rectanguli ΝΜΘ ad rectangulum ΝΠξ componitur ex ratione Ξθ ad ΒΥ & ratione ΕΜ ad ξΥ. Sed rectangulum ΝΜΘ æquale est facto sub Ξθ & ΕΜ, quia Ξθ est ad ΘΞ sicut ΘΜ ad ΜΕ: rectangulum igitur ΝΠξ æquale est contento sub ΒΥ, Υξ. Eodem modo demonstrabitur rectangulum ΝΠξ æquale esse rectangulo Γδξ; atque adeo rectangulum sub ΒΥ, Υξ æquale esse rectangulo sub Γδ, δξ: unde ΒΥ est ad Γδ ut δξ est ad ξΥ. Sed ΒΥ est ad Γδ sicut ΥΤ ad Τδ; quare ΥΤ est ad Τδ sicut δξ ad ξΥ; ac dividendo Υδ est ad δΤ sicut Υδ ad ξΥ: unde patet ξΥ ipsi Τδ æquari.

Hinc constabit Τξ majorem esse quam Τγ; ratio itaque γΥ ad Τγ major erit ratione ejusdem ad Υξ, ac componendo erit ratio ΥΤ ad Τγ major ratione γξ ad

metri transversæ ad latus rectum. Ratio igitur ΞN ad NΠ minor est ratione Ξη ad Kγ; & auferendo duas minores à majoribus in Hyperbola, vel componendo eas in Ellipsi, fiet ratio Nη ad Kτ major ratione ΞN ad NΠ, ob NΠ ipsi γτ æqualem. Atqui Nη est ad Kτ (ob similia triangula) sicut NΛ ad Λτ; adeoque ratio NΛ ad Λτ major est ratione ΞN *ad* NΠ: *ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi ratio* Nτ *ad* τΛ *major erit ratione* ΞΠ ad ΠN, hoc est ratione diametri transversæ ad latus rectum. Jam si faciamus Nτ ad rectam aliam sicut diameter transversa ad latus rectum; erit hæc alia major quam Λτ, adeoque recta Minima de puncto K ducenda (per 9^{am}, 10^{am} & 25^{am} hujus) abscindet segmentum Axis Vertici Δ adjacens, quod majus erit quam ΔΛ.

Porro si ducatur recta alia ad modum ipsius ΘλΑα: dico rectam Αλ non esse Minimam, Minimamque per punctum Α ductam abscindere ab Axe segmentum majus quam Δλ. Demittatur enim ad Axem normalis Ασ, quæ producatur ad υ & ι. Jam quoniam Tδ æqualis est ipsi Tξ, erit Tδ major quam ξι, ac ratio ipsius δι ad ιξ major ratione ejusdem ad Tδ; *ac componendo vel dividendo ratio* δξ *ad* ξι *major erit ratione* ιT *ad* Tδ. Sed ιT est ad Tδ sicut ιυ ad Γδ; adeoque ratio δξ ad ξι major

quare ratio ΝΛ ad λσ major est ratione ΞΝ ad ΝΠ: ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipsi, erit ratio Νσ ad σλ major ratione ΞΠ ad ΠΝ. Sed ΞΠ est ad ΠΝ ut diameter transversa ad latus rectum; adeoque si fiat Νσ ad aliam quandam in ratione diametri transversæ ad latus rectum, erit hæc alia major quam σλ: ac proinde Minima de puncto Α ducenda abscindet ab Axe segmentum majus quam Δλ, per demonstrata in nona & decima hujus.

Quod si ducatur alia recta ut Θωφο inter Minimas ΒΓ, ΓΖ intermedia: dico rectam ωφ non esse aliquam è Minimis, ac Minimam de puncto φ ductam abscindere ab Axe segmentum minus quam Δω. Demittatur ad Axem normalis φμν. Cumque Τδ, uti demonstravimus, æqualis sit ipsi Τξ, erit Τδ minor quam νξ, ac ratio νδ ad δΤ major erit ratione νδ ad νξ: & componendo ratio νΤ ad Τδ major erit ratione δξ ad ξν. Sed νΤ est ad Τδ sicut πν ad Γδ; quare ratio πν ad Γδ major erit ratione δξ ad ξν: adeoque rectangulum sub πν, νξ majus erit rectangulo sub Γδ, δξ. At φν major est quam πν, ac proinde rectangulum φνξ multo majus erit quam rectangulum Γδξ. Est autem rectangulum Γδξ (per jam demonstrata) æquale rectangulo ΝΠξ, quod quidem æquale est rectangulo ΧΘΡ: quare rectangulum sub φν, νξ majus est rectangulo ΧΘΡ. Sed rectangulum ΧΘΡ fit sub ΘΧ, Χξ: quare rectangulum φνξ majus est rectangulo ΘΧξ; ac ratio φν ad ΘΧ major est ratione Χξ ad ξν. Est autem φν ad ΘΧ sicut νϱ ad ϱΧ, quare ratio νϱ ad ϱΧ major est ratione Χξ ad ξν; ac componendo ratio νΧ ad Χξ major est ratione νΧ ad νϱ: unde constat Χξ minorem esse quam νϱ, ac rationem ΞΘ ad Χξ majorem esse ratione ΞΘ ad νϱ. Sed (ob similia triangula) ΞΘ est ad νϱ sicut Ξο ad φν: ratio igitur ΞΘ ad Χξ major est ratione Ξο ad φν. Cum autem ΞΘ ipsi ΜΝ, ac Χξ ipsi ΜΟ æqualis est,

Ac si rectæ quælibet egrediantur ex illo puncto ad [illegible]
Minimam *& Verticem Axis majoris*: Minimæ *ab earundem extremitatibus ad Axem ductæ abscindent Axis segmenta Vertici contermina, majora quidem quam segmenta ejusdem ab ipsis egressis abscissa*; minora vero si ductæ fuerint ad alteras partes sive versus Axem minorem.

Sit Ellipseos ΑΒΓ Axis major ΔΕ centrumque Ζ; & è centro erigatur normalis ad Axem ΖΑ, quæ producatur ad occursum Minimæ alicujus ΒΗ etiam productæ in puncto Κ: ac ducatur alia recta ut ΚΘΓ. Dico quod ΘΓ non est Minima, quodque Minima è puncto Γ ad ΔΕ ducenda abscindet ab Axe portionem majorem quam ΔΘ.

Si enim recta ΓΘ foret Minima, producta occurreret Minimæ ΒΗ intra angulum ΔΖΚ, juxta 40^{mam} hujus: sed occurrit ei recta ΓΘ non nisi in puncto Κ; adeoque ΘΓ non est Minima. Quod vero Minima è puncto Γ ad Axem ΔΕ educta abscindat ex eodem segmentum majus quam ΔΘ, hinc patet; quia (per 40^{mam} hujus) recta Minima per punctum Γ ducta occurrit ipsi ΒΗ, quæ etiam Minima est, intra angulum ΗΖΚ: unde manifestum est illam abscindere majorem Axis portionem quam ΔΘ.

At si ducatur alia ut ΑΜΚ *ad alteram partem Minimæ* ΒΗ; *consimili argumento patebit* ΑΜ *non esse Minimam, Minimamque de puncto* Α *ad Axem ducendam* (*per eandem* 40^{mam}) *abscindere minorem Axis portionem quam* ΔΜ: *quia occurret Minimæ* ΒΗ *intra angulum* ΗΖΚ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVII.

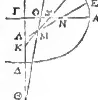
Q*Uatuor rectæ* Minimæ *in eadem Semi-ellipsi ductæ, & ab Axe majore abscissæ, non conveniunt in eodem puncto.*

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis cujus Axis major ΑΔ. Dico quod si ducantur ab Axe ΑΔ ad Sectionem ΑΒΓΔ quatuor Minimæ, non convenient inter se in eodem puncto. Nam, si fieri possit, ducantur rectæ ΚΓ, ΑΕ, ΜΖ, ΘΒ quæ conveniant inter se in puncto Η. Jam vel aliqua ex his rectis normalis erit super Axem ΑΔ, vel nulla earum normalis erit. Sit autem imprimis una earum ΒΘ Axi normalis.

Quoniam vero recta ΒΘ Minima est, atque etiam Axi ΑΔ normalis, erit (per 15^{am} hujus) punctum Θ centrum Sectionis: occurrat autem eidem recta Minima

ΚΓ

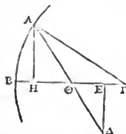
cantur rectæ ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ concurrentes in eodem puncto Μ. Quoniam vero ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ Maximæ sunt, erunt etiam ΕΝ, ΖΞ, ΟΗ (per 23ᵃᵐ hujus) tres Minimæ. Tres igitur Minimæ ad eundem Sectionis quadrantem ductæ concurrere debent in eodem puncto: id quod (per 45ᵃᵐ & 46ᵃᵐ hujus) absurdum est. Quapropter tres Maximæ ad eundem quadrantem Sectionis ΑΒΓ ductæ non concurrere possunt in eodem puncto Μ. Q. E. D.



PROPOSITIO XLIX.

In omni Sectione Conicâ: si erigatur super Axem normalis, ad punctum ejus quodlibet, modo non longius distet à Vertice Sectionis quam dimidio Lateris recti; ac capiatur punctum aliquod in eadem normali, unde egrediatur recta quævis ad alterum Sectionis latus, inter normalem & Verticem Sectionis: Recta Minima *ab extremitate ejusdem ducta non erit pars ejus; sed abscindet ex Axe portionem Vertici Sectionis adjacentem, majorem eâ quæ à rectâ de sumpto puncto eductâ abscinditur.*

Imprimis Parabolæ ΑΒ sit Axis ΒΓ; normalis vero sit ΕΔ; ita ut ΕΒ, segmentum Axis à normali illâ abscissum, non majus sit dimidio lateris recti; & in ipsa ΔΕ capiatur punctum quoddam Δ extra Axem; & agatur recta ΔΘΑ. Dico rectam ΑΘ non esse Minimam.



Demittatur enim normalis ΑΗ. Cumque ΕΒ non est major semilatere recto, erit ΕΗ minor semilatere recto. Fiat ΗΓ æqualis semilateri recto, ac ducatur ΑΓ: erit itaque ΑΓ (per 8ᵛᵃᵐ hujus) Minima, adeoque ΑΘ (per 24ᵃᵐ hujus) non erit Minima. Abscindit enim recta Minima à puncto Α ducta segmentum Axis majus quam ΒΕ: cadit igitur remotius à Sectionis Vertice quam ΑΘ.

versa ad latus rectum; ac recta AΘ (per 9 & 10 hujus) erit Minima. Recta itaque AZ (per 25um hujus) non est Minima, *sed Minima de puncto* A *ducta abscindit portionem axis majorem quam* BZ. Q. E. D.

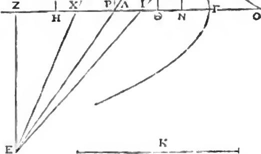
PROPOSITIO LI.

Quod si normalis dicta abscindat Axis segmentum majus semi-latere recto: Dico rectam assignari posse, cum quâ comparatione factâ, si puncti sumpti ab Axe distantia, sive longitudo normalis, major fuerit assignatâ, nulla omnino recta ab extremitate normalis ad Sectionem duci potest, è qua abscindat Axis Minimam: *sed* Minima, *ab extremitate cujuscunque rectæ ad Sectionem ex eo puncto egressæ, abscindet ex Axe Segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ipsa egressa. Quod si normalis æqualis fuerit assignatæ, duci potest ab extremitate ejus una sola recta è qua abscindatur* Minima: Minimæ *vero, ab extremitatibus cæterarum omnium ab eodem puncto egredientium ductæ, abscindent segmenta Axis vertici adjacentia, majora quam ab ipsis egressis abscissa. Si vero normalis minor fuerit assignatâ, duæ tantum rectæ duci possunt è quibus abscindat Axis* Minimas: Minimæque *ab extremitatibus egredientium ductæ, dictasque duas* Minimas *interjacentes, abscindent ab Axe portiones Vertici Sectionis conterminas, minores quam quæ ab ipsis egressis abscinduntur: Quæ vero ducuntur ab extremitatibus cæterarum egredientium, inter duas illas* Minimas *non intermediarum, abscindent portiones Axis majores quam ab ipsis egressis abscissæ. Oportet autem in Ellipsi normalem in Axem majorem demitti.*

Imprimis autem sit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓZ; super quem erigatur EZ normaliter: & sit segmentum Axis ΓZ majus dimidio lateris recti. Dico quod si capiantur puncta in ipsa EZ, à quibus egrediantur ad Sectionem rectæ, ea omnia necessariò eventura, prout declaravimus in hac Propositione.

Quoniam

ratio ZE ad MN, sive ZI ad IN, major est ratione NH ad HZ: ac componendo ratio ZN ad NI major ratione NZ ad ZH. Quocirca HZ major erit quam NI. Sed HZ æqualis est dimidio lateris recti; quare NI minor est dimidio lateris recti, ac proinde MI non est aliqua è Minimis; sed Minima de puncto M ad Axem ducta (per 8^vam^ & 24^tam^ hujus) propior erit puncto Z.



Jam si ducatur alia ut AXE; dico quod AX non est Minima. Demittatur enim normalis AP quæ producatur ad Π. Quoniam vero ΘO æqualis est ipsi ΘH, ut nuper diximus, consequitur rectam ΘO majorem esse quam PH; adeoque ratio PΘ ad ΘO minor erit ratione PΘ ad PH; ac componendo ratio PO ad OΘ minor erit ratione ΘH ad PH. Sed PO est ad OΘ ut PΠ ad BΘ; quare ratio PΠ ad BΘ minor est ratione ΘH ad PH: unde rectangulum sub PΠ, PH minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH, ac rectangulum sub AP, PH multo minus erit contento sub BΘ, ΘH. Demonstravimus autem rectangulum sub EZ, ZH majus esse contento sub BΘ, ΘH; quapropter rectangulum sub AP, PH minus erit rectangulo sub EZ, ZH. Ratio igitur AP ad EZ minor est ratione ZH ad HP. Sed AP est ad EZ ut PX ad XZ, adeoque ratio PX ad XZ minor est ratione ZH ad HP; ac invertendo ratio ZX ad XP major erit ratione PH ad HZ: dein componendo ratio ZP ad PX major erit ratione PZ ad ZH. Hinc liquet ZH majorem esse quam PX. Sed ZH æqualis est dimidio lateris recti, ergo PX minor est dimidio lateris recti. Recta igitur AX non est aliqua è Minimis, sed Minima de puncto A ducta (per 8^vam^ & 24^tam^ hujus) propius puncto Z cadet. Igitur si normalis EZ major fuerit quam recta K, nulla duci potest ad Sectionem recta per punctum E è qua abscindat Axis Minimam.

Quod si ZE æqualis fuerit ipsi K. Dico quod non nisi una sola recta, è qua abscindatur Minima, de puncto E ad sectionem duci poterit: quodque Minimæ ab

 extre-

per A ducta cadet versus Z.

Sit jam EZ minor quam K. Dico duci posse de puncto E ad sectionem ABΓ duas rectas è quibus abscindat Axis Minimas: ac, si ab extremitatibus rectarum inter has duas intermediarum ducantur Minimæ, abscindere illas segmenta Axis minora quam quæ abscindunt ipsæ rectæ ex E eductæ. Cæteræ vero rectæ exteriores auferent segmenta Axis majora segmentis quæ à Minimis ab earundem extremitatibus ad axem eductis abscinduntur.

Nam cum ZE minor est quam K, erit ratio EZ ad ΘB minor ratione ipsius K ad ΘB, hoc est ratione ΘH ad HZ; adeoque rectangulum sub EZ, HZ minus erit rectangulo sub BΘ, ΘH. Fiat igitur rectangulum sub TΘ, ΘH æquale rectangulo sub EZ, ZH; & sit ξH normalis ipsi ZH: & per datum punctum T, Asymptotis ξH, HΓ (per quartam secundi) describatur Hyperbola, quæ quidem sectio occurrat Parabolæ in punctis A, M. Jungantur rectæ EA, EM, ac demittantur normales AP, MN. Quoniam vero sectio ATM Hyperbola est, cujus Asymptoti ξH, HΓ; ac ducuntur à sectione illa ad angulos rectos AP, MN, TΘ: propterea (per 12^{am} II^{di}) rectangulum sub MN, NH æquale erit contento sub TΘ, ΘH, quod quidem æquale est rectangulo sub EZ, ZH. Hinc MN erit ad EZ sicut ZH ad HN. Sed MN est ad EZ sicut NI ad IZ, quare ZH est ad HN sicut NI ad IZ; ac componendo ZN est ad HZ sicut NZ ad NI: unde NI ipsi ZH sive dimidio lateris recti æqualis est. Recta igitur MI (per 8^{vam} hujus) Minima est. Pari modo constabit ipsam AX Minimam esse. Sunt itaque MI, AX duæ Minimæ concurrentes inter se in puncto E. Ac si educatur ex E ad Sectionem recta quævis alia inter AE & EM, & ab ejusdem extremitate ducatur Minima, cadet ea propius Vertici Sectionis. Quod si educatur recta aliqua extra ipsas AE, EM, cadet Minima ejus versus partes à Vertice Sectionis remotiores. Hæc autem omnia demonstrantur ex 44^{a} hujus libri. Q. E. D.

PROPO-

componitur autem ratio EZ ad KB ex ratione ZE ad EN & ratione Kγ ad KB, ob Kγ ipsi EN æqualem. Ratio vero ipsius



Δ ad BK, ex hypothesi, componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ: adeoque ratio composita ex rationibus ZE ad EN & Kγ ad KB major est composita ex rationibus ΔE ad EH & HK ad KΔ. Sed ZE est ad EN sicut ΔE ad EH, quia utraque ZN ad NE & ΔH ad HE est in ratione diametri transversæ ad latus rectum. Reliqua igitur ratio Kγ ad KB major est ratione HK ad KΔ: unde rectangulum sub Kγ, KΔ majus erit contento sub KB, HK. Rectangulum autem sub Kγ, KΔ est rectangulum ΔKγ, adeoque rectangulum sub KB, HK minus est rectangulo ΔKγ. Fiat rectangulum γKH, nempe quod continetur sub Kγ, γΣ, commune: ac rectangulum sub Bγ, γΣ minus erit rectangulo ΔHΣ. Est vero rectangulum ΔΣ æquale rectangulo σN, quia ZN est ad NE sicut ΔH ad HE; quare rectangulum sub Bγ, γΣ minus est rectangulo σN. Probavimus autem, in demonstrandâ 45[ta] hujus, quod eidem æquale esse debuit, adeoque BM non est aliqua è Minimis; sed Minima de puncto B educta abscindet portionem Axis Vertici sectionis adjacentem majorem quam ΓM.

Jam vero si ducatur recta alia ut ZTX, extra punctum B: dico ipsam quoque XT non esse Minimam, sed Minimam de puncto X ductam abscindere Axis segmentum Vertici sectionis conterminum, majus quam ΓT. Ducatur sectionis Tangens ad punctum B ut BΞ, & Axi normalis XΠ, quæ producatur ad P. Quoniam vero ratio Kγ ad KB major est ratione HK ad KΔ, fiat TK ad KB sicut HK ad KΔ, ac per T Axi EΓΔ parallela ducatur ξTτ. Cum autem recta BυξΞ tangit sectionem, ac BK Axi ΔυK normalis est; erit rectangulum sub KΔ, Δυ (per 37[mam] primi) æquale quadrato ex ΔΓ. Est igitur KΔ ad ΔΓ sicut ΔΓ ad Δυ, ac tertia proportionalis ipsis KΔ, ΔΓ est Δυ, uti tertia proportionalis ipsis HΔ, ΔΘ est recta KΔ: ac KΔ est ad ΔΓ sicut ΔH ad ΔΘ, *quia ΔK, ΔΘ sunt duæ mediæ proportionales inter ipsas ΔH, ΔΓ*; quapropter HΔ est ad ΔK sicut ΔK ad Δυ: & auferendo duas minores à duabus ma-

majus contento sub $X\beta$,

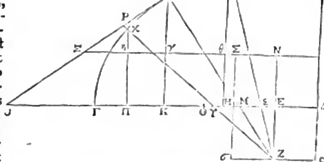
$\beta\tau$; adeoque rectangulum $\Delta H\tau$ majus est rectangulo sub $X\beta, \beta\tau$: ac facto rectangulo sub $\beta\eta, \eta\Sigma$ communi, erit in Hyperbola rectangulum sub $X\eta, \eta\Sigma$ minus utroque rectangulo $\Delta H\tau, \beta\eta\Sigma$ simul sumpto: vel in Ellipsi, sublato rectangulo $B\eta\Sigma$; erit differentia rectangulorum $\Delta H\tau$, $B\eta\Sigma$ major contento sub $X\eta\Sigma$, unde rectangulum $X\eta\Sigma$ multo minus erit rectangulo $\Delta H\Sigma$. Sed rectangulum $\Delta H\Sigma$ æquale est rectangulo ΣNZ, quia ZN est ad NE sicut ΔH ad HE; rectangulum itaque sub $X\eta$, $\eta\Sigma$ minus est rectangulo ΣNZ. Ostendimus autem in demonstratione Propositionis 45[æ] hujus, quod eidem æquale esse debuit; adeoque recta $X\Upsilon$ non est Minima: ac Minima de puncto X ducta abscindet ab Axe portionem Vertici conterminam, majorem quam $\Gamma\Upsilon$.

Præterea si ducatur alia recta ut $Z\iota A$: Dico quod $A\iota$ non est Minima, quodque Minima de puncto A ducta abscindit Axis portionem majorem quam $\Gamma\iota$. Demittatur enim normalis $A\theta$, quæ producatur ad δ. Demonstravimus autem rectam $T\tau$ æqualem esse ipsi $T\xi$, adeoque $\tau\zeta$ minorem esse quam $T\xi$; unde ratio $T\zeta$ ad $\zeta\tau$ major erit ratione ζT ad $T\xi$; ac componendo ratio $T\tau$ ad $\tau\zeta$ major ratione $\zeta\xi$ ad $T\xi$. Sed $\zeta\xi$ est ad $T\xi$ sicut $\delta\zeta$ ad BT; adeoque ratio $T\tau$ ad $\tau\zeta$ major est ratione $\delta\zeta$ ad BT: ac rectangulum sub $BT, T\tau$ majus erit rectangulo sub $\delta\zeta, \zeta\tau$. Unde argumento nuper usurpato simili, demonstrabitur rectangulum sub $A\theta, \theta\Sigma$ minus esse rectangulo ΣNZ; ac propterea (per 45[tæ] hujus) constabit $A\iota$ non esse Minimam; sed Minimam de puncto A eductam abscindere portionem Axis majorem quam $\Gamma\iota$.

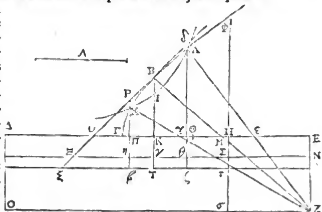
Ponamus jam normalem ZE æqualem esse ipsi Λ. Dico quod una sola recta duci possit de puncto Z, è quâ abscindatur Minima: quodque Minimæ ab extremitatibus reliquarum omnium ab eodem puncto eductarum abscindunt ex Axe portiones majores quam quæ auferuntur ab ipsis eductis.

Ad modum superius dictum ducatur recta BK, & jungatur ZB: & erit ZE ad BK sicut Λ ad BK. Ratio autem ZE ad BK componitur ex ratione ZE ad EN & ratione $K\gamma$, ipsi EN æqualis, ad BK: ratio vero ipsius Λ ad BK componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad $K\Delta$, per constructionem superius traditam. Ratio igitur composita ex rationibus ZE ad EN & $K\gamma$ ad KB æqualis est compositæ ex rationibus ΔE ad EH & HK ad $K\Delta$. Sed ratio ZE ad EN æqualis est rationi ΔE ad EH; adeoque ratio $K\gamma$ ad KB eadem est ac ratio HK ad $K\Delta$; ac proinde rectangulum sub $K\gamma, K\Delta$ æquale erit contento sub KB, HK: & rectangulo sub $K\gamma, KH$ communi

rectangulo sub ... $\eta\Sigma$, ac multo majus rectangulo sub Xη, $\eta\Sigma$. Demonstratum autem est rectangulum sub Bγ, $\gamma\Sigma$ æquale esse rectangulo ΣΝΖ; propterea rectangulum sub Xη, $\eta\Sigma$ minus erit rectangulo ΣΝΖ. At (per 45am hujus) eidem æquale esse debuit, adeoque recta XΥ non est Minima. Minima vero de puncto X educta abscindet ex Axe segmentum Sectionis Vertici adjacens ipsâ ΓΥ majus. Ac pari argumento demonstrabitur Aι non esse Minimam; sed Minimam de puncto A ductam abscindere Axis portionem majorem quam Γι.



Denique sit ZE ipsâ Λ minor: Dico duci posse de puncto Z duas tantum rectas è quibus abscindat Axis Minimas; Minimas autem de punctis in Sectione, inter illas duas eductas intermedias, abscindere portiones Axis minores abscissis à rectis è puncto Z egredientibus: Minimas vero, ab extremitatibus cæterarum extra istas duas è puncto Z egressarum, abscindere segmenta Axis Vertici adjacentia, majora quam quæ ex eodem abscindunt ipsæ egressæ.

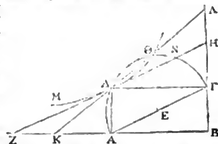


 Quoniam

rum eductarum, quæ abscindent Axis portiones majores. Quæ vero dicta sunt de Axe Ellipseos intelligi debent de Axe majori. Q. E. D.

INTERPRETIS ARABIS SCHOLION.

In sequentibus hujus libri requiritur inventio duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, idemque postulat Apollonius *in hac Propositione. Modus autem effectionis hic est. Sint duæ rectæ* ΑΒ, ΒΓ; *ac si æquales fuerint, manifestum est terminos interpositos etiam iisdem æquales esse. Quod si inæquales fuerint, sit* ΑΒ *major; & conveniant ad angulos rectos in* Β, *ac producantur indefinité. Completo autem parallelogrammo* ΑΒΓΔ, *jungatur* ΑΓ *quæ bisecetur in puncto* Ε; *ac centro* Ε *describatur Circulus* ΑΒΓΔ *parallelogrammo circumscriptus; & per* Δ *agatur recta* ΖΔΗ *ipsi* ΑΓ *parallela, quæ divisa erit bifariam in puncto* Δ, *ob æquales* ΑΕ, ΕΓ: *intersecabit vero arcum* ΔΓ, *quia* ΓΔ *major est quam* ΔΑ: *occurrat autem ei in puncto* Ν. *Describatur (juxta quartam* II^di^) *per punctum* Δ *Asymptotis,* ΒΖ, ΒΗ *Hyperbola* ΘΔΜ; *& erit* ΖΗ *(per nonam* II^di^) *Tangens ejusdem, ob æquales* ΖΔ, ΔΗ. *Ac manifestum est Sectionem illam Circulo occurrere inter puncta* Δ, Ν; *aliter enim caderet segmentum arcus* ΔΝ *& subtensa ejusdem inter sectionem Tangentemque ejus, quod (per* 32^dam^ *primi) fieri non potest. Neque erunt intersectiones cum circulo* ΑΒΓΔ *(per* 33^am^ II^di^) *plures quam duæ. Occurrat igitur in punctis* Δ, Θ; *ac juncta* ΔΘ *producatur utrinque ad* Κ, Λ; *ipsæque* ΔΚ, ΘΛ *(per* 8^vam^ II^di^) *æquales erunt. Dico quod inter rectas* ΑΒ, ΒΓ *duæ proportionales sunt* ΛΓ, ΚΑ.



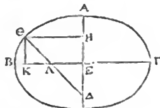
Quoniam ΔΚ *ipsi* ΘΛ *æqualis est, erit rectangulum sub* ΔΛ, ΛΘ, *hoc est (ob Circulum) rectangulum sub* ΒΛ, ΛΓ, *æquale rectangulo sub* ΘΚ, ΚΔ, *sive sub* ΒΚ, ΚΑ; *adeoque* ΛΓ *erit ad* ΚΑ *sicut* ΒΚ *ad* ΒΛ. *Sed* ΒΚ *est ad* ΒΛ *sicut* ΔΓ, *hoc est* ΑΒ *ad* ΛΓ; *atque etiam in eâdem est ratione* ΚΑ *ad* ΑΔ, hoc est ΒΓ. *Hoc autem fit ob similitudinem triangulorum* ΛΒΚ, ΛΓΔ, ΔΑΚ. *Proinde* ΑΒ *erit ad* ΛΓ *sicut* ΛΓ *ad* ΚΑ *ac* ΚΑ *ad* ΒΓ; quare ΛΓ, ΚΑ sunt duæ mediæ proportionales inter ΑΒ, ΒΓ. Q. E. D.

PROPO-

(per [illegible] hujus) Minima erit, adeoque recta ΚΘ (per 25^{am} hujus) non eſt Minima: ſed recta Minima per Κ ducta cadet propius centro Ε quam recta ΚΔ. Q. E. D.

PROPOSITIO LIV.

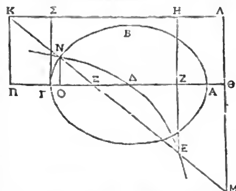
SI capiatur punctum quodvis extra dimidium Ellipſeos ab Axe majore diviſæ, à quo demiſſa normalis ſuper centrum cadat; ac ſit ratio hujus normalis una cum ſemiaxe minore ſimul ſumptæ ad ſemiaxem minorem, minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum: non poteſt exire ab hoc puncto, ad alterutrum Quadrantem Ellipſeos, niſi una ſola recta, cujus portio intercepta inter Axem majorem & ſectionem ſit Minima: *è nullà vero reliquarum ad idem latus eductarum abſcindi poteſt* Minima. *Sed ſi propior fuerit Vertici ſectionis quam* Minima *illa,* Minima *ab ejuſdem extremitate ducta remotior erit à Vertice; è contra vero, ſi remotior à Vertice fuerit,* Minima *ab extremitate ejus educta cadet Vertici propius.*



Sit ΒΑΓ ſemi-ellipſis, Axe majore ΒΓ; & detur extra illam punctum aliquod Δ, à quo normalis cadat ſuper centrum; ut ΔΕ cadens ſuper centrum Sectionis Ε, ad angulos rectos Axi ΓΒ: ſitque ratio ΔΑ ad ΑΕ minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Dico quod ad eundem ſectionis quadrantem non niſi una recta duci poſſit de puncto Δ, cujus portio inter Curvam ΒΑΓ & Axem ΒΓ intercepta ſit aliqua è Minimis. In reliquis vero de puncto Δ eductis; ſi ab extremitatibus earum quæ Vertici Β propiores ſunt, agantur Minimæ,

*S**jore bisectæ, à quo demissa normalis non cadat super centrum: Duci poterit ab eodem recta occurrens alteri semissi Axis majoris in quem non cadit normalis, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem majorem sit* Minima; *nec ab eodem puncto duci potest alia recta occurrens eidem reliquo semiaxi, è qua abscindatur* Minima.

Sit ΑΒΓ Ellipsis, Axe majore ΑΓ ac centro Δ; & sit datum punctum Ε, è quo demittatur Axi ΑΓ normalis ΕΖ; nec sit centrum in puncto Ζ. Dico quod duci possit ex Ε recta occurrens ipsi ΔΓ, ita ut inter sectionem ΑΒΓ & semiaxem ΔΓ intercipiatur Minima. Fiat ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum; atque etiam in eadem ratione fiat ΔΘ ad ΘΖ: ac per Η ipsi ΑΓ parallela ducatur ΚΛ, uti per Θ ipsi ΕΖ parallela recta ΜΘΛ: dein per datum punctum Ε, Asymptotis ΜΛ, ΛΚ (per 4^{tam} secundi) describatur Hyperbola. Sit Hyperbola illa ΕΝ, occurrens Ellipsi in puncto Ν, jungaturque ΝΞΕ. Dico ΝΞ Minimam esse.



Producatur ΕΝ ad occursum utriusque Asymptoti ΜΛ, ΛΚ; conveniat autem iis in punctis Μ, Κ, ac demittantur ad ΑΓ normales ΝΟ, ΚΠ: & erit (per 8^{vam} secundi) ΜΕ ipsi ΚΝ æqualis; adeoque ΖΘ ipsi ΠΟ æqualis est. Est autem ΕΗ ad ΗΖ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ut ΕΗ est ad ΗΖ ita ΖΠ ad ΠΞ; adeoque ΖΠ est ad ΠΞ ut diameter transversa ad latus rectum. Sed ΔΘ est ad ΘΖ in eadem ratione diametri transversæ ad latus rectum; quare ΖΠ est ad ΠΞ ut ΔΘ ad ΘΖ. Recta vero ΘΖ ipsi ΠΟ æqualis est, uti ΔΘ utrisque ΠΟ, ΔΖ simul sumptis. Auferendo igitur ab ipsa ΖΠ utrasque ΖΔ, ΠΟ, & ab ipsa ΠΞ rectam ΠΟ, erit residuum ΔΟ ad residuum ΟΞ ut totum ΠΖ ad totum ΠΞ; hoc est ut diameter transversa ad latus rectum. Verum ΝΟ normalis est, & Δ est sectionis centrum; ergo (per 10^{am} hujus) recta ΝΞ Minima est. Q. E. D.

PROPO-

E centro Sectionis E ducatur EN ipsi ΔZ parallela, occurrens rectæ BHΔ in puncto N; ac jungatur NΘ. Quoniam vero BH Minima est, occurrens Minimæ per centrum Sectionis ductæ in puncto N, intra angulum HZΔ; portio rectæ NΘ inter Axem & Sectionem intercepta non erit Minima; sed Minima de puncto Θ ducta (per 46^{am} hujus) propior erit Vertici Γ; ac proinde recta ΘΞ *à Vertice adhuc remotior* (per 25^{am} hujus) non erit Minima. Pari modo demonstrabitur rectam KΠ non esse Minimam, Minimamque per punctum K ductam longius à Vertice Γ cum Axe concurrere quam KΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII.

Dato quovis puncto extra ambitum Sectionis posito, quod nec sit in Axe ejus, neque in eodem producto: possumus educere ex eo rectam, cujus intercepta inter Sectionem & Axem sit Minima.

Sit autem sectio imprimis Parabola, ut AB; & sit Axis productus ΓZ: detur vero extra sectionem & ad latus Axis punctum Δ. Dico quod è puncto Δ egredi potest recta, cujus portio intercepta inter sectionem & Axem ejus Minima sit.

Demittatur normalis ΔE ad Axem ΓZ, & fiat EZ dimidium lateris recti; sitque ZH normalis in ipsam ZΓ. Dein per punctum Δ, Asymptotis HZ, ZΓ describatur Hyperbola AΔΘ, quæ occurrat Parabolæ in puncto A. Jungatur ΔA, ac producatur ad H, Γ: *Dico* AΓ *Minimam esse.*

Ex A demittatur ad ΓZ cathetus AK; cumque ΔH (per 8^{vam} secundi) ipsi AΓ æqualis est; erit quoque recta ZE ipsi KΓ æqualis. Sed ZE dimidium est lateris recti; adeoque & KΓ æqualis est dimidio lateris recti. Est autem KA normalis, ac proinde (per 8^{vam} hujus) recta AΓ Minima est. Q. E. D.

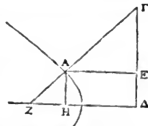




Quoniam vero recta ME (per 8^{vam} secundi) æqualis est ipsi ΛA; erit quoque KΘ ipsi OΛ, ac proinde OK ipsi ΘA æqualis, cui etiam æqualis est NH. Est autem ZΔ ad ΘA sive NH, ut ZE ad EΘ; hoc est ut ZΓ ad ΓH: *quare alternando* ZΔ *est ad* ZΓ *sicut* NH *ad* HΓ. Ac componendo in Hyperbola, vel dividendo in Ellipsi erit ΔΓ ad ΓN sicut ZΓ ad ΓH; quare per conversionem rationis in Ellipsi, vel dividendo in Hyperbola, ΓN erit ad NΔ, sicut ΓH ad HZ, hoc est, ut diameter transversa ad latus rectum. Verum AN normalis est in Axem BΔ, adeoque (per 9^{am} & 10^{am} hujus) AΔ Minima est. Pari modo demonstrabitur, si cadat normalis ZE ad alteram partem verticis B.

PROPOSITIO LX.

Quod si in Hyperbola normalis, à puncto Γ extra sectionem dato demissa, cadat super centrum, ut ΓΔ. Fiat ΓE ad EΔ sicut diameter transversa ad latus rectum, & ducatur AE Axi ΔZ parallela, & producatur ad occursum sectionis in A. Jungatur ΓA conveniens Axi in Z. Dico AZ Minimam esse.



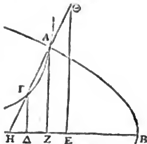
De puncto A ducatur ad Axem normalis AH. Quoniam vero ΓE est ad EΔ sicut diameter transversa ad latus rectum; ΓA ad AZ erit in eadem ratione. Sed ut ΓA ad AZ ita ΔH ad HZ: quare ΔH est ad HZ ut diameter transversa ad latus rectum. Est autem AH normalis in Axem; adeoque (per nonam hujus) AZ Minima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI.

At vero si normalis de puncto dato demissa cadat ab altera parte, sive ultra centrum Hyperbolæ ad modum rectæ ΓΔ. Sit E centrum Hyperbolæ, ac fiat EZ ad ZΔ sicut diameter transversa ad latus rectum, ac in eadem ratione fiat ΓH ad HΔ; & ducatur HΘ Axi ΔE parallela, ut & ZK, EM ipsi ΓΔ parallelæ. Per punctum E Asymptotis ΘK, KZ describatur Hyperbola quæ occurret sectioni AB.

Occurrat

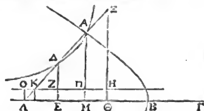
ambitum Sectionis. Dico possibile esse ducere per punctum Γ rectam Minimam.

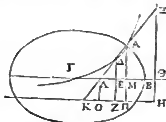


De puncto Γ demittatur ad Axem normalis ΓΔ, & sit ΔE dimidium lateris recti: ipsi autem BH per E erigatur ad angulos rectos recta EΘ; & per punctum Γ Asymptotis ΘE, EH describatur Hyperbola AΓ, quæ quidem occurret Parabolæ: occurrat autem in puncto A, ac juncta recta AΓ producatur ad H, Θ. Dico rectam AH esse Minimam. Demittatur normalis AZ: cumque ΓH (per 8^{vam} secundi) ipsi ΘA æqualis est, erit ΔH ipsi EZ æqualis; *ac proinde* EΔ *ipsi* ZH *æqualis.* Sed EΔ est dimidium lateris recti, adeoque & ZH dimidium est lateris recti. Quocirca AH (per 8^{vam} hujus) Minima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIII.

Si vero Sectio AB fuerit Hyperbola vel Ellipsis, Axe BA ac centro Γ: ac detur punctum aliquod Δ, in situ superius descripto. Dico quod possumus ducere per punctum Δ Minimam.





Demittatur enim normalis ΔE; ac fiat ΓΘ ad ΘE, ut & ΔZ ad ZE, sicut diameter transversa ad latus rectum; & per punctum Z ducatur HK Axi BΓ parallela,

ipsi

Q. E. D.

PROPOSITIO LXIV.

SI detur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo recta ad Sectionis Verticem ducta contineat cum Axe angulum acutum; impossibile autem sit ut ducatur è puncto illo recta aliqua cujus portio inter Axem & Sectionem intercepta sit Minima; *vel* in Ellipsi, *si una tantum fuerit recta, ex dato puncto exeuns ad partes Sectionis contrarias illis ad quas jacet datum punctum, è qua abscindat Axis* Minimam: *erit recta, quæ de puncto illo ad Verticem Sectionis ducitur,* Minima *omnium ad illam Sectionis partem ab eodem ducendarum, atque huic propior minor erit remotiore.*

Sit autem imprimis sectio Parabola ut ABΓ, Axe AE; sitque datum punctum Z infra Axem, ita ut angulus ZAE, qui continetur à rectâ per punctum illud ad Verticem sectionis ductâ & Axe AE, acutus fuerit. Primum autem non sit possibile, ut ducatur ad sectionem recta aliqua cujus portio inter Curvam & Axem intercepta sit Minima. Dico quod Minima omnium, quæ duci possint ad sectionem AΓ de puncto Z, est ipsa AZ; quodque eidem propiores ductæ minores sunt remotioribus. Hoc autem manifestum erit ex eo quod, rectis quibuslibet è puncto Z eductis & ad sectionem continuatis, ab earundem extremitatibus non duci possint rectæ Minimæ, quæ non occurrant Axi remotius à Vertice A quam ipsæ rectæ è puncto Z eductæ.

Demonstrabitur autem hoc modo. Demittatur normalis ZE; ac recta AE vel erit æqualis semilateri recto, vel major eo vel minor. Sit autem imprimis æqualis ei vel minor eo; ac è cunctis rectis per Z ad sectionem ductis, non erit ulla cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima est; sed Minimæ, ab earundem in Sectione extremitatibus ad Axem ductæ, cadent versus partes ab A remotiores quam rectæ quæ ex Z prodeunt, juxta 49^{am} hujus.

Si vero AE major fuerit semilatere recto, sit EΘ dimidium lateris recti; ac sit ΘH duplum ipsius AH; & ad punctum H ipsi AE normalis sit HB: ac fiat EA ad HB sicut ΘH ad ΘE. Erit autem ZE vel æqualis ipsi EA, vel minor eâ, vel major. At non erit æqualis ipsi EA, quia (per 51^{am} hujus) si ZE fuerit ipsi EA æqualis, duci possit una recta de puncto Z è quâ abscinderetur Minima: ZE igitur non erit ipsi EA æqualis. Pari modi constabit EZ minorem esse non posse quam recta EA. Nam

(per

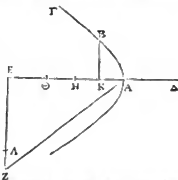
Ducantur rectæ ZB, ZΓ; ac primum si fieri possit, sit AZ ipsi BZ æqualis, & ad A tangat sectionem recta AK; & erit (per 17um primi) AK Axi AE normalis, quia ordinatim ad Axem applicatis parallela est; unde angulus ZAK obtusus est. Ductâ autem ipsi AZ normali ut AN, cadet ea intra sectionem, quia (per 32^{dam} primi) impossibile est ducere inter Tangentem & Sectionem rectam aliquam. Ducatur etiam per punctum B Tangens Sectionis BΞ, ac Minima de puncto B ad Axem ducta remotior erit à puncto A quam BZ, per nuper demonstrata; comprehendit autem Minima (per 27^{mam} hujus) cum Tangente BΞ angulum rectum, adeoque angulus ZBΞ acutus erit. Ac si centro Z radio BZ describatur arcus circuli, occurret ille Tangenti BΞ; recta vero NA erit tota extra illum, quia angulus ZBΞ acutus est, angulus vero ZAN rectus. Quare si fit circulus ille curva BΞOA, necesse est ut occurrat sectioni; sitque punctum occursus O. Jungatur OZ, ac tangat sectionem recta OΠ cadens necessariò extra circulum. Cum autem Minima de puncto O ad Axem ducta remotior est à Vertice A quam recta OZ, ac Minima illa cum Tangente OΠ (per 27um hujus) comprehendit angulum rectum: angulus igitur ZOΠ acutus erit; ac proinde recta OΠ circulo occurrere debet. Eadem autem cadit extra illum. Hoc autem absurdum est, adeoque AZ non est ipsi BZ æqualis.

Si vero fieri possit, sit AZ major quam ZB; ac centro Z radio ZB describatur circulus, qui quidem occurret ipsi AZ: portio autem aliqua Tangentis BΞ erit intra circulum, per nuper demonstrata: occurret igitur circulus sectioni necessariò, quia rectæ AZ occurrit. Sit circulus ille Bγσ, ac jungatur Zγ; ducaturque per punctum γ sectionis Tangens γP, quæ quidem cadet intra circulum; quia Minima inter punctum γ & Axem intercepta cadit versus partes remotiores à puncto A quam recta γZ: unde angulus ZγP acutus est. Recta itaque γP occurrere debet circulo. Manifestum autem est debere eandem totam extra reperiri: quod absurdum. Recta igitur AZ non est major quam BZ, neque eidem æqualis; est ergo minor eâ.

Dico quoque rectas ipsi AZ propiores remotioribus minores esse. Producatur enim Tangens ΞB ad Σ; cumque recta BΞ tangit sectionem in puncto B, & angulus ZBΞ acutus est, erit angulus deinceps, nempe ZBΣ, obtusus; & per B ipsi BZ normalis fit BM; quæ proinde cadet intra sectionem. De puncto Γ ducatur sectionis

sit Minima. Dico rectam AZ minorem esse quavis alia ad sectionem de puncto Z ducendâ; ductisque rectis quibusvis ex eodem Z ad sectionem, propiorem ipsi AZ minorem esse remotiore ab eadem.

Hoc autem manifestum erit, si recta quælibet Minima, à quovis in sectione ABΓ puncto ad Axem AE ducta, cadat versus partes remotiores à Vertice A quam quæ jungit punctum illud & Z. Demittatur ad Axem de puncto Z normalis ZE, & AE vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel erit major eo, vel minor. Si vero eidem vel æqualis fuerit vel minor eo, ac rectæ de puncto Z ad sectionem ABΓ egrediantur; quæ ab earundem extremitatibus ducuntur ad Axem Minimæ (per 45^am^ hujus) remotiores erunt ipsis à Vertice A. Si vero AE major fuerit dimidio lateris recti, fiat ΔΘ ad ΘE sicut diameter transversa ad latus rectum: ac inter ipsas ΘΔ, ΔA capiantur duæ mediæ proportionales ΔH, ΔK; & de puncto K ipsi AE normalis erigatur KB; & fiat EA ad KB in ratione rectanguli sub ΔE, ΘK ad rectangulum sub ΔK, ΘE. Dico quod ZE major esse debet quam recta EA. Nam si possibile sit ut non sit major eâ, ponamus imprimis eas æquales esse: ac (per 52^dam^ hujus) demonstratum est rectam unam duci posse de puncto Z è qua abscindat Axis Minimam. Cum autem hoc non ita se habeat, recta EZ non æqualis erit ipsi EA. Per eandem etiam probatur rectam ZE non minorem esse quam EA, quia si minor fuerit eâ, non impossibile esset ducere de puncto Z duas rectas, quarum portiones inter Sectionem & Axem interceptæ forent Minimæ: recta igitur ZE major erit quam EA. Verum (per 52^dam^ hujus) demonstratum est quod, si ZE major fuerit quam EA, non duci possit e puncto Z recta aliqua è qua abscindat Axis Minimam; quodque Minimæ, à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductæ, longius distent à Vertice A quam ipsæ prodeuntes. Quapropter rectis quibuscunque de puncto Z ad sectionem ductis, Minimæ ab earundem extremitatibus ad Axem emissæ remotiores erunt ipsis à puncto A: adeoque iisdem argumentis, quibus in præcedente propositione rem demonstravimus in Parabolâ, manifestum erit rectam AZ minorem esse quavis aliâ per punctum Z ad sectionem ABΓ ductâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore.



PROPO-

ratione rectanguli sub ΔΕ, ΘΗ ad rectangulum sub ΔΗ, ΘΕ; ac ΖΕ vel æqualis erit ipsi ΕΛ, vel major erit eâ, vel minor. Si vero ΕΖ ipsi ΕΛ æqualis fuerit, una quidem recta duci potest (per 52dam hujus) de Ζ ad sectionem ΑΣ, è qua abscindat Axis Minimam. Sed aliter fieri oportet; *adeoque* ΕΖ *non est rectæ* ΕΛ *æqualis*. Neque ΕΖ minor esse potest quam ΕΛ, tum enim duci poterunt duæ rectæ è quibus (*per eandem*) abscinderentur Minimæ. Quapropter ΕΖ major esse debet quam ΕΛ; quo in casu nulla recta duci potest de puncto Ζ ad sectionem ΑΣ, cujus portio intercepta sit Minima: ac si ducatur à tali puncto Ζ ad sectionem recta quælibet, Minima inter ejusdem extremitatem & Axem interjecta (per 52dam hujus) longius aberit à Vertice Α quam ipsa recta de Ζ educta.

Jam si quovis modo Minimæ, à quolibet sectionis ΑΣ puncto ad Axem eductæ, remotiores fuerint à Vertice Α quam rectæ de sumpto puncto Ζ prodeuntes; pari quo in Parabola argumento, probabitur ΑΖ minorem esse quavis aliâ de Ζ ad sectionem ΑΣ ducendâ, eidemque propiorem minorem esse remotiore. Demonstratio enim una eademque est in omnibus tribus sectionibus, quoties in data sectione rectæ Minimæ, de punctis ejus ad Axem ductæ, occurrunt eidem Axi remotius à Vertice quam rectæ jungentes hæc puncta & sumptum Ζ.

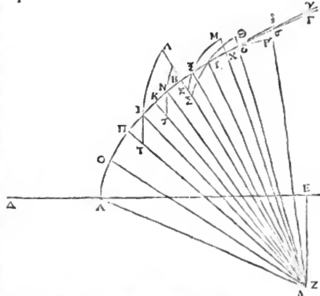
PROPOSITIO LXVII.

SIT jam sectio ΑΒΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΔΕ; & detur punctum infra Axem ut Ζ; sitque angulus ΖΑΕ acutus: possibile autem sit ut prodeat de puncto Ζ una sola recta cujus portio intercepta sit Minima. Dico quod, etiam hoc in casu, ΑΖ minor est quavis alia recta de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ eductâ, quodque eidem propior minor est remotiore.

De Ζ ad Axem demittatur normalis ΖΕ; ac dico quod, rectâ quavis de puncto Ζ ad sectionem ΑΒΓ egrediente, Minima ab ejusdem extremitate ad Axem ducta longius aberit à Vertice Α quam ipsa egressa, si unam solam excipias: adeoque ΑΕ in Parabola vel Hyperbola major erit dimidio lateris recti. Nam si non major fuerit eo, impossibile esset ducere de puncto Ζ rectam aliquam e qua interciperetur Minima, uti constat ex 49na & 52da hujus. Est itaque ΑΕ major semilatere

 recto.

Sit jam ZB unica illa recta per Z ad sectionem ABΓ ducta, è qua abscindit Axis Minimam; ac ducantur ad sectionem inter A & B duæ aliæ, ut ZO, ZΠ; &, eodem modo quo demonstravimus Propositionem LXIV^{tam} hujus, constabit AZ Minimam esse è rectis de puncto Z ad sectionem ductis. Prodeuntibusq; ad sectionem rectis quibusvis ZO, ZΠ, inter puncta A & B; quæ eidem AZ vicinior est minor erit remotiore.



Dico quoque quod ZΠ minor est quam ZB. Nam si non sit minor eâ, primum sit æqualis ei, ac ducatur inter eas recta ZK; erit igitur ZK major quam ZΠ, per nuper demonstrata: quare in ZK capiatur recta major quam ZB, minor vero quam ZK, ut ZΥ; & centro Z, radio ZΥ describatur circulus occurrens rectæ ZK in Υ, sectioni autem ad N inter K & B, ad modum circuli NΥ; & jungatur ZN. Est autem recta KZ ipsi AZ propior quam ZN; recta igitur ZK minor est quam ZN, *hoc est quam* ZΥ, quod absurdum est: quare absurda est positio ZK majorem esse quam ZB; adeoque ZΠ, ZB non sunt æquales.

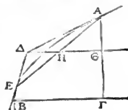
Ponamus jam, si fieri possit, ZΠ majorem esse quam ZB; ac capiatur recta aliqua in ZΠ quæ major sit quam ZB, minor vero quam ZΠ, ut ZT; & centro Z, radio ZT describatur circulus occurrens rectæ ZΠ, sectioni vero necessariò inter Π & B. Occurrat autem iis ad modum arcus TIΛ, & jungatur ZI; ideoque recta ZΠ minor erit quam ZI, quia propior est ipsi AZ quam ZI. Sed ZI ipsi ZT æqualis est, adeoque ZΠ minor est quam ZT, quod absurdum. Recta igitur ZΠ non est major quam ZB; neque eidem æqualis, per nuper demonstrata: ac proinde minor est ea. Constat itaque rectas omnes de puncto Z ad sectionem inter A, B ductas minores esse quam ZB.

Ducantur

PROPOSITIO LXVIII.

SI duæ rectæ Sectionem Conicam contingant; erit intercepta inter punctum concursûs earundem, & punctum contactûs in Tangente Vertici Sectionis propiore, minor interceptâ in Tangente à Vertice remotiore.

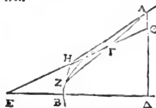
Sit Sectio A B imprimis Parabola, cujus Axis B Γ: & Sectionem tangant duæ rectæ A Δ, Δ E. Dico Δ E minorem esse quam Δ A.



Junge rectam A E; & per Δ, ipsi B Γ parallela, ducatur Δ H: ideoque (per 30^{mam} secundi) A H æqualis erit ipsi E H. De puncto A demittatur normalis ad Axem ut A Γ, & erit angulus A Θ Δ rectus; ac proinde angulus A H Δ obtusus. Est verò Δ H utrique triangulo A Δ H, E Δ H communis; ac duo latera A H, H Δ æqualia sunt duobus lateribus E H, H Δ: angulus autem E H Δ minor est angulo A H Δ: Basis igitur Δ E minor est basi A Δ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIX.

SIT jam Sectio Hyperbola ut A B, cujus Axis Δ E, centrum E: sintque duæ Tangentes Z H, H A. Dico quod Z H minor est quam H A.



Junge H E, quæ producatur in directum; jungatur etiam A Γ Z, occurrens ipsi H E in Γ: ideoque A Γ (per 30^{mam} secundi) æqualis erit ipsi Γ Z. Demittatur normalis A Δ, & producatur E Γ ad Θ; &, ob angulum A Δ E rectum, angulus A Θ E major eo obtusus erit; unde & angulus A Γ H obtusus: ac propterea H Γ Z eidem deinceps minor erit eo, utpote acutus. Sed recta A Γ ipsi Γ Z æqualis est, & H Γ utrique triangulo A Γ H, H Γ Z communis: Basis igitur Z H minor est Basi H A. Q. E. D.

ΛΔ (per 30^mam^ primi) ipsi ΔΟ æqualis. Cumque ΛΕ ipsi ΕΗ æqualis est, ac ΔΕ super ΛΗ normalis, erit ΛΔ ipsi ΔΗ æqualis. Sed ΛΔ ipsi ΔΟ est æqualis: quare etiam ΗΔ, ΔΟ sunt æquales; junctaque ΗΟ ipsi ΕΓ parallela erit. Demittatur normalis ΟΠ, quæ proinde ipsi ΗΕ parallela & æqualis erit. Sed ΗΕ major est quam ΘΤ; unde & ΟΠ major est quam ΘΤ, ac recta ΔΘ propior est Axi majori ΔΓ quam ΔΟ: quocirca ΔΘ (per 11^mam^ hujus) major est quam ΔΟ, hoc est quam ΔΗ. Est autem ΘΚ (per 30^mam^ secundi) ipsi ΚΗ æqualis. Unde, ob ΔΚ communem, angulus ΔΚΘ major est angulo ΗΚΔ; ac proinde angulus ΤΚΗ major erit angulo ΤΚΘ. Latera vero duo ΗΚ, ΚΤ æqualia sunt duobus ΤΚ, ΚΘ: Basis igitur ΗΤ major erit Basi ΤΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII.

Si sumatur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo possibile sit educere duas rectas, ita ut in utrâque portio intercepta inter Sectionem & Axem sit Minima: *erit ea, quæ ex his duabus Vertici Sectionis propius adjacet, omnium rectarum, de sumpto puncto ad eam Sectionis partem quæ interjacet Verticem & rectam alteram ductarum,* Maxima: *è cæteris vero ad eandem partem ductis, quæ* Maximæ *utrinque propior est major erit remotiore: altera vero recta minor erit cæteris omnibus ab eodem puncto ad reliquam istius partis Sectionem, sive ad ejusdem lateris complementum: quæque eidem propior est, è rectis ad reliquam Sectionem ductis, minor erit remotiore.*

Sit Sectio ΑΒΓ, cujus Axis ΓΕ; sub quo sumptum est punctum Δ: ac sint ΔΑ, ΔΒ, rectæ duæ ad sectionem ductæ, è quibus abscindit Axis Minimas. Dico quod ΔΒ major est omnibus rectis è puncto Δ ad sectionis partem ΑΒΓ ducendis; quodque

rectæ

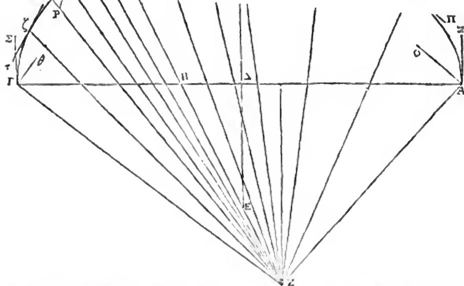
... angulus autem ΞΜΔ obtusus est, quia Minima de puncto Μ ad Axem ΓΕ ducta (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) propinquior est Vertici Γ quam recta ΜΔ. Cum autem angulus ΞΒΔ rectus est, ac angulus ΞΜΔ obtusus, erunt quadrata ex ΞΒ & ΒΔ simul sumpta majora quadratis ex ΞΜ, ΜΔ. Sed (per 68^{vam} & 69^{nam} hujus) ΒΞ minor est quam ΞΜ, quare ΒΔ major est quam ΔΜ. Pari modo demonstrabitur rectam ΜΔ majorem esse quam ΔΝ, quia angulus ΘΜΔ acutus est; ac ductâ ΝΘ sectionis Tangente, erit angulus ΘΝΔ obtusus. Similiter probabitur rectam ΝΔ majorem esse quam ΔΑ. Recta igitur ΒΔ Maxima est è rectis de puncto Δ ad partem sectionis ΑΓ ductis, eidemque propior major est remotiore. Quod vero ΔΑ minor est quavis rectâ de puncto Δ ad reliquam sectionem ΑΧ ductâ, eodem argumento constabit quo usi sumus in demonstrandâ 64ta hujus. Pariterque patebit rectam ipsi ΑΔ propiorem, inter eas quæ prodeunt è puncto Δ ad sectionem ΑΧ, majorem esse remotiore ab eadem.

PROPOSITIO LXXIII.

SI capiatur punctum infra majorem Ellipseos Axem, quod non sit in Axe minore producto; ac inter rectas è puncto illo ad Sectionem ducendas non sit nisi una sola è qua abscindat Axis Minimam: *erit hæc recta major quâvis aliâ; eidemque propior major erit remotiore*: Minima *vero quæ duci possit de puncto illo ad eandem semi-ellipsin, ad quam ducitur* Maxima, *erit recta jungens punctum datum & Sectionis Verticem puncto illi viciniorem.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis ΑΓ & centrum Δ; & ad Δ erigatur Axi normalis ΒΔΕ: sumatur etiam sub Axe punctum Ζ, è quo non nisi una sola recta ad sectionem ΑΒΓ duci potest, cujus portio intercepta sit Minima. Hæc igitur recta, è qua abscinditur Minima, talis esse debet, ut præter eam non alia duci possit ad sectionem de puncto sumpto. Semper autem possibile est unam rectam ducere de puncto Ζ, cujus intercepta sit Minima, quæque occurrat alteri semi-axi, sive semissi illi

O Axis



mus, constabit rectam A Z non majorem esse quam Z K, neque eidem æqualem: adeoque A Z minor est quam Z K. Similiter cum Π K X tangit sectionem, angulus X K Z obtusus erit; ac K Υ, ipsi K Z ad angulos rectos, cadet intra sectionem; quia (per 32^{dam} primi) nulla recta duci potest quæ cadat inter sectionem & Tangentem. Agatur jam per punctum A sectionis Tangens ξ A Τ, & Minima per A ducta remotior erit à Vertice A quam A Z; unde, juxta demonstrata in 64ta hujus, recta Z K minor erit quam Z A. Ac si jungatur Z B & per B ducatur Tangens sectionis γ B δ, ob angulum γ B Δ rectum erit angulus γ B Z acutus; adeoque A Z (juxta eandem 64^{tam}) minor erit quam Z B.

Dico quoque Z B minorem esse quam Z M. Sectionem tangat recta δ M σ ad punctum M. Quoniam vero A B Γ Ellipsis est, atque transit normalis B Δ E per centrum sectionis Δ, ac B δ, δ M sunt duæ Tangentes; erit B δ major quam δ M (per 70^{mam} hujus). Quadrata autem ex δ B, B Z simul minora erunt quadratis ex δ M, M Z simul,

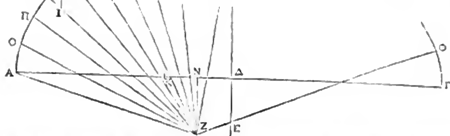
media aliqua ut ZΗ: recta igitur ZΗ major erit quam Zι, ac proinde major quam ZΘ. Fiat igitur Zι major quam ZΘ, minor vero quam ZΗ; ac centro Z, radio Zι describatur circulus ικυ occurrens sectioni inter Θ & ι. Occurrat autem ad κ: adeoque juncta Zκ major erit quam ZΗ, utpote remotior à ZΓ. Eadem autem æqualis est ipsi Zι: quare Zι major est quam ZΗ. Posuimus autem eam minorem esse: quod absurdum. Recta igitur Zι minor est quam ZΘ. Quapropter ZΘ major est quavis aliâ de puncto Z ad sectionem ΑΒΓ ducendâ, eidemque propior major est remotiore. Recta vero ZΓ Minima est rectarum de puncto Z ad sectionis partem ΓΘ ductarum, *uti* ZΑ *Minima est ductarum ad alteram ejus partem* ΑΘ; atque ZΓ major est quam ZΑ: igitur ZΑ minor est quavis recta quæ de puncto Z ad totam sectionem ΑΒΓ duci potest, quemadmodum ZΘ earundem Maxima est. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXIV.

SI detur punctum sub Axe majore Ellipseos, de quo possibile sit duas tantum rectas, è quibus abscindat Axis Minimas, *ad oppositam sectionem ducere: erit* Maxima *rectarum, de puncto illo ad latus istud Sectionis ducendarum, altera ex duabus illis quæ occurrit Axi minori; eidemque ab utroque latere propior major erit remotiore: earundem vero* Minima *erit ea quæ à dato puncto ad Verticem Sectionis propiorem ducitur.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ, & sit punctum datum Z sub Axe majore; de centro vero sectionis Δ erigatur Axi normalis ΒΔΕ: ac possibile sit de puncto Z duas tantum rectas ducere, quarum portiones inter sectionem ΑΒΓ & Axem interceptæ sint Minimæ. Ponamus autem has rectas de Z ductas esse ZΗ, ZΘ; neque duci posse aliam præter has duas à qua abscindatur Minima. Dico rectam ZΘ, quæ occurrit Axi minori, majorem esse qualibet aliâ de Z ad sectionem ΑΒΓ ducendâ; eidemque ZΘ ab utroque latere propiorem majorem esse remotiore: rectam vero ZΑ minorem esse quavis aliâ.

De puncto Z demittatur normalis ZΝ, ac manifestum est ZΝ non cadere posse



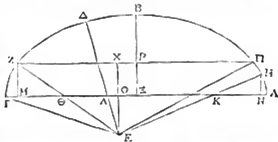
Jam si duci possit, de Z ad sectionem AB, una tantum recta è qua abscindatur Minima; erunt Minimæ, à terminis cæterarum ad sectionem AB ductarum emissæ, remotiores à Vertice A quam ipsæ rectæ de Z ductæ. Ducantur igitur per Z rectæ ZA, ZO, ZΠ; ac, modo in demonstrandis Propositionibus $72^{dæ}$ & $73^{tiæ}$ usitato, manifestum erit rectam ZA minorem esse quam ZO, ac ZO quam ZΠ. Dico quoque quod ZΠ minor est quam ZH. Nam si non sit minor ea, sit major ea, vel æqualis ei. Imprimis autem sit æqualis ei, & ducatur inter eas alia recta ZT quæ major erit quam ZΠ, *utpote remotior ab* AZ: cumque ZΠ ipsi ZH æqualis est, erit ZT major quam ZH. Capiatur in ZT recta aliqua minor quam ZT, major vero quam ZH, ut ZI; ac centro Z, radio ZI describatur circulus IΛM; qui necessario occurret sectioni TH. Occurrat autem in Λ, & jungatur ZΛ, quæ, cum remotior sit ab AZ, major erit quam ZT. Verum ZΛ ipsi ZI æqualis est, quare ZI major erit quam ZT. sed eadem minor est, quod absurdum: *adeoque* ZΠ *ipsi* ZH *non est æqualis.* Parique argumento constabit ZH non esse minorem quam ZΠ; ac proinde major erit ea. Quapropter ZH major est quavis recta de Z ad sectionis partem AH ducibili; eidemque propior major est remotiore: earundem vero Minima est ZA.

Simili autem methodo, qua rem demonstravimus in rectis inter A & H ductis, probabitur ipsam ZB majorem esse quavis recta inter H & B ab eodem puncto Z ducendâ; eidemque propiorem majorem esse remotiore. Dico quoque quod ZH minor est quavis recta inter H, B ducta. Ducatur enim alia ut ZP; ac, si fieri possit ut non sit major quam ZH, sit æqualis ei, vel minor eâ. Sit autem primo æqualis ei, & inter ipsas ZH, ZP ducatur intermedia ut ZΞ; quæ proinde minor erit quam ZP: adeoque minor quam ZH. Fiat ZΣ major quam ZΞ, minor vero quam ZH;

ac

teris vero, inter mediam trium & Sectionis Verticem puncto dato viciniorem interjectis, Maxima *erit illa quæ Vertici puncto dato adjacenti adjacet, eidemque utrinque propior* major erit remotiore; ex his autem duabus Maximis, major *erit ea, quæ ducitur ad partes contrarias iis ad quas situm est punctum datum.*

Sit ΑΒΓ Ellipsis, cujus Axis major ΑΓ & centrum Ξ; & sit ΒΞ normalis super Axem ad centrum sectionis, sub quo sit punctum datum Ε: ducantur autem ex eodem tres rectæ è quibus abscindat Axis Minimas, ut ΕΗ, ΕΖ, ΕΔ; quarum duæ, ut ΕΖ, ΕΔ, erunt ad easdem partes ad quas situm est Ε; tertia vero ΕΗ ad contrarias. Dico ΕΗ Maximam esse rectarum de puncto Ε ad totam sectionem ΑΒΓ ductarum; eidemque utrinque propiorem, è rectis ad sectionis partem inter Δ & Α ductis, majorem esse remotiore.

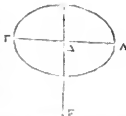


Quoniam enim rectæ ΔΛ, ΖΘ sunt Minimæ, constabit, eo quo in Parabola demonstravimus modo (Prop. 72da hujus) quod recta ΕΖ Maxima est ex iis quæ de puncto Ε ad sectionis partem ΓΔ duci possint; quodque eidem propior major est remotiore. Pariter cum ΔΛ & ΗΚ sunt Minimæ, eodem modo ac in Propositione præcedente, probabitur rectam ΕΗ majorem esse quavis rectâ de puncto Ε ad partem ΑΔ ductâ.

Dico quoque quod ΕΗ major est quam ΕΖ. De punctis Ζ, Η, Ε demittantur normales ΖΜ, ΗΝ, ΕΟ; & ΜΞ erit ad ΜΘ (per 15^am hujus) sicut diameter transversa ad latus rectum: ac (per eandem) ΝΞ erit ad ΝΚ sicut diameter transversa ad latus rectum: quare ΞΜ erit ad ΜΘ sicut ΞΝ ad ΝΚ. Ratio autem ΟΜ ad ΜΘ minor est ratione ΞΜ ad ΜΘ, ac proinde ratio ΟΜ ad ΜΘ minor est ratione ΞΝ ad ΝΚ;

P ac

cere, cujus portio intercepta sit Minima, præter ipsam BΔ. Dico EB Maximam esse rectarum quæ de puncto E ad sectionem duci possunt.

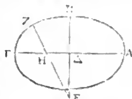


Nam si non duci possit de puncto E ad sectionem BΓ recta aliqua è qua abscindatur Minima; rectæ Minimæ, ab extremitatibus rectarum de puncto E eductarum (per 53^{am} hujus) remotiores erunt à Vertice Γ quam ipsæ eductæ. Ductis autem Tangentibus, eo quo demonstrata est Prop. 72da modo, constabit EB majorem esse quàvis aliâ rectâ de puncto E ad sectionem ductâ; eidemque propiorem majorem esse remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVII.

SI normalis ad Axem majorem Ellipseos demissa cadat super centrum Sectionis; possibile autem sit ad quadrantem alterutrum Sectionis ducere rectam aliquam è qua abscindat Axis Minimam: *erit recta hæc* Maxima *omnium de puncto dato ad eundem quadrantem ductarum, eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipsis, cujus Axis major AΓ, ac centrum Δ; sit autem E punctum infra Axem AΓ datum, unde demissa normalis EΔ: ac possibile sit ab E ad sectionis quadrantem ΓB educere rectam aliam è qua abscindatur Minima, puta EHZ. Dico EZ majorem esse quavis alia de puncto E ad ΓB ducenda, eidemque ab utraque parte propiorem majorem esse remotiore.



Quoniam enim BΔ, ZH sunt duæ Minimæ, quæ productæ conveniunt in E; rectæ Minimæ prodeuntes è punctis quibusvis sectionis inter Γ & Z (per 46^{am} hujus) occurrent Axi remotius à Vertice Γ quam rectæ connectentes eadem puncta & E, Minimæ vero de punctis sectionis inter B & Z ductæ (per eandem 46^{tam}) propiores erunt Vertici Γ quam rectæ de puncto dato E ad eadem in sectione puncta prodeuntes. Quibus positis, ad modum demonstrationis Prop. 72^{dæ}, ope Tangentium, probabitur rectam EZ majorem esse quàvis alia de puncto E ad sectionem BΓ ducta, eidemque propiorem majorem esse remotiore. Q. E. D.

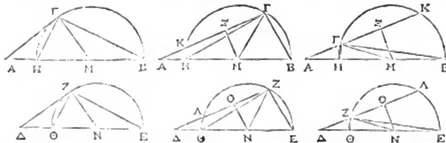
ΠΑΠΠΟΥ

… τετράγωνον, ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Ε Δ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ Ζ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ.

ΓΕΓΡΑΦΘΩ γὰρ ἐπὶ τῶν Η Β, Ε Θ ἡμικύκλια, ἐλεύσονται δὴ καὶ διὰ τῶν Γ, Ζ. ἐφάπτονται δὴ ἤτοι αἱ Η Γ Β, Ε Ζ Θ· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ Α Γ, Δ Ζ τῶν ἡμικυκλίων, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερὸν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ τρίγωνα. ἐὰν γὰρ ληφθῇ τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ ἐπιζευχθῶσι αἱ Μ Γ, Ν Ζ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ

ratione quam habet rectangulum Ε Δ Θ ad quadratum ex Δ Ζ. Dico triangulum Α Β Γ simile esse triangulo Δ Ε Ζ.

DIAMETRIS Η Β, Ε Θ describantur semicirculi, quæ proinde transibunt per puncta Γ, Ζ; atque sint semicirculi Β Γ Η, Ε Ζ Θ, quos vel tangunt rectæ Α Γ, Δ Ζ, vel non. Si vero tangant, manifestum est similia esse triangula Α Β Γ, Δ Ε Ζ. Nam si capiantur centra Μ, Ν ac jungantur Μ Γ, Ν Ζ, erunt anguli Μ Γ Α, Ν Ζ Δ recti.



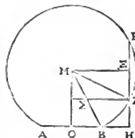
ὑπὸ Μ Γ Α, Ν Ζ Δ γωνίαι. καὶ εἰσὶν αἱ Α, Δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ Α Μ Γ ἄρα τῇ ὑπὸ Δ Ν Ζ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· ἡ Β ἄρα γωνία τῇ Ε ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτωσαν τὰ ἡμικύκλια κατά τινα σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ Μ Ξ, Ν Ο· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν Κ Ξ τῇ Ξ Γ, ἡ δὲ Λ Ο τῇ Ο Ζ. ὅμοιον δὲ τὸ Α Μ Ξ τῷ Δ Ν Ο τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ξ Α πρὸς Α Μ οὕτως ἡ Ο Δ πρὸς Δ Ν. ἐπειδὴ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Β Α Η πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Δ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Κ Α Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ, τουτέστιν ὡς ἡ Κ Α

& anguli Α, Δ sunt æquales: angulus igitur Α Μ Γ angulo Δ Ν Ζ æqualis est, unde & eorundem semisses, nempe anguli Α Β Γ, Δ Ε Ζ sunt æquales. Sed anguli ad Α & Δ sunt æquales: quocirca triangula sunt similia.

Sed non tangant, sed occurrant semicirculis in punctis Κ, Λ, ac ducantur normales Μ Ξ, Ν Ο: est igitur Κ Ξ ipsi Ξ Γ æqualis, ut & Λ Ο ipsi Ο Ζ. Simile autem est triangulum Α Μ Ξ triangulo Δ Ν Ο, adeoque Ξ Α est ad Α Μ sicut Ο Δ ad Δ Ν. Cum vero rectangulum Β Α Η est ad quadratum ex Α Γ sicut rectangulum Ε Δ Θ ad quadratum ex Δ Ζ, erit etiam rectangulum Κ Α Γ ad quadratum ex Α Γ, sive Κ Α

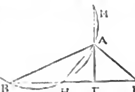
guli O, P recti sunt: quare & anguli MBO, NΔP sunt æquales. Ipsis AB, ΓΔ parallelæ ducantur ZΣ, KT ac jungantur MZ, NK: angulus igitur MΣZ angulo NTK æquatur. Quoniam vero EH est ad HZ sicut ΘΛ ad ΛK, erit ΞH ad HZ sicut ΠΛ ad ΛK; erit quoque HΞ ad ΞZ, hoc est MB sive ZM ad MΣ, sicut ΛΠ ad ΠK, hoc est ΔN sive NK ad NT. Anguli autem MΣZ, NTK sunt æquales, anguli vero MZΣ, NKT acuti: proinde angulus ΣMZ angulo TNK æqualis est; adeoque circumferentia BZ circumferentiæ ΔK similis. Q. E. D.



LEMMA III.

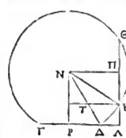
Sint duo triangula rectangula ABΓ, ΔEZ rectos angulos habentia Γ, Z; ac ducantur sub æqualibus angulis BAH, EΔΘ rectæ AH, ΔΘ: sit autem ut rectangulum sub BΓH ad quadratum ex AΓ, ita rectangulum EZΘ ad quadratum ex ZΔ. Dico triangulum ABΓ simile esse triangulo ΔEZ.

Circa triangula ABH, ΔEΘ describantur segmenta circulorum BHA, ΔΘE, quæ proinde similia sunt. Tangent autem segmenta rectæ AΓ, ΔZ, vel non: primum vero tangant; ac proinde rectangulum BΓH æquale erit quadrato ex AΓ; hoc est, si ipsi AH ducatur normalis AK, rectangulo HΓK: rectangulum autem EZΘ æquale erit quadrato ex ΔZ, hoc est rectangulo ΘZΛ,



:

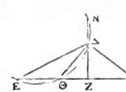
... αἱ O, P· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ MBO γωνία τῇ ὑπὸ NΔP γωνίᾳ. Ἤχθωσαν τῇ AB, ΓΔ παράλληλοι αἱ ZΣ, KT, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ MZ, NK· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ MΣZ γωνία τῇ ὑπὸ NTK γωνίᾳ. ἐπειδὴ ἐστὶν ὡς ἡ EH πρὸς HZ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛK· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞH πρὸς HZ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΠΛ πρὸς ΛK· ὥστε καὶ ἡ HΞ πρὸς ΞZ, τουτέστιν ἡ MB ἤτοι ZM πρὸς MΣ, οὕτως ἡ ΛΠ πρὸς ΠK, τουτέστιν ἡ ΔN ἤτοι NK πρὸς NT. καί εἰσιν αἱ μὲν ὑπὸ MΣZ, NTK ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ MZΣ, NKT ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΣMZ γωνία τῇ ὑπὸ TNK· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ BZ περιφέρεια τῇ ΔK περιφερείᾳ.



ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἔστω δύο ὀρθογώνια τὰ ABΓ, ΔEZ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ, Z γωνίας· καὶ διήχθωσαν αἱ AH, ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ BAH, EΔΘ· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν BΓH πρὸς τὸ ἀπὸ AΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν EZΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ZΔ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Γεγράφθω γὰρ περὶ τὰ ABH, ΔEΘ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ BHA, ΔΘE· ὅμοια ἄρα ἐστίν. ἤτοι ἐφάπτονται αἱ AΓ, ΔZ τῶν τμημάτων, ἢ οὔ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ BΓH τῷ ἀπὸ AΓ, τουτέστιν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ AH τὴν AK, τῷ ὑπὸ τῆς HΓK· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν EZΘ τῷ ἀπὸ ΔZ, τουτέστιν, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω ΔΛ τῇ ΔΘ, τῷ ὑπὸ



ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἤχθωσαν τῇ ΑΚ, ΔΛ παράλληλοι αἱ ΓΜ, ΖΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΔ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Μ, Ν γωνίαι ταῖς ὑπὸ ΒΑΚ, ΕΔΛ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

ΛΗΜΜΑ δʹ.

Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΒΗ, ΕΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ, ΔΘΕ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ. δεικτέον ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ Κ, Λ. φανερὸν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Η, Θ σημείων εἰσίν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ μὲν Κ μεταξὺ τῶν Γ, Η σημείων, τὸ δὲ Λ μεταξὺ τῶν Δ, Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΗ, ΕΘ ἐπὶ τὰ Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΞ. πιπτέτω ἄρα μεταξὺ τῶν Η, Β, ἀμβλεῖά τε γίνεται ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία, καί ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΔΘΕ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΕ γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΝ. ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΝ κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξὺ τῶν Θ, Ν. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΛΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΕ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΝΟ τῆς ΘΕ, πολλῷ ἄρα ἡ ΝΘ τῆς ΘΕ ἐστὶ μείζων· καὶ τὸ ὑπὸ ΝΘΕ, τουτέστι τὸ ΔΘΖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ

ad ZΛ ipsis AK, ΔΛ parallelæ ducantur ΓM, ZN; ac fiet BM ad MA sicut EN ad NΔ. anguli autem ad puncta Γ, Z sunt recti, & anguli ad puncta M, N æquales sunt angulis BAK, EΔΛ. Quapropter ex præmissis constabit triangulum ABΓ triangulo ΔEZ simile esse.

LEMMA IV.

Sint duo triangula rectos angulos habentia ad puncta B, E, ac ducantur BH, EΘ sub æqualibus angulis AHB, ΔΘE: sit autem rectangulum AHΓ ad quadratum ex HB sicut rectangulum ΔΘZ ad quadratum ex ΘE. demonstrandum est triangulum ABΓ triangulo ΔEZ simile esse.

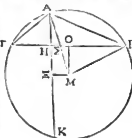
Circumscribantur circuli quorum capiantur centra K, Λ. ac manifestum est centra esse ad easdem partes punctorum H, Θ. nam si fieri possit sit K inter puncta Γ, H, centrum vero Λ inter Δ & Θ, ac producantur BH, EΘ ad puncta M, N, & de puncto K demittatur cathetus KΞ super ipsam MB cadat autem inter puncta H, B; & erit angulus AHB obtusus, cui æqualis est angulus ΔΘE: unde angulus ΔΘE est etiam obtusus, adeoque angulus ΔΘN acutus. hinc normalis à puncto Λ in EN demissa cadet inter puncta Θ, N. cadat, sitque ea recta ΛO: est igitur NO ipsi OE æqualis, ac proinde NO major erit quam ΘE, ac NΘ multo major quam ΘE; unde rectangulum NΘE sive ΔΘZ majus erit quadrato ex

Ac manifesta est hujus conversa: nempe, si triangulum Α Β Γ triangulo Δ Ε Ζ fuerit simile, atque etiam triangulum Η Β Γ triangulo Θ Ε Ζ; fieri rectangulum Α Η Γ ad quadratum ex Η Β sicut rectangulum Δ Θ Ζ ad quadratum ex Θ Ε, ob similitudinem triangulorum.

LEMMA V.

Sint duo triangula Α Β Γ, Δ Ε Ζ æquales habentia angulos ad Α, Δ, non autem rectos; ac ducantur catheti Α Η, Δ Θ; habeat autem rectangulum Β Η Γ ad quadratum ex Α Η eandem rationem quam habet rectangulum Ε Θ Ζ ad quadratum ex Δ Θ: ac sint Β Η, Ε Θ segmenta majora rectarum Β Γ, Ε Ζ. dico triangulum Α Β Η simile esse triangulo Δ Ε Θ, reliquumque reliquo.

Circumscribantur circuli, ac producantur normales Α Η, Δ Θ ad puncta Κ, Λ; sintque circulorum centra Μ, Ν: à quibus ad ipsas Α Κ, Β Γ; Δ Λ, Ε Ζ demittantur catheti Μ Ξ, Μ Ο; Ν Π, Ν Ρ. & eodem quo præcedentia constabit modo, quod Κ Η est ad Η Α sicut Λ Θ ad Θ Δ, quodque Α Ξ est ad Ξ Η sicut Δ Π ad Π Θ. junge Α Μ, Δ Ν, & erit ut Α Ξ ad Ξ Η ita Α Μ ad Μ Σ, utque Δ Π ad Π Θ ita Δ Ν ad Ν Τ; adeoque Α Μ est ad Μ Σ sicut Δ Ν ad Ν Τ. Connectantur etiam Β Μ, Ε Ν. quoniam vero segmentum Β Α Γ simile est segmento Ε Δ Ζ, reliquum segmentum Β Κ Γ reliquo segmento Ε Λ Ζ simile est. quæ igitur in illis insunt anguli sunt inter se æquales, ac proinde anguli Β Μ Ο, Ε Ν Ρ sunt æquales, in primo casu. In secundo vero manifestum est angulum Β Μ Ο angulo Ε Ν Ρ æqualem esse, quia sunt in segmentis æ-

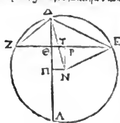


Φανερὸν δὲ καὶ τούτου ἀντίστροφον, τό, ἐὰν ᾖ ὅμοιον τὸ μὲν Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ, τὸ δὲ Η Β Γ τῷ Θ Ε Ζ, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ Α Η Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Η Β οὕτως τὸ ὑπὸ Δ Θ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων.

ΛΗΜΜΑ έ.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, μὴ ὀρθὰς δέ· καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Α Η, Δ Θ· καὶ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Β Η Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α Η, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Ε Θ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ Θ· καὶ ἔστω τῶν Β Γ, Ε Ζ εὐθειῶν μείζονα τμήματα Β Η, Ε Θ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν Α Β Η τρίγωνον τῷ Δ Ε Θ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ.

Περιγεγράφθωσαν κύκλοι καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ, Λ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Μ, Ν. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰς ΑΚ, ΒΓ· ΔΛ, ΕΖ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ, ΜΟ· ΝΠ, ΝΡ. ἔσται δὴ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς προγεγραμμένοις, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· ὥστε καὶ ὡς ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ. ἐπιζευχθωσαν αἱ ΑΜ, ΔΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· καὶ ὡς ἄρα ΑΜ πρὸς ΜΣ οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ Β Μ, Ε Ν. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ Β Α Γ τμῆμα τῷ Ε Δ Ζ τμήματι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ Β Κ Γ τμῆμα λοιπῷ τῷ Ε Λ Ζ τμήματι ὅμοιόν ἐστι· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἴσαι εἰσίν, καὶ εἰσιν αὐτῶν κατὰ μίαν ἴσαι αἱ ὑπὸ τῶν Β Μ Ο, Ε Ν Ρ ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἐπὶ τῆς προτέρας δηλαδὴ τῶν πτώσεων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐκ παρασκευῆς δηλονότι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν Β Μ Ο γωνία τῇ ὑπὸ τῶν Ε Ν Ρ, καὶ γὰρ αἱ ἐν ἴσοις



Β Α Γ,

ΔΘΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. καί εἰσιν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, ΕΛΖ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ ΚΗ, ΛΘ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΚΗ τρίγωνον τῷ ΕΛΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΓΚΗ τῷ ΖΛΘ. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ὅλῳ τῷ ΔΕΖ ἐστὶν ὅμοιον.

ΛΗΜΜΑ ϛ'.

Θέσει δεδομένων τῶν ΑΒ, ΑΓ εὐθειῶν, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν ΔΕ, καὶ ποιεῖν δοθείσῃ τὴν ΔΕ.

ΓΕΓΟΝΕΤΩ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστί. καί ἐστι δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ. διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΔΕ. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΖ. ἀλλὰ καὶ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ. διὰ δὲ δεδομένου τοῦ Ζ παρὰ θέσει τῇ ΑΒ ἦκται ἡ ΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ, θέσει δὲ ἡ ΑΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δεδομέναι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ Η, παρ' ἣν δὲ ἀγαγεῖν δεῖ ἔστω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ Η ἴση κείσθω ἡ ΑΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΖ ἤχθω ἡ ΕΔ. λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ τῇ Η ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ δοθείσῃ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ Η τῇ δοθείσῃ· ἡ ΔΕ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερὸν ὅτι μόνη, ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τοῦ Α τῆς ἀπώτερον ἐστιν ἐλάσσων.

est ut ΑΘ ad ΘΔ; erit igitur quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΚ ficut quadratum ex ΔΘ ad quadratum ex ΘΛ. fed rectangulum ΒΗΓ est ad quadratum ex ΑΗ ficut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ: ex æquo igitur rectangulum fub ΒΗΓ erit ad quadratum ex ΗΚ ficut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΛ. æquales autem funt anguli obtufi ΒΚΓ, ΕΛΖ, ac normales funt ΚΗ, ΛΘ; unde per jam dicta fimile erit triangulum ΒΚΗ triangulo ΕΛΘ, triangulumque ΓΚΗ triangulo ΖΛΘ. Quapropter triangulum ΑΒΗ triangulo ΔΕΘ fimile eft, uti triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ: adeoque totum ΑΒΓ toti ΔΕΖ fimile eft.

LEMMA VI.

Datis duabus rectis ΑΒ, ΑΓ, ducere rectam ΔΕ pofitione datæ parallelam, quæ magnitudine datæ æqualis fit.

PUTA factum, & per Α ipfi ΔΕ parallela ducatur ΑΖ; ΑΖ igitur pofitione datæ parallela eft: datum autem punctum Α, adeoque ΑΖ pofitione datur. per Ε ipfi ΑΒ parallela ducatur ΕΖ: æqualis eft igitur ΑΖ ipfi ΔΕ, ac data eft ΔΕ, quare ΑΖ etiam data eft. fed & pofitione datur, & datum eft punctum Α; unde punctum Ζ quoque datur. per datum autem punctum Ζ pofitione datæ ΑΒ parallela ducta eft recta ΖΕ; datur igitur pofitione ΖΕ. ac datur pofitione recta ΑΓ: datum eft igitur punctum Ε, ac per ipfum ducta eft ΔΕ pofitione datæ parallela: datur itaque pofitione recta ΔΕ.

Componetur autem problema hoc modo. fint rectæ duæ pofitione datæ ΑΒ, ΑΓ, magnitudine autem data fit recta Η; ac fit ΑΖ ea cui parallela ducenda eft. ipfi Η æqualis fiat ΑΖ, & per Ζ ipfi ΑΒ parallela ducatur ΖΕ; per Ε autem ipfi ΑΖ parallela ducatur ΕΔ. dico rectam ΕΔ fatisfacere problemati. quoniam enim ΔΕ æqualis eft ipfi ΑΖ, ac ΑΖ rectæ datæ Η facta eft æqualis; recta igitur ΔΕ folvit problema. ac manifeftum eft quod ea fola rem præftat, femper enim puncto Α propior minor eft remotiore.

gulum ABH triangulo ΔΕΘ simile erit; & triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ, *totumque toti.*

PRODUCATUR ΑΗ, ac fiat ut ΔΘ ad ΘΕ ita ΓΗ ad ΗΚ, ac jungantur ΒΚ, ΚΓ: est igitur angulus ΔΕΘ angulo ΓΚΗ æqualis. quoniam vero ΒΗ est ad ΗΓ sicut ΕΘ ad ΘΖ, facta autem est ΓΗ ad ΗΚ sicut ΔΘ ad ΘΕ; erit ex æquo perturbate ut ΒΗ ad ΗΚ ita ΔΘ ad ΘΖ; & sunt circa angulos æquales: angulus igitur ΒΚΗ angulo ad Ζ æqualis est. demonstratum autem est angulum ΓΚΗ angulo ad Ε æqualem esse, ac anguli duo ad Ζ & Ε æquales sunt recto: adeoque angulus ΒΚΓ rectus est. sed ex hypothesi angulus ΒΑΓ rectus est: unde puncta Α, Β, Γ, Κ sunt in circulo; ac proinde angulus ΑΚΓ, hoc est ΔΕΖ, angulo ΑΒΓ æqualis est. ex hypothesi autem angulus ΑΗΒ angulo ΔΘΕ æqualis est: simile igitur est triangulum ΑΒΗ triangulo ΔΕΘ, pariterque triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ simile est, *totumque toti.*

ὅμοιον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, [τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ, καὶ ὅλον ὅλῳ.]

ΕΚΒΕΒΛΗΣΘΩ ἡ ΑΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ τῇ ὑπὸ ΓΚΗ γωνίᾳ. ἐπειδὴ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΗ γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΗ γωνία ἴση τῇ Ε, καί εἰσιν αἱ Ε, Ζ ὀρθῇ ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ γωνία ἐστὶν ὀρθή. ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὀρθή· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ, Κ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καθ' ὑπόθεσιν ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΘΕ γωνίᾳ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ ἐστὶν ὅμοιον, [καὶ ὅλον ὅλῳ.]

Aliter & melius.

BISECENTUR in punctis Κ, Λ rectæ ΒΓ, ΕΖ, ac jungantur ΑΚ, ΔΛ. jam quoniam ΒΗ est ad ΗΓ sicut ΕΘ ad ΘΖ, componendo ac dimidiando antecedentes, deinde per conversionem rationis, fiet ΓΚ sive ΑΚ ad ΚΗ sicut ΛΖ sive ΔΛ ad ΛΘ. anguli autem ad puncta Η, Θ sunt æquales, & uterque angulus ΚΑΗ, ΛΔΘ acutus est: angulus igitur ΑΚΗ angulo ΔΛΘ est æqualis; eorundemque semisses, nempe anguli ad Β & Ε, sunt æquales. sed angulus ad Η angulo ad Θ æqualis est: simile est igitur triangulum ΑΒΗ triangulo ΔΕΘ. pari argumento triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ simile est, ac totum toti. Q. E. D.

Ἄλλως καὶ ἄμεινον.

ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ δίχα τοῖς Κ, Λ σημείοις αἱ ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΔΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, συνθέντι, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων, καὶ ἀναστρέψαντι γίνεται ὡς ἡ ΓΚ τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΛΖ, τουτέστιν ἡ ΔΛ πρὸς ΛΘ, καί εἰσιν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς Η, Θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΚΑΗ, ΛΔΘ ἑκατέρα ἄρα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΘ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Η γωνία τῇ Θ ἴση ἐστίν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, καὶ ὅλον ὅλῳ.

APOL-

ut & alia nonnulla prætermiſſa ab iis qui nos præceſſerunt. Nam ſpecialiter in hoc libro invenies quomodo Sectio Sectioni datæ æqualis in dato Cono recto ſit ſecanda: & quomodo deſignandus ſit Conus rectus Cono dato ſimilis qui contineat datam Sectionem Conicam. Quæ quidem uberius aliquanto ac dilucidius tractavimus quam qui ante nos his de rebus ſcripſerunt. Vale.

DEFINITIONES.

I. Sectiones Conicæ dicantur *æquales*, ſi applicari poſſit altera ſuper alteram; ita ut ubique conveniant, nec occurrant inter ſe. *Inæquales* autem ſunto quæ non ita ſe habent.

II. *Similes* vero dicantur Sectiones, in quibus, ductis ad utriuſque Axem ordinatim applicatis, ipſæ ordinatim applicatæ ad portiones Axis ab iiſdem abſciſſas Verticique conterminas fuerint reſpectivè proportionales: diviſo ſcilicet utroque Axe in partes numero æquales, vel eandem inter ſe rationem ſervantes. *Diſſimiles* vero ſint Sectiones, quibus modo dicta non competunt.

III. Recta ſubtendens ſegmentum aliquod circumferentiæ Circuli vel Sectionis Conicæ, *Baſis* Segmenti vocetur.

IV. Recta autem quæ occurrens rectis Baſi ſegmenti parallelis eas omnes bifariam dividit, dicatur ſegmenti *Diameter*.

V. Dicatur etiam punctum in Sectione per quod ducitur Diameter, ſegmenti *Vertex*.

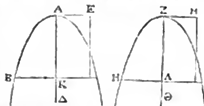
VI. Segmenta vocentur *æqualia*, ſi, Baſibus æqualibus exiſtentibus, fieri poſſit ut unum ſuper alterum ita applicetur ut nuſquam occurrant inter ſe, ſed utrobique congruant. *Inæqualia* vero ſint, quæ aliter ſe habent.

PROPOSITIO I.

SI in duabus Parabolis latera recta fuerint æqualia, erunt ipſæ Sectiones æquales. Ac ſi fuerint Sectiones æquales, erunt quoque earundem latera recta æqualia.

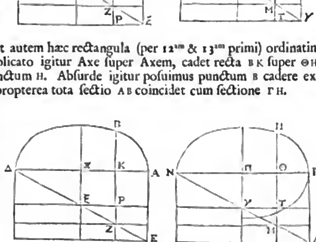
Sint duæ Parabolæ quarum Axes A Δ, Z Θ: ſintque earundem latera recta A E, Z M æqualia. Dico ipſas ſectiones eſſe æquales.

Nam ſi applicetur Axis A Δ ſuper Axem Z Θ, ſectio coincidet cum ſectione & cum eadem ubique congruet. Si enim fieri poſſit ut non congruant, ſit pars aliqua ſectionis A B quæ non congruat cum Z H, & capiatur punctum quoddam B, in parte cum ipſâ Z H non congruente, à quo demittatur normalis ad Axem B K, ac compleatur parallelogrammum rectangulum K E: &, factâ Z A ipſi A K æquali, erigatur normalis ad Axem recta H A, ac compleatur parallelogrammum rectangulum A M. Quoniam vero latera K A, A E æqualia ſunt lateribus A Z, Z M, utraque inter ſe congruent, ac proinde rectangulum K E æquale erit rectangulo A M. Sed recta K B poteſt rectangulum K E (per 11^{mam} primi) ac (per eandem) A H poterit rectangulum A M; adeoque ipſæ K B, A H ſunt æquales. Poſito igitur Axe ſuper Axem, ita ut coincidat recta A K cum A Z, recta B K cadet ſuper A H, punctumque B ſuper punctum H. Poſuimus autem non debere coincidere punctum B cum ſectione Z H: quod abſurdum. Unde patet fieri non poſſe ut ſectio ſectioni non ſit æqualis.



Porro ſi ſectio fuerit æqualis ſectioni, capiatur A K ipſi Z A æqualis, & è punctis K, A erigantur normales B K, H A; ac compleantur rectangula parallelogramma K E, A M. Congruente autem ſectione A B cum ſectione Z H, Axis quoque A K cum Axe Z A congruet; aliter enim Parabola Z H duos haberet Axes, quod fieri non poteſt: coincidet igitur punctum K cum puncto A, ob A K, Z A æquales. Cadente autem puncto B ſuper H, erit recta B K ipſi A H æqualis; ac proinde (per 11^{mam} primi) rectangula K E, A M æqualia erunt. Sed A K ipſi Z A facta eſt æqualis. Latus igitur rectum A E Lateri recto Z M æquale eſt. Q. E. D.

PROPO-



gula ΚΕ, ΘΛ æqualia ſunt, ac proinde rectangulum ΑΖ rectangulo ΓΜ æquale erit. Poſſunt autem hæc rectangula (per 12^{am} & 13^{am} primi) ordinatim applicatæ ΒΚ, ΗΘ: applicato igitur Axe ſuper Axem, cadet recta ΒΚ ſuper ΘΗ, ac punctum Β ſuper punctum Η. Abſurde igitur poſuimus punctum Β cadere extra ſectionem ΓΗ: ac propterea tota ſectio ΑΒ coincidet cum ſectione ΓΗ.

Quinetiam ſi fuerint ſectiones æquales; fiant ΑΚ, ΓΘ æquales, ac erigantur normales ΚΒ, ΘΗ, compleanturque parallelogramma rectangula ΔΕ, ΔΖ; ΝΛ, ΝΜ, & applicetur ſectio ΑΒ ſuper ſectionem ΓΗ: cadet igitur Axis ΑΚ ſuper Axem ΓΘ neceſſario. Nam ſi non cadat ſuper eum, in Hyperbola forent duo Axes, & in Ellipſi tres: quod quidem impoſſibile eſt. Cadente autem ΑΚ ſuper ΓΘ quæ eidem æqualis eſt, cadet punctum Κ ſuper Θ: coincidentibuſque rectis ΚΒ, ΘΗ punctum Β cadet ſuper Η; ac proinde ΚΒ, ΘΗ æquales ſunt. Hinc conſequitur (per 12^{am} & 13^{am} primi) rectangula ΑΖ, ΓΜ æqualia eſſe. Sed ΑΚ ipſi ΓΘ æqualis eſt, adeoque ΚΖ ipſi ΘΜ. Simili modo, ſi ponatur ΑΞ ipſi ΓΠ æqualis, demonſtrabitur Ξξ ipſi Πγ æqualem eſſe; quare & ΡΖ ipſi ΜΤ & Ρξ ipſi Τγ æquales erunt: unde & rectangula Ζξ, Μγ æqualia & ſimilia, ac (*per* 24^{am} VI. *Elem.*) rectangula ΔΖ, ΝΜ erunt quoque ſimilia. Sed ΚΖ, ΘΜ ſunt æquales; quare etiam ΔΚ, ΘΝ ſunt æquales: & ob æquales ΑΚ, ΓΘ, ipſæ quoque ΑΔ, ΓΝ erunt æquales. Rectangula autem ΔΕ, ΝΛ ſimilia ſunt, adeoque rectæ ΑΕ, ΓΛ æquales. Quapropter rectangula ΔΕ, ΝΛ ſimilia & æqualia ſunt; quæ quidem ſunt Figuræ æqualium ſectionum ſuper Axes factæ. Q. E. D.

 Similiter

primi) ut quadratum ex ΔZ ad quadratum ex EA: erit igitur MK ad KA ut quadratum ex MH, ad quadratum ex AI. Hoc autem fieri nequit, quia quadratum ex MH est ad quadratum ex IA sicut rectangulum sub ΘM, MK ad rectangulum sub ΘA, AK, per 21^am primi. Parabola igitur Hyperbolæ non est æqualis.

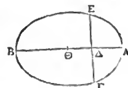




PROPOSITIO IV.

Si in Ellipsi de centro ducatur recta quælibet utrinque ad Sectionem terminata: dividet hæc sectionem in duas partes æquales; itemque Area ejus divisa erit bifariam.

Sit ABΓ Ellipsis, cujus centrum Θ; & per centrum ducatur recta AB, quæ primò sit alter Axium sectionis. Dico applicari posse Curvam AΓB super Curvam AEB, ita ut tota Area AΓB super totam Aream AEB superposita ubique coincidat cum eadem.



Nam, si fieri possit ut non coincidat Curva AΓB cum Curva AEB, capiatur in parte non coincidente punctum Γ; &, demissa ad Axem AB, normalis ΓΔ producatur ad E. Recta igitur ΓΔ cadet super rectam ΔE, ob angulos ad punctum Δ rectos: ΓΔ autem ipsi ΔE æqualis est, atque adeo punctum Γ cadet super punctum E. Absurda est igitur positio punctum illud non cadere in sectione AEB. Curva igitur AΓB cadet super Curvam AEB, ubique coincidens cum eâ, uti superficies AΓB coincidet cum superficie AEB. Quocirca Curva æqualis est Curvæ, & Area Areæ. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

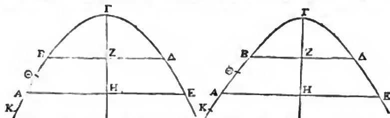
Si vero AB non fuerit alter Axium, sint Axes ΓΔ, KΛ; & demittantur normales AE, BH: & applicatâ Curvâ ΓΛΔ super Curvam ΓZΔ, eo quo factum est modo in Propositione præcedente, cadet punctum Z super punctum A, ac Area AΓE super Aream ΓZE. Similiter KΓΛ cadet super KΔΛ, & EΘ super ΘH; ut & EZ super BH, ob EΘ ipsi ΘH & EZ ipsi BH æquales. Cadet igitur Area ΓEZ super

adeoque ΓZ parallela est rectæ sectionem ΔΓM tangenti in puncto K. Sed & eadem recta Tangens est sectionis ΔΓN; ac proinde (per 7[um] secundi) recta KA diameter est sectionis ΔΓN, dividetque ipsam ΔN bifariam in puncto A. Eadem autem dividit rectam ΔΘ bifariam in puncto A: quod absurdum est. Tota igitur sectio BAH super totam ΔΓN applicata ubique congruit, eidemque æqualis est. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

IN Parabolâ vel Hyperbolâ, si ductæ ad Axem ordinatim applicatæ ad alteram Sectionis partem producantur: abscindentur è Sectione ab utroque Axis latere segmenta, quæ applicatæ congruent inter se; sed quæ neutiquam coincident cum aliâ quâvis Sectionis parte, si eidem imponantur.

Sit ABΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΓH; & capiatur segmentum aliquod sectionis BA; & demittantur ad Axem ΓH ordinatim applicatæ, quæ ad alterum sectionis latus productæ, ut BZΔ, AHE, abscindant è sectione segmenta BΓΔ, AΓE. Dico Curvam BΓ congruere cum Curva ΓΔ, & Curvam BA cum Curva ΔE, itemque Aream AΓH cum Area HΓE, segmentumque ABΓ cum segmento EΔΓ.

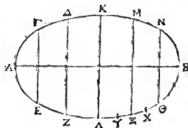


Hoc autem constabit ad modum præcedentium; quia omnes ordinatim applicatæ, à segmento ABΓ ad Axem ΓH ductæ, poterunt rectangula æqualia rectangulis quæ

PROPOSITIO VIII.

SI in Ellipsi demissæ ad Axem normales producantur ad alterum Sectionis latus: segmenta ab utrâque Axis parte abscissa, unum super alterum applicata, congruent inter se. Si vero imponantur super segmenta à normalibus ad easdem à centro distantias, sed ab alterâ ejus parte abscissa: coincident etiam cum iisdem, congruent autem cum nullo alio Sectionis segmento.

Sit ΑΒΓΔ Ellipsis, cujus Axes ΑΒ, ΚΛ, & ad ΑΒ demittantur normales duæ quæ occurrant utrinque sectioni ut ΓΕ, ΔΖ: ducantur etiam in sectione aliæ duæ normales ad easdem à centro distantias ac priores, ut ΜΞ, ΝΘ. Jam si segmentum ΓΔ ipsi ΕΖ superimponatur, congruent inter se, juxta demonstrata in Prop. proxime præcedente. Eodemque modo constabit segmentum ΜΝ cum ipso ΞΘ congruiturum. Area autem ΚΑΛ super aream ΚΒΛ applicata (per quartam hujus) coincidet; ac recta ΓΕ cadet super ipsam ΝΘ, quia eadem est utriusque à centro distantia; cadet etiam ΔΖ super ΜΞ, adeoque cadet segmentum ΓΔ super segmentum ΜΝ; ac proinde congruet ΓΔ cum segmento ΞΘ, quia ΜΝ, ΞΘ congruunt inter se. Idem quoque manifestum est de segmento ΕΖ.

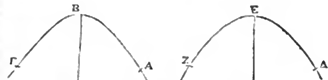


Si vero capiatur in sectione segmentum aliquod aliud præter hæc quatuor, ut ΥΧ. Dico illud congruere non posse cum prædictis segmentis. Nam si fieri possit, coincidat cum segmento ΜΝ; ac, per demonstrata in præcedentibus, invenietur Ellipsis plures quam duos habitura Axes. Hoc autem (per 48[vam] secundi) absurdum est. Quocirca segmentum ΜΝ non congruet cum segmento ΥΧ. Q. E. D.

PROPO-

SI Sectiones fuerint inæquales, fieri non poteſt ut pars aliqua unius congruat cum ulla parte alterius.*

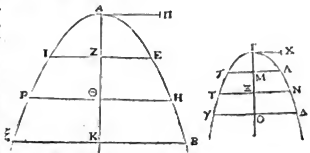
Sint ΑΒΓ, ΔΕΖ ſectiones duæ inæquales. Dico nullam partem unius coincidere poſſe cum parte aliquâ alterius.



Nam, ſi fieri poſſit, congruat pars ΑΒ cum parte ΔΕ; ac tota ſectio ΑΒΓ (per ſextam hujus) congruere deberet cum ipſâ ΔΕΖ: atque adeo ſectio ΑΒΓ æqualis eſſet ſectioni ΔΕΖ. Hoc autem eſt contra hypotheſim. Quapropter non coincidet pars ulla ſectionis ΑΒΓ cum parte aliquâ ipſius ΔΕΖ. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

PArabolæ omnes ſimiles ſunt inter ſe.



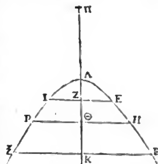
Sint ΑΒ, ΓΔ duæ Parabolæ, quarum Axes ΑΚ, ΓΟ. Dico ſectiones inter ſe ſimiles eſſe.

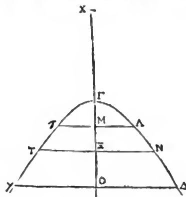
Sint earundem latera recta ΑΠ, ΓΧ, ac fiat ΑΚ ad ad ΑΠ ſicut ΓΟ ad ΓΧ; ac dividatur ΑΚ in punctis Ζ, Θ utcunque, & in iiſdem rationibus dividatur etiam ΓΟ in punctis Μ, Ξ; & ad Axes ΑΚ, ΓΟ erigantur normales ΖΕ, ΘΗ, ΚΒ; ΜΛ, ΝΞ, ΔΟ.

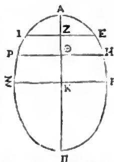
S 2 Quoniam

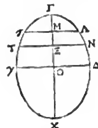
fuerint similes; figuræ super Axes factæ erunt quoque similes.

Sint ΑΒ, ΓΔ duæ Hyperbolæ vel Ellipses, quarum figuræ super Axes factæ sunt similes. Sint autem earum Axes ΑΚ, ΓΟ, diametri vero transversæ ΑΠ, ΓΧ; & capiantur Axium segmenta ΑΚ, ΓΟ, ita ut ΑΚ sit ad ΑΠ sicut ΓΟ ad ΓΧ. Dividatur ΑΚ utcunq; in punctis Ζ, Θ; & in iisdem rationibus quoq; recta ΓΟ in punctis Μ, Ξ: ac per puncta Ζ, Θ, Κ; Μ, Ξ, Ο erigantur super Axes normales ΒΚ, ΘΗ, ΖΕ; ΟΔ, ΞΝ, ΜΛ.





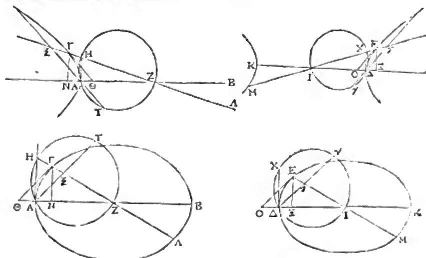




Quoniam autem figuræ sectionum sunt similes, erit (per 21um primi) quadratum ex ΒΚ ad rectangulum sub ΠΚΑ sicut quadratum ex ΔΟ ad rectangulum sub ΧΟΓ. Rectangulum vero sub ΠΚΑ est ad quadratum ex ΚΑ, sicut rectangulum sub ΧΟΓ ad quadratum ex ΟΓ, quia ΠΚ est ad ΚΑ sicut ΧΟ ad ΟΓ. Erit igitur ΒΚ ad ΚΑ sicut ΔΟ ad ΟΓ, & Βξ erit ad ΚΑ sicut Δγ ad ΓΟ. Jam ΚΑ est ad ΑΘ sicut ΟΓ ad ΓΞ, *ac* ΠΑ *est ad* ΑΚ *sicut* ΧΓ *ad* ΓΟ: quare *ex æquo* ΠΑ est ad ΑΘ sicut ΧΓ ad ΓΞ. Constabit igitur per jam demonstrata ΗΡ esse ΑΘ sicut ΝΤ ad ΓΞ: ac pari argumento

S ... metros proper Axes factis, similes inter se, ac ordinatim applicatæ ad has diametros contineant cum ipsis angulos æquales: erunt hæ sectiones inter se similes.

Sint Hyperbolarum vel Ellipsium duarum centra Z, I, diametri vero quævis ΓΛ, EM; sintque anguli quos continent diametri hæ cum ordinatim applicatis suis inter se æquales; Figuræ autem quæ fiunt super diametros ΓΛ, EM sint similes. Dico sectiones illas similes esse.



Ducantur enim è punctis Γ, E rectæ duæ quæ sectiones contingant, ut ΓΘ, EO, quæque proinde parallelæ erunt ordinatim applicatis ad has diametros: adeoque anguli qui fiunt ad puncta Γ, E cum diametris ΓΛ, EM erunt æquales: sint etiam AB, ΔK sectionum Axes, occurrentes Tangentibus in punctis Θ, O. Erit igitur angulus

rum anguli duo ad puncta ξ, τ sunt æquales, sed non recti, quia diametri ΓΛ, EM non sunt Axes sectionum, ac circulorum diametri sunt rectæ HZ, XI: quare (& *per Lemmata priora* Pappi) erit angulus ad Z angulo ad I æqualis. Anguli autem ZΓΘ, IEO sunt æquales, ac propterea triangula ZΓΘ, IEO sunt similia. De punctis Γ, E demittantur ad Axes normales ΓN, EΞ; & erit rectangulum ZNΘ ad quadratum ex ΓN (*per conversas Lemmatum*) ut rectangulum IΞO ad quadratum ex EΞ. Sed (per 37um primi) rectangulum ZNΘ est ad quadratum ex ΓN sicut Axis transversus AB ad latus ejus rectum; & rectangulum IΞO est ad quadratum ex EΞ ut Axis ΔK ad latus ejus rectum. Ipsæ igitur sectiones (per præcedentem 12^{mam}) similes sunt. Oportet autem in Ellipsibus utrumque Axem AB, KΔ esse Axem majorem vel minorem, quia ratio ipsius BA ad latus ejus rectum eadem debet esse cum ratione Axis KΔ ad latus rectum ejusdem KΔ. Perinde autem est si uterque Axis vel major vel minor fuerit. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

Parabola nec Hyperbolæ neque Ellipsi similis est.

Sint duæ sectiones, nempe Parabola AB Axe AH descripta; ac Hyperbola vel Ellipsis, *si fieri possit*, eidem similis, ut ΓΔ. Sit sectionis ΓΔ Axis ΓΛ, ac sit latus transversum figuræ sive diameter transversa MΓ. In utrâque sectione ducantur normales, ut BI, ZN; ΔΞ, KO; & sint rationes earum ad abscissas in uno Axium, eædem ac rationes normalium ad abscissas in altero respectivè; simulque divisus sit uterque Axis in segmenta eandem inter se rationem habentia, nempe sit ZH ad HA ut KΛ ad ΛΓ, ac HA ad AE ut ΛΓ ad ΓΘ, ac AE ad EB sicut ΓΘ ad ΘΔ: erit igitur ZH ad EB sicut KΛ ad ΔΘ, adeoque quadratum ex ZH ad quadratum ex EB ut quadratum ex KΛ ad quadratum ex ΔΘ. Sed quadratum ex ZH est ad quadratum

quadratum

angulum EHK, & ut quadratum ex ΔM ad quadratum ex IZ ita rectangulum ΓMΛ ad rectangulum ΓIΛ: quare rectangulum EKΛ est ad rectangulum EHΛ ut rectangulum ΓMΛ ad rectangulum ΓIΛ. Sed, ex hypothesi, KΛ est ad ΛH sicut MΓ ad ΓI; foret igitur KE ad EH sicut MΛ ad ΛI. Hoc autem absurdum est. Sectio itaque AB non est similis sectioni ΓΔ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

Hyperbolæ oppositæ sunt similes inter se & æquales.

Sint A, B sectiones oppositæ, quarum Axis AB. Dico eas & similes & æquales esse. Quoniam enim latera recta Sectionum A, B (per 14^am primi) sunt æqualia, recta vero AB est latus transversum commune figuræ utriusque sectionis; erunt igitur figuræ, quæ fiunt super eundem Axem AB, inter se similes & æquales: ac proinde sectio A (per 12^mam hujus) similis & æqualis est sectioni B. Q. E. D.

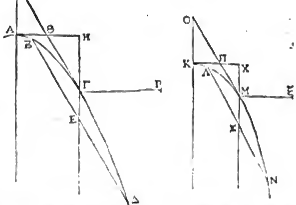


PROPOSITIO XVII.

Ductis ad similes Sectiones Conicas Tangentibus, quæ Axibus occurrentes cum iisdem contineant angulos æquales; eductisque de punctis contactuum diametris sectionum, in quarum utraque capiantur puncta, ita ut interceptæ inter hæc puncta & diametrorum Vertices sint ad ipsas Tangentes in eadem ratione: si per puncta sumpta ducantur rectæ Tangentibus parallelæ, abscindent hæ ab utraque sectione segmenta similia & similiter posita. Ac si segmenta fuerint similia & similiter posita, eædem erunt rationes

 diame-

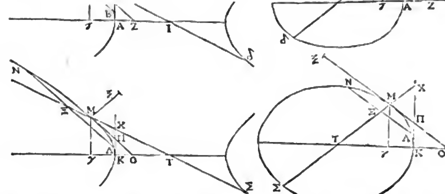
segmenta utriusque diametri, Verticibus Γ, M contermina, in eadem ratione respectivè; anguli autem contenti sub ordinatim applicatis utrique basi parallelis & diametris utriusque segmenti sunt utrobique æquales, ob angulos ad Γ & M æquales. Quapropter segmentum ΒΓΔ simile est segmento ΛΜΝ similiterque situm. Q. E. D.



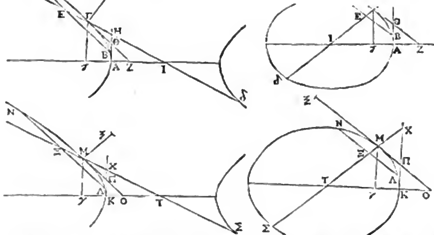
At vero si fuerit segmentum ΔΓΒ in unâ sectionum simile segmento ΝΜΛ in alterâ, ac sint eorundem diametri ΓΕ, ΜΞ, Bases vero ΔΒ, ΛΝ, ac Vertices puncta Γ, Μ, ad quæ tangunt sectiones rectæ ΓΖ, ΜΟ. Dico angulos ΑΖΓ, ΚΟΜ esse æquales, ac ΕΓ esse ad ΓΖ sicut ΞΜ ad ΜΟ.

Maneant rectæ nuper descriptæ. Quoniam vero segmenta sunt similia, erit angulus contentus sub Base ΒΔ & diametro ΓΕ æqualis contento sub ΛΝ & ΜΞ; ac rectæ ΖΓ, ΟΜ parallelæ sunt ipsis ΒΔ, ΛΝ; adeoque anguli ad puncta Γ, Ε; Μ, Ξ sunt æquales. Anguli itaque obtusi ΖΓΕ, ΟΜΞ sunt inter se æquales; unde, ob parallelas, angulus ad punctum Ζ æqualis est angulo ad punctum Ο. Porro quoniam ΔΒ est ad ΕΓ sicut ΝΛ ad ΞΜ, ob similia segmenta; ΔΕ erit ad ΕΓ sicut ΝΞ ad ΞΜ. At vero ΡΓ est ad ΔΕ sicut ΔΕ ad ΕΓ, & ξΜ ad ΝΞ sicut ΞΝ ad ΞΜ, propter Parabolas: *quare* ΡΓ *est ad* ΔΕ *sicut* ξΜ *ad* ΝΞ. *Sed* ΔΕ *ad* ΕΓ *sicut* ΝΞ *ad* ΞΜ; *ex æquo* igitur ΡΓ erit ad ΕΓ sicut ξΜ ad ΜΞ. Jam ΡΓ est ad duplam ipsius ΓΖ (per 49. primi) sicut ΘΓ ad ΓΗ, & ξΜ est ad duplam ipsius ΜΟ ut ΠΜ ad ΜΧ. Sed ΘΓ est ad ΓΗ sicut ΠΜ ad ΜΧ, propter similia triangula ΓΘΗ, ΠΜΧ; quare ΡΓ est ad ΓΖ sicut ξΜ ad ΜΟ. *Cumque* ΡΓ *est ad* ΓΕ *sicut* ξΜ *ad* ΜΞ, *ut jam dictum est*; erit ex æquo ΕΓ ad ΓΖ sicut ΜΞ ad ΜΟ. Anguli autem ΑΖΓ, ΚΟΜ per nuper demonstrata æquales sunt: *ergo constat Propositio.*

PROPO-



ΖΓΙ, ΤΜΟ sunt æquales; quare triangula ΘΓΗ, ΠΜΧ sunt similia, ac ΘΓ est ad ΓΗ sicut ΠΜ ad ΜΧ. Fecimus autem ΡΓ ad duplum ipsius ΓΖ *sicut* ΘΓ *ad* ΓΗ, *&* ξΜ *ad duplum ipsius* ΜΟ sicut ΠΜ ad ΜΧ; erit igitur ΓΡ ad ΓΖ sicut Μξ ad ΜΟ; & (ob similia triangula) ΓΖ est ad ΓΙ sicut ΟΜ ad ΜΤ: quare *ex æquo* ΓΡ est ad ΓΙ sicut Μξ ad ΜΤ, adeoque ΓΡ est ad Γδ sicut Μξ ad ΜΣ. Figuræ igitur contentæ sub ipsis ΓΡ, Γδ, & sub Μξ, ΜΣ sunt similes. Quinetiam cum ΓΡ est ad ΓΖ sicut Μξ ad ΜΟ, & ΓΖ ad ΓΕ ut ΜΟ ad ΜΞ, erit *ex æquo* ΡΓ ad ΓΕ ut Μξ ad ΜΞ. Hoc autem cum ita sit, ac figura contenta sub ΓΡ, Γδ similis sit contentæ sub Μξ, ΜΣ; si jam secetur ΓΕ utcunque, ac per punctum divisionis ducatur recta ipsi ΒΔ basi segmenti parallela, ac dividatur diameter ΜΞ in eadem ratione qua divisa est ΓΕ, ac per punctum divisionis agatur parallela basi segmenti ΛΝ: erunt (per demonstrata in 12mâ hujus) parallelæ diametro ΜΞ occurrentes ad abscissas ex eâdem Vertici Μ conterminas, *in eâdem ratione ac basi* ΒΔ *parallelæ ad portiones ab iisdem in diametro* ΓΕ *abscissas verticique* Γ *conterminas*. Angulus autem quem comprehendit basis ΒΔ cum ΓΕ æqualis est angulo comprehenso sub basi ΛΝ & ipsâ ΜΞ; quia hi anguli æquales sunt æqualibus angulis ad puncta Γ, Μ sub Tangentibus & diametris contentis. Segmenta igitur ΔΓΒ, ΝΜΛ similia sunt & similiter posita. Q. E. D.



Quoniam vero ΡΓ eſt ad Γδ ſicut ξΜ ad ΜΣ; *& rectangulum* δΕΓ *eſt* (per 21^am primi) *ad quadratum ex* ΔΕ *ut* δΓ *ad* ΓΡ, quemadmodum rectangulum ΜΞΣ eſt ad quadratum ex ΝΞ ſicut ΣΜ ad Μξ; *erit rectangulum* δΕΓ *ad quadratum ex* ΔΕ *ſicut rectangulum* ΜΞΣ *ad quadratum ex* ΝΞ. Quadratum autem ex ΔΕ eſt ad quadratum ex ΕΓ ſicut quadratum ex ΝΞ ad quadratum ex ΜΞ; *ex æquo* igitur rectangulum δΕΓ erit ad quadratum ex ΕΓ ſicut rectangulum ΜΞΣ ad quadratum ex ΞΜ; hoc eſt δΕ ad ΕΓ ſicut ΣΞ ad ΞΜ: *& dividendo vel componendo* δΓ *erit ad* ΓΕ *ſicut* ΣΜ *ad* ΜΞ. Ob ſimilia autem triangula ΙΓΖ, ΤΜΟ, ΙΓ erit ad ΓΖ ſicut ΤΜ ad ΜΟ: At vero δΓ, ΣΜ duplæ ſunt ipſarum ΙΓ, ΤΜ; quare δΓ eſt ad ΓΖ ſicut ΣΜ ad ΜΟ; ac proinde ΓΕ eſt ad ΓΖ ſicut ΜΞ ad ΜΟ. anguli autem ad Ζ, Ο ſunt æquales: *ergo conſtat Propoſitio.*

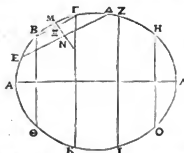
PROPOSITIO XIX.

Ductis ad Axem Parabolæ vel Hyperbolæ normalibus, erunt ſegmenta à duabus quibuſvis normalibus, ab utroque Axis latere abſciſſa, ſimilia & æqualia; ſegmentum autem quodvis aliud ejuſdem ſectionis non erit iiſdem ſimile.

Sit

parte centri ad easdem ab eo distantias ductis, abscissis: positio quoque horum quatuor segmentorum similis erit; neque ullum aliud segmentum ejusdem sectionis his simile esse potest.

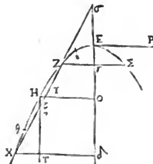
Sit Ellipseos Axis ΑΑ, & ad rectos angulos occurrant Axi rectæ duæ ΒΘ, ΓΚ; ut & ab alterâ parte centri aliæ duæ ad easdem à centro distantias ut ΖΙ, ΗΟ. Dico segmenta ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ esse similia, neque aliud dari segmentum in sectione quod iisdem simile sit.



Quod autem segmenta hæc ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ similia sint ac similiter posita, hinc manifestum est; quia (per 8vam hujus) æqualia sunt, ac applicatæ coincident inter se. Verum quod nullum aliud segmentum his simile sit hoc modo probabitur. Si fieri possit, simile sit iis segmentum ΔΕ, ac jungantur rectæ ΔΕ, ΒΓ; quas productas ad occursum Axis eidem (per 18vam hujus) convenire oportet sub æqualibus angulis. Rectæ igitur ΔΕ, ΓΒ erunt parallelæ; ductâque rectâ ΜΞΝ parallelas has bifariam dividente in punctis Ν, Ξ, erit ΜΞΝ (per 28vam IIdi.) segmentorum diameter. Jam si segmenta ΔΕ, ΓΒ sint similia, foret ΓΒ ad ΞΜ sicut ΔΕ ad ΜΝ. Hoc autem absurdum est: nam si hoc ita sit, transirent rectæ ΜΒ, ΜΓ junctæ & productæ per puncta Ε, Δ. Segmentum igitur ΔΕ non esse potest simile segmento ΓΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

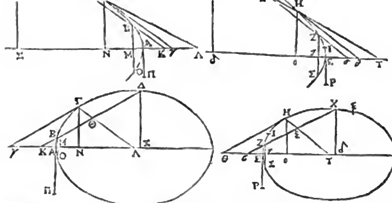
SI ducantur ad Axes duarum Parabolarum normales, ita ut Axium portiones interceptæ Verticibusque conterminæ fuerint in eadem ratione ac latera recta utriusque sectionis: erunt segmenta à normalibus abscissa in unâ sectionum similia segmentis alterius,



guli ad puncta K, σ æquales. Jam propter similia triangula, ΔK est ad KB sicut Xσ ad σZ; ac per conversionem rationis KΔ est ad ΔB sicut Xσ ad XZ. Bisecatur autem BΔ in Θ, uti XZ in ξ; quare KΔ est ad ΔΘ sicut Xσ ad Xξ: ac ΔΞ erit ad ΞΛ sicut Xδ ad δT. Sed ΞΛ æqualis est ipsi ΓN, ac δT ipsi Hο; quare ΔΞ erit ad ΓN sicut Xδ ad Hο, ac (per 20^{mum} primi) ΞΛ erit ad ΛN sicut δE ad Eο; *ac per conversionem rationis* ΞΛ *ad* ΞN *sicut* δE *ad* δο. Demonstravimus autem KΞ esse ad ΞΛ sicut σδ ad δE, unde *ex æquo* KΞ erit ad ΞN sicut σδ ad δο; atque adeo KΔ erit ad ΔI sicut σX ad XT. Verum KΘ est ad ΘΔ ut σξ ad ξX, unde KΘ est ad ΘI sicut σξ ad ξT: ob similia autem triangula IΘΓ, TξH; erit IΘ ad ΘΓ sicut Tξ ad ξH; quare *ex æquo* KΘ erit ad ΘΓ sicut σξ ad ξH. Recta autem ΘK æqualis est Tangenti sectionis ad punctum Γ ad Axem terminatæ, quia eidem ΘK parallela est ac inter duas parallelas. Pariter σξ æqualis erit Tangenti per punctum H ductæ ad Axem: quare Tangens per H ducta est ad Hξ sicut Tangens per Γ ducta est ad ΓΘ. Quod si hoc ita se habeat ac æquales sint anguli quos continent Tangentes hæ cum suis Axibus, manifestum est (per 17^{am} hujus) fore segmenta similia de quorum verticibus Tangentes ducuntur: adeoque segmentum ΔΓB segmento XHZ esse simile.

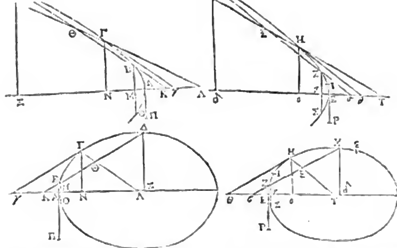
Quinetiam si capiatur aliud segmentum ut θι, quod non intercipiatur à prædictis normalibus. Dico illud non esse simile segmento ΔΓB. Nam segmentum ΔΓB simile est segmento XHZ, & segmentum XHZ (per 19^{am} hujus) non est simile segmento θι, quia non intercipitur ab iisdem normaliter applicatis. Segmentum igitur θι non est simile segmento ΔΓB.

PROPO-



Quoniam autem AM est ad latus rectum AΠ sicut Eτ ad latus rectum EP, ac AΞ est ad AΠ sicut ∂E ad EP; erunt (propter similes sectiones) AM ad MB sicut Eτ ad τZ, & ΞA est ad AM sicut ∂E ad Eτ: unde *ex æquo* ΞA est ad BM sicut ∂E ad τZ. Sed & ΔΞ est ad ΞA sicut X∂ ad ∂E; quare *iterum ex æquo* ΔΞ erit ad BM sicut ∂X ad τZ; ac proinde ΞK ad KM sicut ∂σ ad στ: per conversionem autem rationis KΞ erit ad ΞM sicut ∂σ ad ∂τ. Verum ΞM est ad ΞA ut ∂τ ad ∂E (ob ΞA ad AM sicut ∂E ad Eτ) quare KΞ est ad ΞA ut σ∂ ad ∂E. Est autem ΞA ad ΔΞ sicut E∂ ad ∂X; quare *ex æquo* KΞ est ad ΔΞ sicut σ∂ ad ∂X. Anguli autem ad puncta Ξ, ∂ sunt recti, adeoque triangula KΔΞ, σX∂ sunt similia & anguli ad K, σ æquales. Jam sectionum similium figuræ sunt similes, ac rectæ Γγ, Hθ sunt Tangentes; erit igitur (per 37^{mam} primi) rectangulum ΛNγ ad quadratum ex ΓN sicut rectangulum Toθ ad quadratum ex Ho. Sed quadratum ex ΓN est ad quadratum ex Nγ ut quadratum ex Ho ad quadratum ex oθ, ob similia triangula ΓNγ, Hoθ: quare *ex æquo* rectangulum ΛNγ est ad quadratum ex Nγ sicut rectangulum Toθ ad quadratum ex oθ; ac propterea ΛN erit ad Nγ sicut To ad oθ. Sed Nγ est ad ΓN sicut θo ad oH; adeoque ΛN erit ad ΓN sicut To ad oH. Anguli autem ad N & o sunt

X sunt



Quod si capiatur segmentum aliquod aliud ut Iε, quod non sit interceptum sub iisdem ordinatim applicatis, nec in Ellipsi sub ordinatis æqualiter ab altera parte centri distantibus: Dico illud non esse simile segmento ΔΓB. Nam si fieri possit, sit illi simile. Cumque segmentum BΔ simile est segmento ZX, erit quoque segmentum Iε ipsi ZX simile. Non autem interceptum est sub iisdem ad Axem normalibus, neque sub iis quæ sunt ad easdem à centro distantias. Itaque (per 19^{nam} & 20^{mam} hujus) posuimus absurdum. Segmentum igitur Iε non potest esse simile segmento XZ, adeoque nec segmento ΔΓB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

IN sectionibus dissimilibus, nulla portio unius similis est alicui alterius portioni.

Sint AB, ΓΔ sectiones dissimiles, ac primum sint ambæ Hyperbolæ vel Ellipses. Dico nullum segmentum sectionis AB simile esse segmento alicui ex ΓΔ.

Nam si fieri possit, sint BE, ΔZ segmenta similia. Jungantur BE, ΔZ ac dividantur bifariam in punctis Θ, H; ac per centra sectionum, K, Λ ducantur rectæ HMK, ΘNΛ: quæ (per 47^{im} primi) diametri erunt sectionum. Hæ vero vel erunt sectionum

ex ΜΠ ſicut rectangulum ΑΧΞ ad quadratum ex ΝΧ. Sed rectangulum ΚΠΡ eſt ad quadratum ex ΜΠ (per 37^am^ primi) ſicut Axis tranſverſus ſectionis ΑΒ ad latus ejus rectum; ac (per eandem) rectangulum ΑΧΞ erit ad quadratum ex ΝΧ ſicut Axis tranſverſus ſectionis ΓΔ ad latus ejus rectum. Quapropter Axis ſectionis ΑΒ eſt ad latus ejus rectum ſicut Axis ſectionis ΓΔ ad ejus latus rectum. Figuræ igitur ſectionum ΑΒ, ΓΔ ſunt ſimiles, ac proinde (per 12^mam^ hujus) ſectiones ipſæ ſunt ſimiles. Sectiones itaque ΑΒ, ΓΔ ſunt ſimiles, quas tamen diſſimiles eſſe ſuppoſuimus. Abſurdum eſt igitur ſegmentum ΒΕ ſimile eſſe ſegmento ΔΖ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

Si vero ſectio ΑΒΕ fuerit Parabola, ΓΔΖ vero Hyperbola aut Ellipſis; demonſtravimus quidem (per 14^am^ hujus) ſectionem ſectioni non eſſe ſimilem. Dico quoque ſegmenta earum non poſſe ſimilia eſſe. Nam, ſi poſſibile ſit ut ſint ſimilia, duci poterunt in iiſdem (*per Definit. ſeptimam*) rectæ numero æquales, ipſis ΒΕ, ΔΖ parallelæ, ita ut portiones diametri ΜΗ vertici Μ conterminæ à parallelis abſciſſæ, fuerint ad ipſas parallelas in ſegmento ΒΕ, in iiſdem rationibus ac abſciſſæ diametri ΝΘ vertici Ν conterminæ ad parallelas in altera ſegmento ΔΖ ductas: ſimulque Baſis unius erit ad diametrum ejus ſicut Baſis alterius ad diametrum ejus; ac portiones in unâ diametrorum abſciſſæ erunt ad abſciſſas in alterâ ubique in eadem ratione. Hoc autem fieri non poſſe, eodem modo quo rem in integris ſectionibus (per Prop. 14^am^) demonſtravimus, facile conſtabit. Q. E. D.

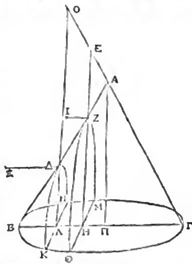
Quod ſi una ſectionum fuerit Hyperbola, altera vero Ellipſis, patebit abſurditas juxta argumentum Propoſitionis 15^tæ^ hujus.

PROPOSITIO XXV.

T*Rium ſectionum Conicarum nulla portio eſt arcus Circuli.*

Sit

Sit Conus ΑΒΓΔ; ac ſecetur planis æquidiſtantibus quorum communes ſectiones cum plano Baſis Coni ſint ΘΜ, ΚΝ; & per centrum Baſis ad has rectas demittatur Cathetus ΒΛΗΓ: ſecetur etiam Conus alio plano per Axem ejus, ſecundum rectam ΒΓ, quod Conicæ ſuperficiei occurrat in rectis ΑΒ, ΑΓ; ac ſint communes interſectiones hujus plani cum duobus prædictis planis parallelis, rectæ ΔΛ, ΖΗ, quæ producantur ad Ο, Ε. Dico ſectionem ΘΖΜ ſimilem eſſe ſectioni ΚΔΝ, ſed tamen non illi æqualem.



De puncto Α ipſis ΔΛ, ΖΗ parallela ducatur ΑΠ; ac fiat ΟΔ ad ΔΞ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: fiat etiam ΕΖ ad ΖΙ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: *adeoque* ΕΖ *erit ad* ΖΙ *ſicut* ΟΔ *ad* ΔΞ. Jam recta ΒΛ normalis eſt ipſi ΚΝ, adeoque cæteræ in ſectione Hyperbolica ΚΔΝ ad rectam ΔΛ ductæ ipſique ΑΝ parallelæ (per 12^{mam} primi) poterunt plana lateri recto ΔΞ adjacentia, excedentia vero rectangulis ſimilibus contento ſub ΟΔ, ΔΞ. Pariter, quia recta ΒΗ normalis eſt ipſi ΜΘ, rectæ eodem modo ductæ in Hyperbola ΘΖΜ poterunt rectangula lateri recto ΖΙ adjacentia, excedentia autem figuris rectangulis ſimilibus contentâ ſub ΕΖ, ΖΙ. Verum angulus quem continent rectæ ΔΛ, ΚΝ æqualis eſt angulo contento ſub ΖΗ, ΘΜ; quia parallelæ ſunt inter ſe. *Figura autem* ΕΖΙ *ſimilis eſt figuræ* ΟΔΞ: Sectiones igitur (per 12^{mam} hujus) ſunt ſimiles. Quoniam vero rectangulum ΟΔΞ majus eſt rectangulo ΕΖΙ, ſectiones (per ſecundam hujus) non erunt æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI ſecetur Conus planis inter ſe parallelis occurrentibuſque utrique lateri trianguli per verticem, neque Baſi Coni parallelis, neque eidem ſubcontrariè poſitis; erunt ſectiones genitæ Ellipſes ſimiles, verum non æquales.

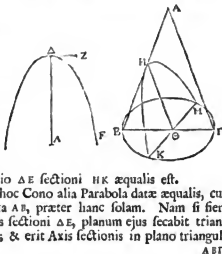
Secent

Ellipsi ΖΡΕ, ipsi ΘΜ parallelæ erunt; ac poterunt rectangula lateri recto ΖΙ adjacentia, deficientia autem figuris similibus factæ sub ΕΖ, ΖΙ. Verum angulus ΚΑΔ æqualis est angulo ΘΗΖ, quia rectæ ΚΛ, ΛΔ ipsis ΘΗ, ΗΖ parallelæ sunt. *Cumque* ΟΔ *est ad* ΔΞ *sicut* ΕΖ *ad* ΖΙ, figura contenta sub ΟΔ, ΔΞ similis erit contentæ sub ΖΕ, ΖΙ. Quod si hoc ita se habeat, sectiones ipsæ (per 12^mam^ hujus) similes erunt, adeoque sectiones ΖΡΕ, ΔΧΟ sunt similes. Non possunt autem æquales esse, quia rectangulum ΕΖΙ majus est contento sub ΟΔ, ΔΞ; ac proinde (juxta demonstrata in secundâ hujus) sectiones quoque sunt inæquales.

PROPOSITIO XXVIII. PROBL.

IN Cono recto dato invenire sectionem datæ Parabolæ æqualem.

Sit Conus rectus datus, cujus sectio per Axem est triangulum ΑΒΓ: Parabola autem data sit ΔΕ, cujus Axis ΔΛ & latus rectum ΔΖ: fiat ΔΖ ad ΑΗ sicut quadratum ex ΓΒ ad rectangulum sub ΑΒ, ΑΓ; ac ducatur recta ΗΘ ipsi ΑΓ parallela: dein secetur Conus plano transeunte per rectam ΗΘ & ad angulos rectos super planum ΑΒΓ, ac genita erit sectio ΚΗΜ super Axem ΗΘ. Dico sectionem ΚΗΜ æqualem esse sectioni ΔΕ.



Quoniam normales in sectione ΚΗ, ad Axem ΗΘ ductæ, possunt rectangula *lateri ejus recto* adjacentia; quod quidem est ad ΑΗ (per 11^mam^ primi) sicut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum sub ΑΒ, ΑΓ: fecimus autem ΔΖ ad ΑΗ in eadem ratione quadrati ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ; recta igitur ΔΖ æqualis est lateri recto sectionis ΚΗΜ. Sed, si ita fuerit, manifestum est (per primam hujus) sectiones esse æquales; ac proinde sectio ΔΕ sectioni ΗΚ æqualis est.

Dico quoque quod non reperietur in hoc Cono alia Parabola datæ æqualis, cujus vertex sive Axis extremitas sit in recta ΑΒ, præter hanc solam. Nam si fieri possit ut reperiatur alia Parabola æqualis sectioni ΔΕ, planum ejus secabit triangulum per Coni Axem ad angulos rectos; & erit Axis sectionis in plano trianguli

meter transversa, sive [illegible]

Sit Conus rectus propositus, in quo triangulum per Axem est ΑΒΓ, Axis vero ΑΘ: sit quoque Hyperbola data ΔΕ, cujus Axis ΗΔΣ; figura vero rectangulum contentum sub ΗΔ, ΔΖ. Primum autem sit quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΒΘ in ratione ΗΔ ad ΔΖ; ac ducatur (*per Lemma* VI. Pappi) recta ipsi ΑΘ parallela ipsique ΗΔ æqualis, quæ subtendat angulum ΒΑΠ, ad modum rectæ ΝΠ; & per ΝΠ, ad angulos rectos super planum trianguli ΑΒΓ, erigatur planum Conicæ superficiei occurrens. Dico Hyperbolam sectione ejus genitam, cujus Axis est ΙΝΠ, *æqualem esse Hyperbolæ datæ* ΔΕ.

Quoniam enim ΑΘ parallela est ipsi ΠΝ, erit ΠΝ, sive diameter transversa, ad latus rectum sectionis (per 12^{am} primi) ut quadratum ex ΑΘ ad rectangulum sub ΓΘ, ΘΒ; & ΗΔ est ad ΔΖ in eadem ratione; ΠΝ autem ipsi ΗΔ facta est æqualis: quare ΔΖ æqualis erit lateri recto sectionis cujus Axis est ΠΝΙ. Figura igitur sectionis cujus Axis est ΠΝΙ æqualis est figuræ sectionis ΔΕ, ac proinde (per secundam hujus) sectiones ipsæ sunt æquales.

Neque reperietur alia sectio sectioni ΔΕ æqualis, cujus punctum Axis verticale sit in recta ΑΒ. Nam, si fieri possit, erit quoque Axis hujus sectionis in plano trianguli ΑΒΓ (ut demonstratum est in Propositione præcedente) ac planum hujus alterius sectionis erit ad angulos rectos super planum trianguli ΑΒΓ. Cum autem sectio altera Hyperbola est & æqualis sectioni ΔΕ, occurret Axis ejus lateri ΑΓ ultra apicem Coni Α producto, ita ut portio intercepta inter latus trianguli ΑΒ & occursum cum ΑΓ productâ (per 2^{dam} hujus) æqualis sit ipsi ΔΗ. At vero non est ipsa ΠΝ, neque eidem parallela; quia si rectæ

ΠΝ

est ad rectangulum ΒΜΓ, quam habet ξο diameter transversa figuræ sectionis cujus Axis est ξοΛ, ad latus rectum ejus: erit figura sectionis ΔΕ & sectionis cujus Axis est ξοΛ inter se æquales; ac proinde (per secundam hujus) sectiones ipsæ æquales sunt. Pari argumento probabitur sectionem ΔΕ æqualem esse sectioni cujus Axis est ΠΝΙ.

Neque reperietur sectio alia *sectioni* ΔΕ *æqualis, quæ verticem habeat in recta* ΑΒ, præter jam descriptas. Nam, si fieri possit, erit Axis sectionis (juxta demonstrata in Parabola) in plano ΑΒΓ: huic autem Axi parallela ducatur recta ΑΤ; ac, argumento nuper usurpato constabit rectam ΑΤ non coincidere cum recta ΑΚ, neque cum recta ΑΜ; sed ΔΗ esse ad ΔΖ (per 12^{mam} primi) sicut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΒΤΓ, sive ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤσ, quod æquale est rectangulo ΒΤΓ. Sed quadratum ex ΑΤ est ad rectangulum ΑΤσ sicut ΑΤ ad Τσ; quare ΔΗ est ad ΔΖ sicut ΑΤ ad Τσ: quod absurdum. Nam ΔΗ est ad ΔΖ sicut ΑΘ ad Θγ, sive ut ΑΤ ad Τδ.

Porro si fuerit ratio quadrati ex ΑΘ ad quadratum ex ΒΘ major ratione ΔΗ ad ΔΖ; Dico non reperiri posse in Cono sectionem aliquam sectioni ΔΕ æqualem. Nam, si fieri possit, reperiatur; ac ducatur recta ΑΜ hujus sectionis diametro parallela: erit igitur quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ sicut ΔΗ ad ΔΖ. Supponitur autem ratio quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ major ratione ΔΗ ad ΔΖ: quapropter ratio quadrati ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ minor erit ratione quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ. Sed quadratum ex ΑΜ majus est quadrato ex ΑΘ, & rectangulum ΒΜΓ minus rectangulo ΒΘΓ: quod quidem absurdum est. Non reperietur igitur in hoc Cono sectio aliqua sectioni ΔΕ æqualis.

PROPOSITIO XXX. PROBL.

In dato Cono recto invenire sectionem Ellipsi datæ æqualem.

Detur Conus rectus, cujus sectio per Axem sit triangulum ΑΒΓ; ac sit Ellipsis data ΔΕ, cujus Axis *major* ΔΗ ac latus rectum ΔΖ: circumscribatur triangulo ΑΒΓ

 Circulus;



huic Axi parallela, quæ non coincidat cum recta AM, ficut AΣT; hæc autem occurret arcui AΓ, quia non eft ipfi BΓ parallela. Verum eft Axis tranfverfus hujus fectionis ad latus ejus rectum (per 13am primi) ut quadratum ex AT ad rectangulum BTΓ, ac in eâdem debet effe ratione ΔH ad ΔZ. Sed rectangulum BTΓ æquale eft rectangulo ATΣ; erit igitur ΔH ad ΔZ ut quadratum ex AT ad rectangulum ATΣ, hoc eft ut AT ad TΣ. Verum ΔH eft ad ΔZ ut quadratum ex AM ad rectangulum AMΞ, five ut AM ad MΞ; quare AT ad TΣ erit ut AM ad MΞ, quod abfurdum & impoffibile eft. Quapropter non reperietur in hoc Cono fectio alia æqualis fectioni ΔE, cujus Vertex apici Coni propior fuerit in recta AB, præter folam fectionem cujus Axis major eft OΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA.

Invenire Conum rectum Cono recto dato fimilem, qui contineatur à Parabolâ datâ.

Sit fectio ABΓ Parabola, cujus Axis AΛ, latus vero rectum ejus AΔ; fitque Conus datus & triangulum per Axem ejufdem EZK: & fecundum AΛ erigatur normaliter, fuper planum fectionis ABΓ, planum aliud, ut ΘAΛ; & in hoc plano ducatur recta AM quæ contineat cum recta AΛ angulum æqualem angulo EZK: ac fiat ΔA ad AM ficut KZ ad ZE: & fuper bafim AM defcribatur triangulum AΘM fimile triangulo ZEK, ac ducantur rectæ ΘA, ΘM de punctis A, M; ac fiat Conus cujus Vertex Θ, ac Bafis circulus, cujus diameter AM, fuper planum AΘM normaliter erectus. *Dico Conum AΘM Cono EZK fimilem contineri à Parabolâ datâ ABΓ.*

Eft enim angulus MAΛ æqualis angulo EZK, & angulus EZK æqualis eft angulo
*
ΘMA

Ξ, ac si foret sectio ΒΑΓ in Cono cujus Apex est Ι, & caperetur recta quædam ad ΑΙ in ratione quadrati ex ΑΞ ad rectangulum ΑΙΞ; esset recta illa latus rectum sectionis ΒΑΓ. Sed ΑΔ est latus rectum sectionis ΒΑΓ; quare quadratum ex ΑΞ *esset ad rectangulum* ΑΙΞ *sicut* ΑΔ *ad* ΑΙ: *quadratum autem ex* ΑΜ est ad rectangulum ΑΘΜ sicut ΑΔ ad ΑΘ. Est vero quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΑΘΜ sicut quadratum ex ΑΞ ad rectangulum ΑΙΞ; adeoque ΑΔ erit ad ΑΘ in eadem ratione ac ad ΑΙ. Hoc autem absurdum est. Non itaque inveniri potest Conus alius Cono dato ΖΕΚ similis, qui contineat sectionem ΑΒΓ, ita ut Apex ejus respiciat idem latus plani sectionis. Q. E. D.

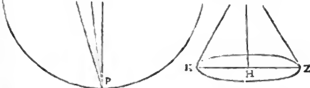
PROPOSITIO XXXII. PROBL.

Invenire Conum rectum Cono recto dato similem ab Hyperbolâ datâ contentum. Oportet autem rationem quadrati Axis Coni ad quadratum semidiametri Basis ejus non majorem esse ratione lateris transversi, in figurâ sectionis super Axem factâ, ad latus rectum ejusdem.

Sit ΑΒΓ Hyperbola data, cujus Axis ΑΛ, diameter transversa ΑΝ ac *latus rectum* ΑΔ; *ita ut* figura super Axem facta sit rectangulum ΝΑΔ: sit etiam Conus datus Conus ille in quo triangulum per Axem est triangulum ΕΖΚ. Producatur recta ΚΕ ad δ; & secundum Axem sectionis ΑΛ erigatur planum ΘΑΛ, ad angulos rectos super planum sectionis; in hoc autem plano super rectam ΝΑ describatur segmentum circuli ΝΘΑ (*per* 33^am III. *Elem.*) quod capiat angulum æqualem angulo δΕΖ: ac completo circulo dividatur arcus ΑΘΝ bifariam in puncto Θ, & per Θ ipsi ΑΝ normalis ducatur ΘΞΡ.

Imprimis autem sit quadratum ex Axe Coni, sive ex ΕΗ, ad quadratum ex ΖΗ in ratione ΑΝ ad ΔΑ; & producatur recta ΝΘ ultra punctum Θ, ut ΜΝ, cui occur-

ΝΑ ad ΑΔ; est igitur quadratum ex ΠΘ ad rectangulum ΜΠΑ sicut ΝΑ ad ΑΔ. Poterunt igitur ordinatim applicatæ ad ΑΑ Axem sectionis genitæ (per 12mam primi) rectangula lateri recto ΑΔ adjacentia, excedentia vero figuris similibus factæ sub ipsis ΝΑ, ΑΔ. Normales autem ad ΑΑ ductæ in sectione ΑΒΓ possunt etiam rectangula adjacentia eidem ΑΔ & excedentia figuris similibus factæ sub iisdem ΝΑ, ΑΔ: sectioni itaque ΒΑΓ (per 2dam hujus) æqualis est sectio genita in Cono ΘΑΜ, cujus Apex est Θ, ac basis circulus diametro ΑΜ descriptus. Sunt autem in eodem plano, ac Axis coincidit cum Axe: continetur igitur à sectione ΒΑΓ Conus ille cujus vertex est Θ, qui quidem similis est Cono ΕΖΚ, quia ΘΠ est ad ΠΜ ut ΕΗ ad ΗΖ.



Dico quoque non contineri ab hac sectione Conum alium Cono ΕΖΚ similem, ita ut Apex ejus ad idem latus plani, in quo est sectio ΑΒΓ, jaceat, ad quod jacet punctum Θ, præter Conum jam factum. Nam si possibile sit, contineat Conum alium, cujus vertex est Ι; ac, per ea quæ in Propositione præcedente demonstravimus, manifestum erit punctum Ι in plano ΘΑΑ reperiri. Sint autem latera hujus Coni rectæ ΙΟ, ΙΑ; ac sit Conus ille similis Cono ΖΕΚ, adeoque anguli ΑΙΟ, ΖΕΚ æquales, ut & anguli ΑΙΝ, ΖΕδ: unde punctum Ι cadet in arcu ΑΘΝ; ac recta ΙΟ producta transibit per Ν. Jungatur ΡΧΙ, & per Α eidem parallela ducatur ΑΟ; & per punctum Ι ipsi ΑΝ parallela sit recta ξΙ. Si igitur sectio ΑΒΓ fuerit in Cono cujus Apex est Ι; producto sectionis Axe ΑΑ ad Ν, erit quadratum ex ξΙ ad rectangulum ΑξΟ sicut diameter transversa ΑΝ ad latus rectum ΑΔ. Sed ΑΝ est ad ΑΔ ut quadratum ex ΕΗ ad rectangulum ΖΗΚ; anguli autem duo ΝΙΡ, ΡΙΑ, hoc est, anguli ΙΑΟ, ΑΟΙ sunt æquales inter se, utpote angulis ΕΖΚ, ΕΚΖ æquales; sicut angulus ΑΙΟ angulo ΖΕΚ æqualis est: quare similia sunt triangula ΑΙΟ, ΖΕΚ. Verum, per jam demonstrata, quadratum ex Ιξ est ad rectangulum ΑξΟ sicut quadratum ex ΕΗ ad rectangulum ΖΗΚ. Est autem ΖΗ æqualis ipsi ΗΚ, adeoque & Αξ ipsi ξΟ. Sed Αξ est ad ξΟ sicut ΝΙ ad ΙΟ, hoc est sicut ΝΧ ad ΧΑ: quapropter rectæ ΝΧ, ΧΑ æquales erunt. Hoc autem absurdum est; quia sola ΘΡ circuli diameter occurrit ipsi ΑΝ ad angulos rectos in puncto Ξ. Non igitur invenire

... sectionis in Cono ... genitæ. Unde & per ea quæ in hac Propositione demonstrata sunt, manifestum erit Conum cujus Apex est punctum I contineri ab hac sectione ABΓ. Continebitur etiam ab eadem sectione Conus alter cujus Apex est punctum Σ, junctis rectis NΣ, ΣA, ac productâ ipsâ NΣ; ac Conus uterque similis erit Cono dato EZK.

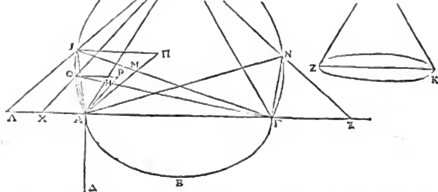
Dico quoque non contineri ab eadem Conum aliquem tertium Cono EZK similem, cujus Apex fuerit ad easdem partes plani sectionis BAΓ ad quas situm est punctum I. Apex enim ejus erit, per præmissa, in arcu AIN. Sit autem ille in puncto T, ac jungatur recta TΥP; & è conversâ præcedentis demonstrationis consequetur AN esse ad AΔ sicut PΥ ad TΥ: quod quidem absurdum est, cum scilicet PΞ sit ad Ξγ in illâ ratione. Sectio igitur BAΓ non continet tertium Conum similem Cono EZK.

Quod si ratio quadrati ex EH ad quadratum ex ZH major fuerit ratione AN ad AΔ, impossibile erit ut Conus Cono EZK similis contineatur à sectione ABΓ. Nam, si fieri possit, contineatur ab ea Conica superficies cujus Apex est I; & modo in præcedentibus usurpato, constabit PX esse ad XI sicut AN ad AΔ. Sed ratio AN ad AΔ minor est ratione quadrati ex EH ad quadratum ex ZH, quam demonstravimus esse sicut PΞ ad ΞΘ; erit igitur ratio PX ad XI minor ratione PΞ ad ΞΘ. Hoc autem absurdum est: ac proinde nullus Conus Cono dato EZK similis contineri potest à sectione BAΓ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII. PROBL.

Invenire Conum rectum Cono recto dato similem qui contineatur ab Ellipsi data.

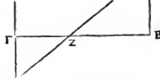
Sit ABΓ data Ellipsis, cujus Axis major AΓ & latus rectum AΔ. Conus autem rectus datus sit EZK; & secundum rectam AΓ normaliter, super planum in quo est sectio ABΓ, erigatur planum, & in eo super basin AΓ describatur arcus circuli qui capiat angulum æqualem angulo ZEK, ut arcus AΘΓ: & bisecetur hic arcus in puncto Θ, & è puncto Θ educatur recta ΘIΛ, ita producenda ut ΘΛ sit ad ΛI sicut AΓ ad AΔ. Pari modo ducatur recta ΘΞ in eadem ratione dividenda in puncto N. Jungantur AI, IΓ, ac ipsi AΓ parallela ducatur IΠ; ipsique ΘΛ parallela sit AΠ, *occurrent*



Pari modo demonſtrabitur eandem continere Conum alium cujus Apex eſt N, ac latera rectæ AN, NΓ. Neque continetur ab hac ſectione Conus aliquis tertius Cono EZK ſimilis, cujus Apex fuerit ad e dem partes plani ſectionis. Nam, ſi fieri poſſit ut contineat Conum alium, demonſtrabitur, eo quo in præcedentibus modo, quod, ſi erigatur ad angulos rectos ſuper planum ſectionis, ſecundum Axem ejus, planum aliquod, communis interſectio horum planorum eſſet ſectionis Axis major; ac quemadmodum demonſtravimus de Hyperbolâ in Prop. præced. reperiretur Apex Coni in arcu AΘΓ. Sit autem ille in puncto O, ac ſint latera Coni OA, OH. Juncta ΘO producatur ad X, ipſique ΘX parallela ducatur AP, ipſi vero AΓ recta OP: erit igitur triangulum OAH æquicrure, ac quadratum ex OP erit ad rectangulum APH ſicut AΓ ad AΔ. Sed quadratum ex OP eſt ad rectangulum APH ſicut rectangulum ΓXA ad quadratum ex OX, propter parallelogrammum OPAX; rectangulum autem ΓXA æquale eſt rectangulo ΘXO, *ob circulum*: adeoque ΓA eſt ad AΔ ſicut rectangulum ΘXO ad quadratum ex OX, hoc eſt ut ΘX ad XO. Demonſtravimus autem ΓA eſſe ad AΔ ſicut ΘA ad AI; quare ΘX erit ad XO ſicut ΘA ad AI; quod quidem impoſſibile eſt. Fieri igitur nequit ut tres Coni Cono EZK ſimiles contineantur ab hac ſectione ABΓ. Q. E. D.

ΠΑΠΠΟΥ

ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ, τὰ δ' ἀπὸ ΓΕ, ΓΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΔΓ καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ ΖΒΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ ΕΔ, ΒΓ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΒΖ τετραγώνοις·] λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΕΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΖΒΓ.



(per 7. 2ᵈⁱ El.) una cum duplo rectangulo sub ΕΑΖ æquale est utrique quadrato ex ΕΑ, ΑΖ; quadrata vero ex ΓΕ, ΓΖ una cum duplo rectanguli sub ΕΔΓ & duplo rectanguli ΖΒΓ æqualia sunt quadratis ex ΕΔ, ΒΓ & ex ΓΔ, ΒΖ.] reliquum igitur nempe duplum rectanguli ΕΑΖ æquale erit duplo rectanguli ΕΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ: quare rectangulum ΕΑΖ æquale est rectangulis ΕΔΓ, ΖΒΓ simul sumptis.

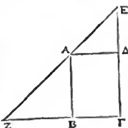
ΛΗΜΜΑ β'.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΑΖ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΖ, ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΑΖ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα τῷ ἅπαξ.

LEMMA II.

Sit ΑΓ parallelogrammum rectangulum ac ducatur ΕΑΖ. dico rectangulum ΕΔΓ una cum rectangulo ΓΒΖ æquale esse rectangulo ΕΑΖ.



Quoniam enim quadratum ex ΕΖ æquale est quadratis ex ΕΓ, ΓΖ simul, quadrata vero ex ΕΑ, ΑΖ simul æqualia sunt quadratis ex ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ simul: duplum igitur rectanguli ΕΑΖ æquale erit duplo rectanguli ΕΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ; ac proinde rectangulum ΕΑΖ semel æquale est utrique rectangulo ΕΔΓ, ΖΒΓ.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἔστω μείζονα τμήματα αἱ ΑΕ, ΓΖ. ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ.

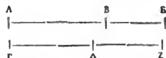
LEMMA III.

Sit ΑΒ major quam ΓΔ, & rectangulum ΑΕΒ æquale rectangulo ΓΖΔ, ac sint ΑΕ, ΓΖ utriusque portiones majores. dico majorem esse ΑΕ quam ΓΖ.

quam ΔZ. dico excessum quo AB superat BE majorem esse excessu quo ΓΔ superat ΔZ.

ΓΔ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς.

QUONIAM enim AB major est quam ΓΔ, major erit excessus ipsius AB supra BE excessu quo ΓΔ superat eandem BE. major autem est excessus ipsius ΓΔ supra EB quam supra ΔZ, quia EB minor est quam ΔZ: quocirca excessus ipsius AB supra BE multo major erit excessu quo ΓΔ superat ΔZ.



ΕΠΕΙ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ τῆς τῶν ΓΔ, ΒΕ ὑπεροχῆς. ἀλλὰ ἡ τῶν ΓΔ, ΕΒ μείζων τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς, ἐλάσσων γάρ ἐστιν ἡ ΕΒ τῆς ΔΖ· ὥστε ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς.

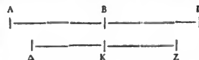
LEMMA VI.

Sit AB ipsi BΓ æqualis, uti ΔK ipsi KZ: dico rectangulum sub AΓ, ΔZ quadruplum esse rectanguli sub AB, ΔK.

ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ.

QUONIAM enim ΓA dupla est ipsius AB, sumptâ in communem altitudinem ΔK, erit rectangulum sub ΓA, ΔK duplum rectanguli sub AB, ΔK. rursus quoniam ΔZ dupla est ipsius ZK, sub communi altitudine AΓ, fiet rectangulum sub AΓ, ΔZ duplum rectanguli sub AΓ, ΔK: sed & rectangulum sub AΓ, ΔK duplum est rectanguli sub AB, ΔK: proinde rectangulum sub AΓ, ΔZ quadruplum est facti sub AB, ΔK.



ΕΠΕΙ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑ, ΔΚ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ. πάλιν ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΖΚ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΓ, ΔΚ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΚ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ.

LEMMA VII.

Sit ut AB ad BΓ ita ΔK ad KZ, & ut AB ad BH ita ΔK ad KΘ. dico rectangulum sub ABH esse ad rectangulum sub AHΓ sicut rectangulum ΔKΘ ad rectangulum ZΘΔ.

ΛΗΜΜΑ ζʹ.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΖ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΘ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘΔ.

NAM cum AB est ad BH sicut ΔK ad KΘ, per conversionem rationis BA erit ad AH sicut KΔ ad ΔΘ; adeoque quadratum ex BA ad quadratum ex AH sicut quadratum ex ΔK ad quadratum ex ΔΘ. sed ut quadratum ex AB ad rectangulum ABH ita quadratum ex ΔK ad rectangulum ΔKΘ: erit igitur ut quadratum ex AH ad rectangulum ABH

ΕΠΕΙ γὰρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ἀναστρέψαντι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ

οὕτω

δοθεῖσά ἐστι συναμφότερος ἡ ΓΑ, ΑΔ. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ΒΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν.

datum est quadratum ex Γ A, A Δ simul sumptis: adeoque & summa ipsarum Γ A, A Δ data est. hujus vero dimidia est recta B A; quare B A data est, ac proinde B Γ quoque datur.

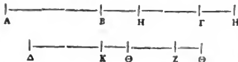
ΛΗΜΜΑ θʹ.

Εστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.

ΕΠΕΙ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΚ. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· ἔσται ἄρα δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.

LEMMA IX.

Sit A B ipsi B Γ æqualis, ut & Δ K ipsi K Z; sit etiam ut Γ B ad B H ita Z K ad K Θ. dico rectangulum A H B esse ad rectangulum B Γ H sicut rectangulum Δ Θ K ad rectangulum K Z Θ.



QUONIAM enim Γ B est ad B A sicut Z K ad K Δ, atque etiam Γ B est ad B H sicut Z K ad K Θ; erit igitur ut quadratum ex A H ad rectangulum A H B ita quadratum ex Δ Θ ad rectangulum Δ Θ K. sed ut quadratum ex A H ad quadratum ex B Γ ita quadratum ex Δ Θ ad quadratum ex K Z; & ut quadratum ex B Γ ad rectangulum B Γ H ita quadratum ex K Z ad rectangulum K Z Θ: ex æquo igitur erit ut rectangulum A H B ad rectangulum B Γ H ita rectangulum Δ Θ K ad rectangulum K Z Θ.

ΛΗΜΜΑ ιʹ.

Εστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΚ.

ΕΠΕΙ γὰρ ἴση μέν ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ· ἡ ΓΔ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΑΚ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΔ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ ΓΚΒ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ τοῦ ὑπὸ ΒΑΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΚ.

LEMMA X.

Sit A B ipsi B Γ æqualis, minor vero sit B Δ quam B K. dico rectangulum A Δ B ad rectangulum B Γ Δ minorem habere rationem quam habet rectangulum Γ K B ad rectangulum B A K.

A K B Δ Γ

NAM cum A B æqualis est ipsi B Γ, ac B Δ minor quam B K, Γ Δ major erit quam A K, quemadmodum Γ K major est quam A Δ: minus igitur est rectangulum A Δ B rectangulo Γ K B, majus vero rectangulum B Γ Δ rectangulo B A K. quocirca rectangulum A Δ B ad rectangulum B Γ Δ minorem habet rationem quam rectangulum Γ K B ad rectangulum B A K.

dratum ex Ε Λ sicut rectangulum Ε Θ Λ ad quadratum ex Ε Λ. est autem rectangulum sub Α Κ, Β Γ ad quadratum ex Β Κ, sicut rectangulum sub Δ Λ, Ε Ζ ad quadratum ex Ε Λ, ob proportionalitatem partium pari ordine dispositarum: ut igitur rectangulum Β Η Κ ad quadratum ex Β Κ ita rectangulum Ε Θ Λ ad quadratum ex Ε Λ. eædem autem sunt portiones Β Η, Ε Θ: erit igitur ut Κ Β ad Β Η ita Λ Ε ad Ε Θ. sed prius ostensum est Β Γ esse ad Β Κ sicut Ζ Ε ad Ε Λ; ex æquo igitur Β Γ est ad Β Η sicut Ζ Ε ad Ε Θ.

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Κ, Β Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Κ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Λ, Ε Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Λ, διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοιοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Β Η Κ πρὸς τὸ ἀπὸ Β Κ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Θ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Λ. καί ἐστι τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ Β Η, Ε Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Κ Β πρὸς Β Η οὕτως ἡ Λ Ε πρὸς Ε Θ. [ἀλλ' ἐδείχθη ὡς ἡ Β Γ πρὸς τὴν Β Κ οὕτως ἡ Ζ Ε πρὸς τὴν Ε Λ· δι' ἴσου] ἄρα ὡς ἡ Β Γ πρὸς Β Η οὕτως ἐστὶν ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Θ.

LEMMA XII.

Sit Α Β ipsi Β Γ uti & Δ Κ ipsi Κ Ζ æqualis; habeat autem Β Γ ad Γ Η majorem rationem quam Κ Ζ ad Ζ Θ. dico quod in primo casu Α Η majorem habet rationem ad Β Γ quam Δ Θ ad Κ Ζ: in secundo vero minorem.

ΛΗΜΜΑ ιβ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν Α Β τῇ Β Γ, ἡ δὲ Δ Κ τῇ Κ Ζ, ἔτι δὲ ἡ Β Γ πρὸς Γ Η μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Κ Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ. ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ Α Η πρὸς τὴν Β Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Θ πρὸς τὴν Κ Ζ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσονα.

QUONIAM enim Β Γ majorem habet rationem ad Γ Η quam Κ Ζ ad Ζ Θ; in primo casu Γ Β ad Β Η minorem habet rationem quam Ζ Κ ad Κ Θ; in secundo vero, majorem. adeoque Α Β ad Β Η minorem habet rationem quam Δ Κ ad Κ Θ: in secundo vero casu majorem. quare Η Α in primo casu majorem habet rationem ad Α Β quam Θ Δ ad Δ Κ, in secundo vero minorem. sed ut Α Β ad Β Γ ita Δ Κ ad Κ Ζ; ex æquo igitur, in primo casu, Α Η majorem habet rationem ad Β Γ quam Δ Θ ad Κ Ζ: in secundo vero casu minorem.

Α Β Η Γ Η 2

Δ Κ Θ Ζ Θ 2

ΕΠΕΙ γὰρ ἡ Β Γ πρὸς Γ Η μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ Κ Ζ πρὸς Ζ Θ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ Γ Β πρὸς Β Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Θ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· ὥστε καὶ ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Κ πρὸς Κ Θ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· καὶ ἡ Η Α ἄρα πρὸς τὴν Α Β, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Θ Δ πρὸς Δ Κ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα. καί ἐστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Δ Κ πρὸς Κ Ζ· δι' ἴσου ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ Α Η πρὸς τὴν Β Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ Δ Θ πρὸς τὴν Κ Ζ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα.

LEMMA XIII.

Sint rursus Α Β, Β Γ æquales, ut & Δ Κ, Κ Ζ; habeat autem Α Η ad Η Β minorem rationem quam Δ Θ ad Θ Κ. dico Β Γ majorem habere rationem ad Γ Η quam Κ Ζ ad Ζ Θ.

ΛΗΜΜΑ ιγ'.

Ἔστω πάλιν ἴση ἡ μὲν Α Β τῇ Β Γ, ἡ δὲ Δ Κ τῇ Κ Ζ, ἔτι δὲ ἡ Α Η πρὸς τὴν Η Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Δ Θ πρὸς τὴν Θ Κ. ὅτι ἡ Β Γ πρὸς τὴν Γ Η μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ Ζ πρὸς τὴν Ζ Θ.

ΕΠΕΙ

Si dividatur AB utcunque in punctis Γ, Δ; erit quadratum ex AB, BΓ simul æquale quadruplo rectanguli sub AB, ΓΔ simul sumptis & BΔ, una cum quadrato ex AΔ, ΔΓ simul.



Fiat BK ipsi BΓ æqualis, ac ΔZ ipsi ΔΓ, & erit ZK duplum ipsius BΔ. Bisecetur KZ in H, ac erit [per 8. II. El.] quadratum ex AK sive ex AB, BΓ simul, æquale quadruplo rectanguli AHZ, hoc est quadruplo rectanguli sub AB, ΔΓ simul & BΔ, una cum quadrato ex AZ, hoc est quadrato ex AΔ, ΔΓ simul.

LEMMA II.

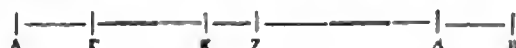
Si dividatur recta AB utcunque in punctis Γ, Δ; erunt quadrata ex AB, BΓ simul sumpta æqualia quadratis ex AΔ, ΔΓ simul, una cum duplo rectangulo sub AB, ΔΓ simul & BΔ.



Quoniam quadrata ex AB, BΓ [per 7. II. El.] æqualia sunt duplo rectangulo ABΓ una cum quadrato ex AΓ, ac quadrata ex AΔ, ΔΓ [per eandem] æqualia sunt duplo rectangulo AΔΓ cum quadrato ex AΓ: ob utrinque commune quadratum ex AΓ, erit excessus quadratorum ex AB, BΓ supra quadrata ex AΔ, ΔΓ æqualis excessui dupli rectanguli ABΓ supra duplum rectangulum AΔΓ. Bisecetur AΓ in Z, ac fiat AK ipsi ΔΓ æqualis, & erit [per 6. II.] excessus dupli rectanguli ABΓ supra duplum rectangulum AΔΓ æqualis excessui quo duplum quadrati ex BZ superat duplum quadrati ex ΔZ, hoc est, duplo rectanguli KBΔ. sed KB æqualis est utrisque AB, ΓΔ: quare quadrata ex AB, BΓ æqualia sunt quadratis ex AΔ, ΔΓ una cum duplo rectangulo sub AB, ΓΔ simul & BΔ.

LEMMA III.

Divisâ rectâ AB in punctis Γ, Δ, ita ut AΓ, ΔB fuerint æquales; si sumatur in ΓΔ punctum K, erunt quadrata ex AΔ, ΔB æqualia quadratis ex AK, KB una cum duplo rectanguli ΓKΔ.



Si dividatur ΔΓ bifariam in K, res manifesta est. Sin secus fuerit, dividatur bifariam in Z. Quoniam vero AB divisa est inæqualiter in Δ, æqualiter vero in Z; erunt quadrata ex AΔ, ΔB [per 9. II.] æqualia duplo quadratorum ex AZ, ZΔ. Sed duplum quadrati ex ZΔ [per 5. II.] æ-

quale

QUADRUPLUM enim rectanguli Β Ζ Θ una cum quatuor quadratis ex Ζ Θ [per 3. II.] æquale est quadruplo rectanguli Β Θ Ζ: adjiciatur utrinque duplum rectanguli Κ Θ Β; fiet summa æqualis duplo rectangulo sub Ζ Κ, Θ Β una cum duplo rectanguli Β Θ Ζ, hoc est, rectangulo sub Κ Ζ, Ζ Θ simul & duplo ipsius Θ Β.

LEMMA VI.

Iisdem positis, erit etiam duplum rectanguli Α Θ Β una cum quadruplo quadrati ex Θ Ζ æquale quadratis ex Α Θ, Θ Β.

QUONIAM enim Α Θ ipsi Η Β æqualis est, erit rectangulum Α Θ Β æquale rectangulo Θ Β Η; ac quadruplum quadrati ex Θ Ζ æquale est quadrato ex Η Θ, ob Θ Ζ ipsi Ζ Η æqualem: duplum igitur rectanguli sub Θ Β, Β Η, hoc est rectangulum Α Θ Β una cum quadrato ex Η Θ, æquale est [per 7. II.] quadratis ex Θ Β & Β Η, hoc est quadratis ex Α Θ, Θ Β.

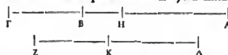
LEMMA VII.

Erit etiam duplum rectanguli sub Α Β, Γ Ζ æquale differentiæ quadratorum ex Α Γ, Γ Β.

QUONIAM duplum rectanguli Α Β, Γ Ζ æquale est duplo rectanguli sub Β Γ, Γ Ζ, sive rectangulo Β Γ Δ (ob Γ Ζ ipsi Ζ Δ æqualem) una cum duplo rectanguli Α Γ Ζ sive rectangulo Β Δ Γ; erit rectangulum Β Γ Δ una cum rectangulo Β Δ Γ, sive duplum rectanguli Β Δ Γ una cum quadrato ex Δ Γ, æquale rectangulo sub Β Α, Γ Ζ: rectangulum igitur sub Β Α, Γ Ζ [per 4. II.] æquale est excessui quo quadratum ex Β Γ superat quadratum ex Β Δ sive ex Α Γ.

LEMMA VIII.

Si ratio ipsius Α Β ad Β Γ major fuerit ratione Δ Κ ad Κ Ζ, [existente Α Β majore quam Β Γ & Δ Κ quam Κ Ζ] erit ratio quadrati ex Α Γ ad quadrata ex Α Β & Β Γ simul minor ratione quadrati ex Δ Ζ ad quadrata ex Δ Κ, Κ Ζ simul.



FIAT Α Η ad Η Γ sicut Δ Κ ad Κ Ζ, & erit Α Γ ad Γ Η sicut Δ Ζ ad Ζ Κ; pariterque Α Γ erit ad Α Η sicut Δ Ζ ad Δ Κ: quocirca quadratum ex Α Γ erit ad quadrata ex Α Η & Γ Η sicut quadratum ex Δ Ζ ad quadrata ex Δ Κ, Κ Ζ simul sumpta. Sed ratio quadrati ex Α Γ ad quadrata ex Α Β, Β Γ minor est ratione quadrati ex Α Γ ad quadrata ex Α Η, Η Γ; quia quadrata ex Α Β, Β Γ majora sunt quadratis ex Α Η, Η Γ: erit igitur ratio quadrati ex Α Γ ad quadrata ex Α Β, Β Γ minor ratione quadrati ex Δ Ζ ad quadrata ex Δ Κ, Κ Ζ.

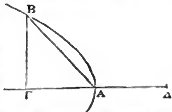
APOL-

spectantes: quæ quidem omnes utilitatem suam habent in multis Problematum generibus, præcipueque in eorum διορισμοῖς. Horum autem plura occurrunt exempla in Problematis Conicis determinatis, à nobis resolutis & demonstratis in Octavo libro; qui loco appendicis est, quemque tibi quantocyus fieri possit mittendum curabo. Vale.

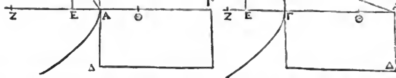
PROPOSITIO I.

SI in Axe Parabolæ supra verticem Sectionis producto ponatur recta æqualis lateri recto; ac ducatur recta quælibet à Vertice ad Sectionem, de cujus extremitate demissa sit normalis ad Axem: poterit recta sic ducta rectangulum contentum sub interceptâ inter Verticem & normalem & interceptâ inter normalem & punctum ad quod productus est Axis.

Sit AB Parabola cujus Axis AΓ, & producatur AΓ ad Δ, ita ut AΔ æqualis sit lateri recto: & de puncto A ducatur utcunque ad sectionem recta AB, & sit BΓ Axi normalis. Dico quadratum ex AB æquale esse rectangulo ΔΓA.



Quoniam enim AΓ est Axis sectionis, & BΓ eidem normalis est, ac AΔ æqualis est lateri recto; erit quadratum ex BΓ (per 11am primi) æquale rectangulo ΔAΓ. Huic autem si adjiciatur quadratum ex AΓ, erunt quadrata ex AΓ, ΓB simul sumpta æqualia rectangulo ΔAΓ una cum quadrato ex AΓ, hoc est rectangulo ΔΓA. Sed quadrata ex AΓ, ΓB simul æqualia sunt quadrato ex AB: quocirca quadratum ex AB æquale est rectangulo ΔΓA. Q. E. D.



Fiat rectangulum AEZ æquale quadrato ex BE, ac erit rectangulum AEZ ad rectangulum AEΓ sicut quadratum ex BE ad rectangulum AEΓ. At vero quadratum ex BE est ad rectangulum AEΓ (per 12^am primi) sicut latus rectum AΔ ad Axem transversum AΓ: quare rectangulum AEZ est ad rectangulum AEΓ sicut ΔA ad AΓ; ac proinde ZE est ad EΓ sicut ΔA ad AΓ, hoc est sicut AΘ ad ΘΓ; ac componendo ZΓ erit ad ΓE sicut AΓ ad ΓΘ: unde consequitur ZA esse ad ΘE sicut AΓ ad ΓΘ. Sumptâ autem in communem altitudinem AE, erit rectangulum ZAE ad rectangulum ΘEA in eadem ratione, sive ut AΓ ad ΓΘ. Sed rectangulum ZAE æquale est quadrato ex AB; adeoque quadratum ex AB est ad rectangulum ΘEA ut AΓ ad ΓΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

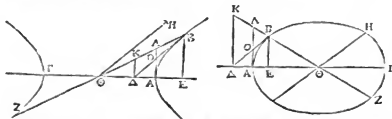
SI Axis alteruter Ellipseos producatur extra sectionem, ita ut Axis auctus ejusdemque pars extra sectionem fuerint inter se ut Axis ipse & latus ejus rectum inter se; & ab eo Vertice, cui contermina est portio illa quæ lateri recto respondet, ducatur recta ad punctum quodlibet in sectione, de quo demittatur ad Axem normalis: erit quadratum ductæ ad rectangulum sub interceptis inter normalem & utramque lateri recto respondentis rectæ extremitatem, sicut Axis sectionis ad portionem illam quæ Axi proportionalis est. Vocetur autem ea quæ lateri recto respondet recta Homologa.

Sit sectio Ellipsis, cujus Axis AΓ ac figura ΓΔ; sitque AΘ recta in Axe producto, ita ut ΓΘ sit ad ΘA sicut ΓA ad AΔ: &, ductâ utcunque rectâ AB, demittatur ad Axem normalis BE. Dico quadratum ex AB esse ad rectangulum AEΘ ut AΓ ad ΓΘ.

Fiat rectangulum AEZ æquale quadrato ex BE: erit igitur rectangulum AEZ ad

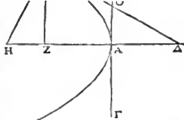
S occurrens, ac si a puncto contactus ducatur ordinatim applicata, ut & è centro recta Tangenti parallela, æqualis vero semidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per punctum contactûs ducitur: erit quadratum Tangentis ad quadratum semidiametri eidem parallelæ, sicut intercepta inter ordinatim applicatam & punctum occursûs axis & Tangentis, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & centrum sectionis.

Sit ΑΓ Axis Hyperbolæ vel Ellipseos, cujus centrum Θ; tangat autem sectionem recta ΒΔ in puncto Β, & sit ΒΕ ordinatim applicata ad diametrum ΓΑΕ; ac sit ΘΗ ipsi ΒΔ parallela, æqualis vero semidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per punctum contactûs Β ducitur. Dico quadratum ex ΒΔ esse ad quadratum ex ΘΗ sicut ΔΕ ad ΕΘ.



Per punctum Β ducatur diameter ΒΘΖ, ac sint rectæ ΑΛ, ΔΚ ipsi ΒΕ parallelæ, & fiat recta quædam Μ ad ΒΔ sicut ΟΒ ad ΒΛ: erit igitur recta Μ dimidium lateris recti, sive illius juxta quam possunt ordinatim ductæ ad diametrum ΒΘ; rectangulis, quæ eidem adjacent, excedentibus quidem in Hyperbolâ, *deficientibus vero in Ellipsi*, figuris similibus contentæ sub duplo ipsius Μ & diametro ΖΒ (uti constat ex 50^im^ primi). Recta autem ΘΗ dimidium est diametri conjugatæ cum diametro ΖΒ: erit igitur rectangulum sub ΘΒ & Μ (per 15^im^ primi & 20^im^ secundi) æquale quadrato ex ΘΗ. Verum ΟΒ est ad ΒΛ sicut Μ ad ΒΔ, hoc est ut ΒΔ ad ΒΚ; quare rectangulum sub Μ & ΒΚ æquale est quadrato ex ΒΔ. Sed rectangulum sub Μ & ΒΚ est ad rectangulum sub Μ & ΒΘ ut ΒΚ ad ΒΘ: est igitur quadratum ex ΒΔ ad rectangulum sub ΒΘ & Μ sicut ΒΚ ad ΒΘ; hoc est sicut

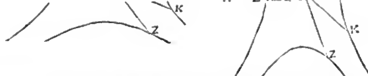
BΘE, adeoque BΘ ad BE erit ut HΔ ad ΔB; unde (per 49^{am} primi) ΔH erit dimidium lateris recti diametri BI. Sed rectangulum ſub ΔZ, ZH æquale eſt quadrato ex BZ, ob angulum ΔBH rectum & BZ perpendicularem; ac quadratum ex BZ æquale eſt rectangulo ΓAZ: quare rectangulum ΔZH æquale eſt rectangulo ΓAZ. Verum (per 35^{am} primi) recta ΔZ dupla eſt ipſius AZ, unde & AΓ dupla erit ipſius ZH: quadrupla igitur ipſius AZ dupla eſt rectæ ΔZ. Quocirca AΓ una cum quadrupla ipſius AZ ſimul, æqualis erit duplæ ipſarum ΔZ, ZH ſimul, ſive dupla ipſius ΔH. Demonſtravimus autem ΔH dimidium eſſe lateris recti ad diametrum BI: latus igitur rectum ad diametrum BI æquale eſt ipſi AΓ, lateri recto Axis, una cum quadruplâ ipſius AZ. Q. E. D.



PROPOSITIO VI.

SI ponantur in Axe Hyperbolæ rectæ duæ, utrique Axis termino adjacentes, & illi quam Homologam *diximus æquales ſimiliterque ſitæ; ac ſi ducantur quælibet duæ ſectionis diametri conjugatæ, ut & à Vertice principali ad occurſum ſectionis recta ipſi diametro ὀρθίᾳ parallela; & de puncto occurſus demittatur normalis ad Axem: erit potentiâ diameter tranſverſa ex his conjugatis ad diametrum ejus ὀρθίαν, ſicut intercepta inter normalem & terminum rectæ* Homologæ *Vertici remotiori* adjacentis *ad interceptam inter eandem normalem & terminum* Homologæ *Vertici propiori adjacentis: longitudine autem ratio diametri tranſverſæ ad latus ejus rectum, ſive ad eam juxta quam poſſunt ordinatim ductæ, hoc eſt diametro ὀρθίᾳ ſive ſecundæ parallelæ, eadem erit quam habent interceptæ modo dictæ inter ſe.*

Sit Hyperbolæ Axis ΓAM, Axis autem tranſverſus ſectionis AΓ & centrum Θ; ſitque utraque AN, ΓΞ æqualis rectæ Homologæ, ac per punctum Θ ducantur diametri

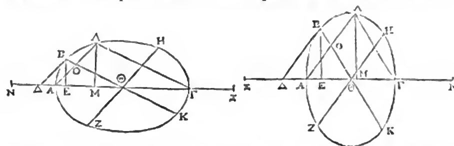


dem, rectangulum AMN est ad quadratum ex AA sicut ΓN ad AΓ. Verum ratio rectanguli ΓMΞ ad rectangulum AMN componitur ex ratione MΞ ad MN & ratione ΓM ad MA: ratio igitur quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH componitur ex rationibus AΓ ad AΞ, ΓN ad AΓ, MΞ ad MN, ΓM ad MA, & ratione AM ad MΓ. Ratio autem ex his omnibus conflata æqualis est rationi MΞ ad MN. Nam ratio ΓN ad AΓ conjuncta cum ratione AΓ ad AΞ fit ratio ΓN ad AΞ; ac ΓN æqualis est ipsi AΞ: Ratio autem ΓM ad MA composita cum ratione AM ad MΓ, fit ratio ipsius MΓ ad seipsam. Quare ratio ex his omnibus composita æqualis erit rationi reliquæ, nempe rationi MΞ ad MN. Est igitur quadratum ex ΘB ad quadratum ex ΘH sicut MΞ ad MN; adeoque quadratum ex BK ad quadratum ex ZH est ut MΞ ad MN. Porro quadratum ex BK (per 21^{am} primi) est ad quadratum ex ZH, sicut KB ad rectam juxta quam possunt ductæ à sectione ad diametrum KB, ipsi ZH parallelæ: erit igitur KB ad latus rectum ejus, sive ad eam juxta quam possunt ordinatim ad eandem applicatæ, sicut MΞ ad MN. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

S*I adjaceant utrique Axis Ellipseos Vertici rectæ æquales illi quam* Homologam *diximus, & habeantur in sectione quælibet diametri duæ conjugatæ; & si ducatur de sectionis Vertice recta alteri conjugatarum parallela, & ab occursu ejus cum sectione demittatur normalis ad Axem: erit potentiâ diameter ea cui non ducitur parallela ad alteram quæ ejusdem conjugata est, sicut intercepta*

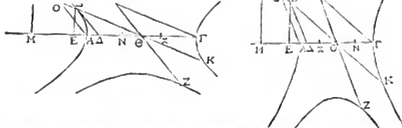
dratum ex ΑΛ; ac quadratum ex ΒΔ est ad quadratum ex ΘΗ sicut ΑΜ ad ΜΓ



erit quadratum ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ in ratione composita ex ratione quadrati ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΛ & ratione ΑΜ ad ΜΓ. Ratio autem quadrati ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΛ componitur ex ratione quadrati ex ΓΑ ad rectangulum ΓΜΞ, & ratione rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & ratione rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ: quare ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus quadrati ex ΓΑ ad rectangulum ΓΜΞ, & rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ, una cum ratione ΑΜ ad ΜΓ. Est autem quadratum ex ΓΑ ad rectangulum ΓΜΞ (per tertiam hujus) sicut ΑΓ ad ΑΞ; ac, per eandem, rectangulum ΑΜΝ est ad quadratum ex ΑΛ sicut ΓΝ ad ΑΓ. Ratio autem rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ componitur ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ: quapropter ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus ΑΓ ad ΑΞ, ΓΝ ad ΑΓ, ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ, & ex ratione ΑΜ ad ΜΓ. Est autem ratio ex his omnibus composita eadem ac ratio ΜΞ ad ΜΝ: nam ratio ΓΝ ad ΑΓ conjuncta cum ratione ΑΓ ad ΑΞ fit ratio ΓΝ ad ΑΞ, quæ quidem æqualitatis est; ac ratio composita ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ratione ΑΜ ad ΜΓ fit ratio ipsius ΓΜ ad seipsam: ratio igitur ex his omnibus composita erit ratio reliqua, nempe ΜΞ ad ΜΝ. Quocirca quadratum ex ΘΒ est ad quadratum ex ΘΗ ut ΜΞ ad ΜΝ. Quinetiam cum quadratum ex ΒΚ est ad quadratum ex ΖΗ sicut ΒΚ ad illam juxta quam possunt rectæ ipsi ΖΗ parallelæ, à sectione ad diametrum ΒΚ ductæ; erit ΒΚ ad rectam illam, nempe ad latus rectum ejus, sicut ΜΞ ad ΜΝ. Q. E. D.

Hinc manifestum est, quod si normalis de puncto Α cadat super centrum sectionis, diameter ΚΒ æqualis erit diametro ΖΗ, quia ΜΞ ipsi ΜΝ æqualis est.

PROPO-

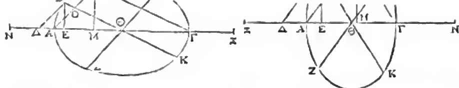


Demonstravimus autem rectangulum ΑΓΜ esse ad quadratum ex ΓΑ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΚ; quare quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum ΜΓΝ ad rectangulum ΓΜΞ sive ut ΓΝ ad ΜΞ. At vero ut ΓΝ ad ΜΞ ita rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; *adeoque quadratum ex* ΑΓ *est ad quadratum ex* ΒΚ *ut rectangulum sub* ΓΝ, ΜΞ *ad quadratum ex* ΜΞ. Jam ex duabus Propositionibus praecedentibus constat quadratum ex ΒΚ esse ad quadratum ex ΖΗ ut ΞΜ ad ΜΝ; adeoque ΒΚ est ad ΖΗ sicut ΞΜ ad ΞΙ mediam proportionalem inter ΞΜ & ΜΝ: unde ΒΚ erit ad ΒΚ, ΖΗ simul sicut ΜΞ ad ΜΙ sive ΜΞ, ΞΙ simul; ac quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul sumptis ut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ. Verum jam ostensum est quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΜ: ex aequo igitur quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul ut rectangulum sub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΜΙ. Sed ΜΙ aequalis est ipsi ΜΞ una cum ea quae potest rectangulum ΝΜΞ: quadratum igitur Axis ΑΓ est ad quadratum summae duarum diametrorum conjugatarum ΒΚ, ΖΗ simul, sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ; quae scilicet aequalis est utrique ΜΞ & ΞΙ simul, quarum ΞΙ potest rectangulum ΝΜΞ. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

Iisdem manentibus ac in sextâ & septimâ praecedentibus. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum differentiae inter ΒΚ, ΖΗ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiae inter ΜΞ & ΞΙ, sive illam quae potest rectangulum ΝΜΞ.

 Quoniam



potest rectangulum ΝΜΞ: quocirca quadratum ex ΑΓ est ad rectangulum sub diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ sicut ΝΓ ad illam quæ potest rectangulum ΝΜΞ Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Iisdem manentibus quæ in Hyperbolâ descripsimus ad Propositionem sextam hujus. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad quadrata ex ΒΚ & ΖΗ simul ut ΓΝ ad utramque ΝΜ, ΜΞ simul sumptam.

Quoniam enim (per 8vam hujus) quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut ΓΝ ad ΜΞ, ac quadratum ex ΒΚ est ad quadrata ex ΒΚ, ΖΗ simul sicut ΜΞ ad utramque ΜΞ, ΜΝ simul; per sextam enim hujus constat quadratum ex ΒΚ esse ad quadratum ex ΖΗ sicut ΜΞ ad ΜΝ: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ erit ad summam quadratorum ex diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ sicut ΓΝ ad utramque ΝΜ, ΜΞ simul sumptam. Q. E. D.

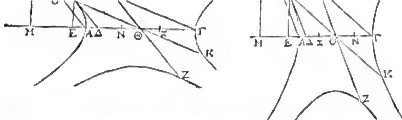
PROPOSITIO XII.

In omni Ellipsi quadrata ex quibusvis diametris conjugatis simul sumpta æqualia sunt quadratis Axium simul sumptis.

Adhibeatur Schema quo usi sumus in Propositione septima hujus, & sit alter Axium ΑΓ, ac diametri conjugatæ ΒΚ, ΖΗ; rectæ autem duæ Homologæ sint ΑΝ, ΓΞ.

Quoniam quadratum ex ΑΓ est ad quadratum Axis alterius Ellipseos (per 15am primi) sicut Axis transversus ΑΓ ad latus ejus rectum; & ΑΓ est ad latus ejus rectum sicut ΓΝ ad ΝΑ, quia recta ΑΝ Homologa est; & ΑΝ ipsi ΓΞ æqualis est: quadratum igitur ex ΑΓ est ad quadratum alterius Axis sicut ΝΓ ad ΓΞ, unde componendo quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum ex ΑΓ una cum quadrato alterius Axis sicut ΝΓ ad ΝΞ. Sed quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ (per demonstrata in 8va hujus) sicut ΝΓ ad ΜΞ: ac quadratum ex ΒΚ est ad quadrata ex ΒΚ, ΖΗ simul

sicut

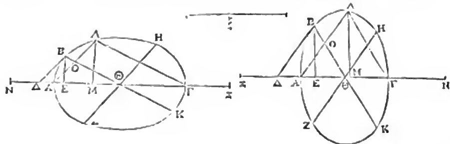


ac (per 6um hujus) quadratum ex BK est ad quadratum ex ZH ficut MΞ ad MN; adeoque per converfionem rationis quadratum ex BK est ad differentiam quadratorum ex BK & ZH ficut MΞ ad ΞN: ex æquo igitur quadratum ex AΓ est ad differentiam quadratorum ex BK, ZH ficut ΓN ad NΞ. Sed jam demonftratum est quadratum ex AΓ esse ad differentiam quadratorum utriusque Axis fectionis in eadem ratione ac ΓN ad NΞ: quapropter differentia inter quadrata Axium fectionis æqualis est differentiæ quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum BK, ZH. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

Quinetiam manente figura Ellipfeos quâ in Propofitione feptimâ hujus usi fumus. Dico quadratum Axis AΓ esse ad differentiam quadratorum diametrorum conjugatarum BK, ZH ficut NΓ ad duplam ipfius MΘ; pofito quod AΔ fuerit diametro ZH parallela, ac ΔM normalis ad Axem demiffa.

Quoniam enim (per octavam hujus) quadratum ex AΓ est ad quadratum ex BK ficut ΓN ad MΞ, ac (per hujus feptimam) quadratum ex BK est ad quadratum ex ZH ficut MΞ ad MN; unde, per converfionem rationis, quadratum ex BK erit ad differentiam quadratorum ex BK & ZH ficut MΞ ad differentiam inter MΞ & MN. Differentia autem ipfarum MΞ, MN dupla est rectæ MΘ: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad differentiam quadratorum ex BK, ZH ficut ΓN ad duplam ipfius MΘ. Q. E. D.



inter eam & ΜΝ, ac proinde earundem quadrata: nempe quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ ficut quadratum ex ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ. Sed quadratum ex ΑΓ eft ad quadratum ex ΒΚ (per 8^{vam} hujus) ficut rectangulum fub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: eft igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ ficut rectangulum fub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ & ΜΝ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

Iifdem manentibus quæ in fextâ & feptimâ hujus defcripfimus. Dico quadratum ex ΑΓ effe ad quadratum fummæ diametri ΒΚ & lateris ejus recti ξ ficut rectangulum fub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum fummæ ipfarum ΜΞ, ΜΝ fimul fumptarum.

Quoniam enim (per dictas 6^{tam} & 7^{mam}) ΒΚ eft ad ξ ficut ΜΞ ad ΜΝ, erit componendo quadratum ex ΒΚ ad quadratum utriufque ΒΚ & ξ fimul fumptæ, ficut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ipfis ΜΞ, ΜΝ fimul fumptis. Eft autem quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) ad quadratum ex ΒΚ ut rectangulum fub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: quocirca ex æquo quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum fummæ ipfarum ΒΚ & ξ ficut rectangulum fub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ipfis ΜΞ, ΜΝ fimul fumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Iifdem etiam manentibus. Dico quadratum Axis ΑΓ effe ad rectangulum fub diametro ΒΚ & latus ejus rectum ξ ficut ΝΓ ad ΜΝ.

Quoniam enim quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) eft ad quadratum ex ΒΚ ficut ΝΓ ad ΜΞ; & quadratum ex ΒΚ eft ad rectangulum fub ΒΚ & ξ ficut ΒΚ ad ξ, hoc eft (per 6^{tam} & 7^{mam} hujus) ficut ΜΞ ad ΜΝ: erit ex æquo quadratum ex ΑΓ ad rectangulum fub ΒΚ, ξ ficut ΝΓ ad ΜΝ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO XX.

Iisdem etiam manentibus. Dico quadratum ex ΑΓ esse ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ.

Quoniam enim (per 8^{vam} hujus) quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΒΚ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; ac (per sextam & septimam hujus) ΒΚ est ad ξ sicut ΜΞ ad ΜΝ: erit quadratum ex ΒΚ ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ sicut quadratum ex ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΞ & ΜΝ. Ex æquo igitur erit quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ ut rectangulum sub ΓΝ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

In Hyperbola si fuerit Axis transversus major Axe recto: diameter omnis transversa, è diametris conjugatis sectionis, major erit diametro ejus ὀρθίᾳ: & ratio Axis majoris ad minorem major erit ratione cujusvis alterius diametri transversæ ad diametrum ὀρθίαν conjugatam: ac ratio cujusvis diametri transversæ Axi majori propioris, ad diametrum cum eâ conjugatam major erit ratione diametri transversæ ab Axe remotioris ad diametrum ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes ΑΓ, ΙΟ, ac sint diametri duæ transversæ ΒΚ, ΖΗ: sit autem ΑΓ major quam ΙΟ. Dico diametrum ΒΚ majorem esse diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, pariterque ΖΗ majorem esse diametro ejus ὀρθίᾳ: rationem autem ΑΓ ad ΙΟ majorem esse ratione ΒΚ ad diametrum ὀρθίαν cum eâ conjugatam, vel ratione ΖΗ ad conjugatam ejus: denique rationem diametri ΒΚ Axi propioris ad conjugatam ejus majorem esse ratione diametri ΖΗ ad ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

Fiat

quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ, & ΜΞ est ad ΜΝ ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex conjugatâ illius: quapropter ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ major est ratione quadrati ex ΒΚ ad quadratum diametri cum eadem conjugatæ; ac major ratione quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ cum eadem: unde & laterum, sive ratio ΑΓ ad ΙΟ major est ratione ΒΚ ad suam conjugatam, vel ratione ΖΗ ad suam. Cum autem ratio ΞΕ ad ΕΝ, sive quadrati ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus, major sit ratione ΞΜ ad ΜΝ, sive quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus; erit ratio diametri ΒΚ ad ejusdem conjugatam major ratione diametri ΖΗ ad conjugatam ejus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI vero Axis transversus Hyperbolæ minor sit Axe ὀρθίῳ: erit quælibet diameter transversa minor diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ; ac ratio axis minoris ad majorem minor erit ratione cujusvis diametri transversæ ad suam ὀρθίαν conjugatam; & ratio diametri Axi minori propioris ad suam conjugatam minor erit ratione diametri remotioris ab eadem ad suam conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes ΑΓ, ΟΙ, & centrum Θ; sintque ΒΚ, ΖΗ duæ quælibet diametri: minor autem sit ΑΓ quam ΙΟ. Dico utramque ΒΚ, ΖΗ minorem esse diametro ὀρθίᾳ cum illis respective conjugatâ; ac rationem ΑΓ ad ΙΟ minorem esse ratione ΒΚ ad diametrum cum illâ conjugatam, ut & ratione ΖΗ ad conjugatam suam: & rationem ipsius ΒΚ ad suam conjugatam minorem esse ratione diametri ΖΗ ad suam conjugatam.

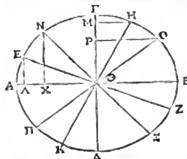
Fiat ΓΝ ad ΝΑ sicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum, & in eadem ratione capiatur ΑΞ ad ΞΓ; & erunt ΞΓ, ΑΝ rectæ quas Homologas vocamus: ducatur etiam ΑΔ parallela rectæ quæ contingit sectionem in puncto Β, ut & ΑΛ parallela tangenti sectionis in puncto Ζ; & de punctis Δ, Λ Axi normales sint ΔΕ, ΛΜ. Jam quadratum diametri ΒΚ est ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ (per 6^am hujus) sicut ΞΕ ad ΕΝ; pariterque quadratum ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus est ut ΞΜ ad ΜΝ: unde manifestum est diametrum ΒΚ minorem esse diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, ac diametrum ΖΗ minorem esse conjugatâ ejus. Quinetiam quia ΓΑ est ad latus ejus rectum sicut ΓΝ ad ΝΑ, ac ΞΑ est ad ΓΞ in eadem ratione; erit ΓΝ ipsi ΑΞ æqualis, eademque erit utriusque ratio ad rectam

quadratum quoque ex ZH est ad quadratum conjugatæ ejus ut ΘM ad MΘ. Utraque igitur diameter BK, ZH æqualis est conjugatæ suæ, ac proinde lateri ejus recto. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipsi: erit ratio diametri majoris ad conjugatam suam minorem, minor ratione Axis longioris ad Axem minorem; ac ratio diametri majoris, Axi sectionis longiori propioris, ad diametrum conjugatam ejus minorem, major erit ratione diametri majoris ab Axe longiore remotioris ad conjugatam suam.

Sit AB Axis longior Ellipseos, ac ΓΔ Axis minor; ac sint sectionis diametri conjugatæ EZ, HK; ΞN, ΠO, quarum EZ major sit conjugatâ ejus HK, ac ΞN major conjugatâ OΠ: & de punctis E, N ad Axem AB demittantur normales EΛ, NX; & de punctis H, O ducantur ad Axem ΓΔ normales HM, OP. Jam rectangulum AΘB (per 21[am] primi) est ad quadratum ex ΘΓ sicut rectangulum AΛB ad quadratum ex ΛE; rectangulum autem AΘB majus est quadrato ex ΘΓ: adeoque rectangulum AΛB majus est quadrato ex ΛE; unde AΘ major erit quam ΘE. [*Nam si fiat quadratum ex* ΘΛ *commune, rectangulum* AΛB *una cum quadrato ex* ΘΛ, *hoc est quadratum ex* ΘA, *majus erit quadratis ex* EΛ, ΛΘ *simul sumptis, sive quadrato ex* ΘE,] ac AB major erit quam ZE. Rectangulum etiam ΓΘΔ est ad quadratum ex ΘB sicut rectangulum ΓMΔ ad quadratum ex MH, & rectangulum ΓΘΔ minus est quadrato ex ΘB; quare



 rectan-

diametro ΝΞ. Pari argumento rectangulum ΓΡΔ est ad rectangulum ΓΜΔ (per 21[um] primi) sicut quadratum ex ΟΡ ad quadratum ex ΗΜ, & rectangulum ΓΡΔ minus est quadrato *ex* ΟΡ, *uti rectangulum* ΓΜΔ *minus est quadrato* ex ΗΜ; quare excessus quo rectangulum ΓΡΔ superat rectangulum ΓΜΔ minor est excessu quadrati ex ΟΡ supra quadratum ex ΗΜ. Excessus autem rectanguli ΓΡΔ supra rectangulum ΓΜΔ æqualis est excessui quadrati ex ΘΜ supra quadratum ex ΘΡ; quare excessus quadrati ex ΘΜ supra quadratum ex ΘΡ minor est excessu quadrati ex ΟΡ supra quadratum ex ΗΜ; atque adeo quadrata ex ΘΜ, ΜΗ simul sumpta minora sunt quadratis ex ΘΡ, ΡΟ simul sumptis: quapropter recta ΘΗ minor est quam ΘΟ, diameterque ΗΚ minor diametro ΟΠ. Quoniam vero diameter ΕΖ conjugata cum ΗΚ major est diametro ΞΝ conjugatâ cum ΟΠ, ac ΗΚ minor est quam ΟΠ; erit ratio diametri ΕΖ ad conjugatam ejus ΗΚ major ratione diametri ΞΝ ad conjugatam ejus ΟΠ.

Hinc etiam manifestum est excessum Axis ΑΒ supra Axem ΓΔ majorem esse excessu diametri ΕΖ supra ΗΚ, excessumque ipsius ΕΖ supra ΗΚ majorem esse excessu diametri ΞΝ supra ΟΠ. Excessus quoque quadrati ex ΑΒ supra quadratum ex ΓΔ major erit excessu quadrati ex ΕΖ supra quadratum ex ΗΚ, qui major est excessu quadrati ex ΞΝ supra quadratum ex ΟΠ.

Dico quoque illam quæ cum ΑΒ continet figuram sectionis minorem esse eâ quæ cum ΕΖ continet figuram sectionis; illam etiam quæ cum ΕΖ continet figuram sectionis minorem esse eâ quæ cum ΞΝ ejusdem figuram continet: ut & illam quæ cum ΞΝ continet figuram ejus minorem esse eâ quæ cum Axe breviore ΓΔ sectionis figuram continet. Nam Axis ΑΒ major est quam ΟΠ, & ΟΠ quam ΗΚ, & ΗΚ quam ΓΔ; ac ΞΝ minor est quam ΕΖ, & ΕΖ quam ΑΒ: quadratum autem ex ΑΒ æquale est rectangulo sub ΓΔ & eâ quæ cum ΓΔ continet figuram sectionis, per 15[um] primi; & quadratum ex ΟΠ æquale est figuræ sectionis quæ fit super ΞΝ; *& quadratum ex* ΗΚ *æquale est figuræ sectionis super* ΕΖ factæ; uti quadratum ex ΓΔ æquale est figuræ super Axe ΑΒ factæ. *Figura igitur major applicata ad rectam minorem producit altitudinem majorem, quam quæ producitur applicatione figuræ minoris ad majorem.* Ergo constat Propositio.

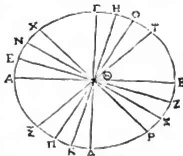
PROPOSITIO XXV.

IN Hyperbola summa duorum Axium minor est summâ duarum quarumvis diametrorum conjugatarum: & diameter omnis transversa, quæ propior est Axi transverso sectionis, una cum suâ conjugatâ

diametris conjugatis ab iisdem remotioribus simul: diametri autem conjugatæ, quæ sunt inter se æquales, simul sumptæ majorem efficiunt summam quam diametri quævis aliæ conjugatæ.

Sit Ellipseos Axis major ΑΒ, minor ΓΔ: sint etiam ΖΕ, ΚΗ; ΝΞ, ΟΠ; ΤϚ, ΧΡ diametri conjugatæ; ac sit ΕΖ major quam ΚΗ, & ΝΞ major quam ΟΠ; ΧΡ vero æqualis sit diametro ΤϚ. Dico rectam utrique Axi ΑΒ, ΓΔ æqualem minorem esse rectâ diametris ΕΖ, ΗΚ æquali; ut & rectâ utrisque ΝΞ, ΟΠ æquali: omnium autem maximam summam esse diametrorum æqualium ΧΡ, ΤϚ.

Quoniam enim ratio ΑΒ ad ΓΔ (per 24[am] hujus) major est ratione ΕΖ ad ΚΗ, erit ratio summæ quadratorum ex ipsis ΑΒ, ΓΔ ad quadratum rectæ compositæ ex utrâque ΑΒ, ΓΔ (*per Lemm.* VIII. *Abdol.*) major ratione summæ quadratorum ex ΕΖ, ΚΗ ad quadratum ipsarum ΕΖ, ΚΗ simul sumptarum. Quadrata autem ex ΕΖ, ΚΗ simul sumpta (per 12[am] hujus) æqualia sunt utrique quadrato ex ΑΒ, ΓΔ simul: quadratum igitur compositæ ex ΑΒ, ΓΔ simul minus est quadrato compositæ ex ipsis ΖΕ, ΚΗ. Summa igitur Axium ΑΒ, ΓΔ minor est recta æquali diametris ΕΖ, ΚΗ simul sumptis. Pari modo demonstrabitur summam ipsarum ΕΖ, ΚΗ minorem esse *diametris* ΝΞ, ΟΠ *simul sumptis*; *ipsasque* ΝΞ, ΟΠ *simul* minores esse diametris æqualibus conjugatis ΧΡ, ΤϚ simul sumptis. Q. E. D.

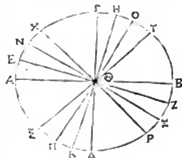


PROPOSITIO XXVII.

In omni Ellipsi vel Hyperbola, cujus Axes sunt inæquales, excessus Axis majoris supra minorem major est excessu cujusvis alterius diametri supra conjugatam suam: & excessus diametri

IN omni Hyperbola vel Ellipsi, rectangulum sub Axibus contentum minus erit contento sub quibuslibet aliis diametris conjugatis: contentaque sub diametris conjugatis, quæ propiores sunt sectionis Axibus, minora erunt contentis sub conjugatis remotioribus ab iisdem.

Hoc autem in Hyperbola ex præcedentibus manifestum est; nam Axis uterque minor est qualibet aliâ diametro eidem adjacente: In Ellipsi vero hunc in modum demonstrabitur. Sit AB Axis major & ΓΔ Axis minor sectionis; sintque diametri ejus conjugatæ EZ, KH; NΞ, OΠ; *conjugatæ vero æquales* XP, TΞ. Dico rectangulum sub AB, ΓΔ minus esse rectangulo sub EZ, KH; & rectangulum sub ΞN, OΠ minus esse rectangulo contento sub XP, TΞ.



Quoniam enim Axes AB, ΓΔ simul sumpti (per 26^am hujus) minores sunt diametris conjugatis EZ, KH simul; quadratum etiam summæ ipsarum AB, ΓΔ minus erit quadrato ex EZ, KH simul sumptis. Quadrata autem ex AB & ΓΔ simul (per 12^mam hujus) æqualia sunt summæ quadratorum ex EZ, KH: quibus utrinque sublatis, duplum rectangulum sub AB, ΓΔ minus erit duplo rectangulo sub EZ, KH; adeoque rectangulum sub AB, ΓΔ minus est rectangulo sub EZ, KH. Pari argumento constabit rectangulum sub EZ, KH minus esse contento sub NΞ, OΠ, ac rectangulum sub NΞ, OΠ minus esse rectangulo sub *æqualibus conjugatis* XP TΞ contento; *quod proinde rectangulum maximum est*. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

IN Hyperbola differentia inter figuram sectionis super diametrum quamlibet factam & ejusdem diametri quadratum ubique æqualis est. Vide figuram Prop. XXVII.

Sit Hyperbolæ Axis AΓ & centrum Θ; sint autem in eâ diametri conjugatæ BK, ZH; ΞT, OI. Dico differentiam inter figuram sectionis super AΓ factam & quadratum ex AΓ æqualem esse differentiæ inter figuram sectionis super BK factam

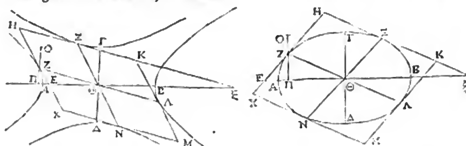
&

facta una cum quadrato ex BK æqualis est figuræ super ξT factæ una cum quadrato ex ξT. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

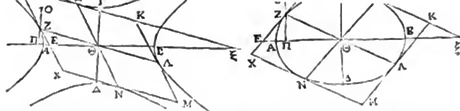
SI ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipsi, vel inter sectiones oppositas conjugatas; erit parallelogrammum contentum sub his diametris æquale rectangulo sub ipsis Axibus facto: modo anguli ejus æquales sint angulis ad centrum sectionis à diametris conjugatis comprehensis.

Sit Ellipseos vel Sectionum oppositarum conjugatarum centrum Θ, Axes autem sint AB, ΓΔ, ac diametri quævis conjugatæ ZΛ, ΞN. Per puncta Z, Λ; Ξ, N ducantur tangentes HX, KM; HK, XM; erunt igitur HX, KM diametro ΞN parallelæ, ut rectæ HK, XM (per 6^tam & 20^mam secundi) diametro ZΛ parallelæ sunt.: erit quoque HM parallelogrammum, cujus anguli æquales sunt angulis à diametris conjugatis ZΛ, ΞN ad centrum Θ contentis. Dico ideo parallelogrammum HM æquale esse rectangulo sub Axibus AB, ΓΔ contento.



Occurrant Axi transverso AB *parallelæ* HX, HK *in punctis* E & ξ; & de puncto Z demittatur ad Axem AΘB normalis ZΠ; ac fiat ΠO media proportionalis inter

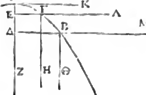
 ipsas



planum ΘH est ad duplum trianguli ΞΘξ ficut HΞ ad Ξξ, five ut ΘE ad Θξ.] Porro cum OΠ media proportionalis fit inter EΠ & ΠΘ; erit duplum trianguli ΘZE ad parallelogrammum HΘ ut OΠ ad ΠΘ. Verum OΠ est ad ΠΘ ut rectangulum sub OΠ, ΘE ad rectangulum ΠΘE: ac jam demonstravimus rectangulum sub OΠ, ΘE esse ad rectangulum ΠΘE sicut rectangulum sub ΠZ, ΘE ad rectangulum AΘΓ: duplum igitur trianguli ΘZE *est ad parallelogrammum* ΘH sicut rectangulum sub ZΠ, ΘE ad rectangulum AΘΓ. Sed duplum trianguli ΘZE æquale est rectangulo sub ZΠ, ΘE: quapropter parallelogrammum ΘH æquale est rectangulo AΘΓ; ac quadruplum plani ΘH, nempe parallelogrammum HM, æquale est quadruplo rectanguli AΘΓ, hoc est rectangulo contento sub Axibus AB, ΓΔ. Q. E. D.

Demonstravimus itaque, in præcedentibus Propositionibus, quod in omni Hyperbola quadrata Axium simul sumpta minora sunt quadratis ex quibusvis aliis diametris conjugatis sectionis: quodque quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum minora sunt quadratis diametrorum conjugatarum ab Axibus remotiorum: quodque in omni Ellipsi differentia inter quadrata Axium major est differentia quadratorum quarumvis diametrorum conjugatarum: quodque differentia inter quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum major est differentia quadratorum ex diametris conjugatis ab iisdem remotioribus: quodque in Hyperbola, si Axis, sive latus transversum figuræ sectionis super Axem factæ, major fuerit latere ejus recto, latus transversum figuræ super diametrum quamvis aliam factæ majus erit latere recto ejusdem: quodque ratio Axis transversi ad ejusdem latus rectum major erit ratione cujusvis alterius diametri transversæ ad latus rectum ejusdem: quodque ratio hæc, in figuris super diametros Axi propiores factis, major est ratione eâ in figuris super remotiores ab Axe factis. Si vero Axis, sive latus transversum figuræ sectionis, minor fuerit latere ejus recto; cæteræ diametri transversæ minores erunt earundem lateribus rectis; ac ratio Axis transversi

plicatæ, sint AK, ΓΛ, BM. Dico AK minorem esse quam ΓΛ, ac ΓΛ minorem quam BM.

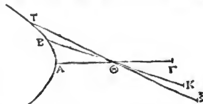


De punctis B, Γ demittantur ad Axem normales BΔ, ΓE; & recta ΓΛ (per quintam hujus) æqualis erit ipsi AK una cum quadruplo ipsius AE. Pariter BM æqualis erit ipsi AK cum quadruplo ipsius AΔ. Quare AK minor est quam ΓΛ, ac ΓΛ quam BM. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

IN Hyperbola, si latus transversum figuræ sectionis super Axem factæ non sit minus latere ejus recto; erit latus illud rectum figuræ super Axem minus latere recto cujusvis alterius figuræ super aliam quamvis diametrum sectionis factæ: & latus rectum figuræ super diametrum Axi propiorem factæ minus erit latere recto figuræ super remotiorem ab Axe factæ.

Sit Hyperbolæ Axis AΓ & centrum Θ; diametri autem aliæ sint KB, Tξ. Dico latus rectum figuræ sectionis super AΓ factæ minus esse latere recto figuræ super BK factæ; & latus rectum super BK factæ minus esse latere recto figuræ sectionis super Tξ factæ.



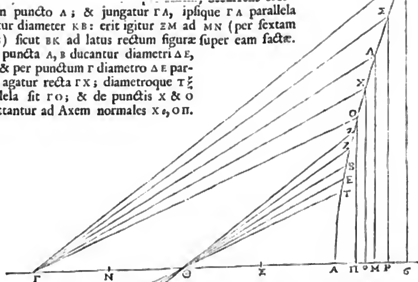
Ponatur imprimis Axis AΓ æqualis lateri recto figuræ sectionis super AΓ factæ; & erit BK æqualis lateri recto figuræ super illam factæ, per 23^{tiam} hujus & 16^{mam} primi. Sed AΓ minor est quam BK: latus igitur rectum Axis AΓ minus est latere recto diametri BK. Quoniam etiam diameter Tξ æqualis est lateri recto figuræ super eam factæ; ac diameter KB minor est diametro ξT: latus rectum diametri KB minus erit latere recto ad diametrum ξT.

 Si

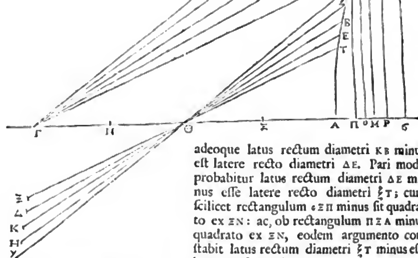
quadrato ex AN; [*quia ratio ipsarum* MN, NA *simul sumptarum ad rectam* AN *major est ratione ipsius* AN *ad* AΞ:] rectangulum igitur sub MN, NA simul & AM ad rectangulum sub MN, NA simul & AΞ, hoc est MA ad AΞ, est in minore ratione quam contentum sub MN, NA simul & AM ad quadratum ex AN: ac *componendo* ratio MΞ ad ΞA minor erit ratione rectanguli sub MN, NA simul & AM una cum quadrato ex AN ad quadratum ex AN. Est autem rectangulum sub MN, NA simul & AM una cum quadrato ex AN æquale quadrato ex MN, *per* 6. II. *Elem.*: quare ratio MΞ ad ΞA minor est ratione quadrati ex MN ad quadratum ex AN. Cum autem MΞ est ad ΞA ut rectangulum sub ΓN, MΞ ad rectangulum sub ΓN, AΞ; erit ratio rectanguli sub ΓN, MΞ ad rectangulum sub ΓN, AΞ minor ratione quadrati ex MN ad quadratum ex AN; ac permutando ratio rectanguli sub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN minor erit ratione rectanguli sub ΓN, AΞ ad quadratum ex AN. Sed rectangulum sub ΓN, MΞ (per 15^{tam} hujus) est ad quadratum ex MN, ut quadratum ex AΓ ad quadratum lateris recti diametri KB: ac rectangulum sub ΓN, AΞ est ad quadratum ex AN (per jam demonstrata) sicut quadratum Axis AΓ ad quadratum lateris recti figuræ Axis; ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum lateris recti diametri KB minor est ratione ejusdem quadrati ex AΓ ad latus rectum figuræ Axis: quare latus rectum Axis AΓ minus est latere recto diametri KB.

Quinetiam cum AN non sit major duplo ipsius AΞ, erit MN minor duplo rectæ MΞ; ipsæ autem EN, NM simul sumptæ majores sunt duplo rectæ MN; quare rectangulum sub MΞ & EN, NM simul majus est quadrato ex MN. Hinc ratio rectanguli sub NE, MN simul & ME ad rectangulum sub NE, MN simul & MΞ minor est ratione rectanguli sub NE, MN simul & ME, *ad quadratum ex* MN; *adeoque ratio* ME *ad* MΞ *minor est ratione rectanguli sub* NE, MN *simul &* ME *ad quadratum ex* MN; *ac componendo ratio* EΞ *ad* MΞ *minor erit ratione rectanguli sub* EN, NM *simul &* EM una cum quadrato ex MN, *hoc est* (*per* 6. II. *Elem.*) *quadrati ex* EN, ad quadratum ex MN: ratio itaque EΞ ad ΞM minor est ratione quadrati ex EN ad quadratum ex MN. Sed EΞ est ad ΞM ut rectangulum sub ΓN, ΞE ad rectangulum sub ΓN, MΞ; quare ratio rectanguli sub ΓN, ΞE ad rectangulum sub ΓN, ΞM minor

oni in puncto Λ; & jungatur ΓΛ, ipsique ΓΛ parallela ducatur diameter KB: erit igitur ΞM ad MN (per sextam hujus) sicut BK ad latus rectum figuræ super eam factæ. Inter puncta Λ, B ducantur diametri ΔE, Tξ; & per punctum Γ diametro ΔE parallela agatur recta ΓX; diametroque Tξ parallela sit ΓO; & de punctis X & O demittantur ad Axem normales Xo, OΠ.



Quoniam vero MΞ æqualis est ipsi ΞN, erit rectangulum MΞo minor quadrato ex ΞN; ac adjecto utrinque communi rectangulo sub No, ΞN simul sumptis & oΞ, erit rectangulum sub MN, No simul & oΞ minus quadrato ex No, *per* 6. II. *Elem.* Est igitur ratio rectanguli sub MN, No simul & Mo ad rectangulum sub MN, No simul & Ξo major ratione rectanguli sub MN, No simul & Mo ad quadratum ex No. Sed rectangulum sub MN, No simul & Mo est ad rectangulum sub MN, No simul & Ξo sicut



adeoque latus rectum diametri ΚΒ minus est latere recto diametri ΔΕ. Pari modo probabitur latus rectum diametri ΔΕ minus esse latere recto diametri ξΤ; cum scilicet rectangulum εΞΠ minus sit quadrato ex ΞΝ: ac, ob rectangulum ΠΞΑ minus quadrato ex ΞΝ, eodem argumento constabit latus rectum diametri ξΤ minus esse latere recto Axis ΑΓ.

Porro si ducantur diametri ΖΗ, τγ remotiores ab Axe quam ΚΒ. Dico latus rectum diametri ΚΒ minus esse latere recto diametri ΖΗ; ac latus rectum diametri ΖΗ minus esse latere recto diametri τγ. Per punctum Γ ducantur ipsis ΖΗ, τγ parallelæ, ut ΓΣ, Γδ; & de punctis Σ, δ demittantur normales ad Axem ΣΡ, δσ: erit igitur rectangulum ΡΞΜ majus quadrato ex ΝΞ; ac, procedendo juxta modum nuper traditum, demonstrabitur rationem rectanguli sub ΓΝ, ΞΡ ad quadratum ex ΝΡ minorem esse ratione rectanguli sub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΝΜ; unde manifestum est latus rectum diametri ΖΗ majus esse latere recto diametri ΚΒ. Cumque rectangulum σΞΡ majus est quadrato ex ΞΝ, erit latus rectum diametri τγ majus latere recto diametri ΖΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

Si in Hyperbola latera figuræ sectionis super Axem factæ fuerint inæqualia; differentia laterum figuræ Axis major erit differentiâ laterum figuræ super quamvis aliam diametrum factæ: ac differentia hæc laterum figuræ major est in diametris Axi propioribus quam in remotioribus.

Sic

nor est differentiâ inter ΑΓ & latus rectum figuræ ejus.

Pari modo cum ΓΛ parallela sit diametro ΚΒ, ac ΑΜ normalis sit super Axem, rectangulum sub ΓΝ, ΞΜ erit ad *quadratum* differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ (*sive ad quadratum ex* ΞΝ) sicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & latus rectum ejus, per 16^am hujus. Sed ratio rectanguli sub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΝ major est ratione rectanguli sub ΓΝ, ΞΠ ad idem quadratum ex ΞΝ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΚΒ & ejus latus rectum major est ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ *inter* ΔΕ & latus ejus rectum. Quapropter differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum minor est differentiâ *inter* ΔΕ *& latus ejus rectum*; *& differentia inter* ΔΕ *& latus ejus rectum minor est differentia* inter ΑΓ & latus ejus rectum. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

In omni Ellipsi, si figuræ sectionis fiant super diametros lateribus suis rectis majores: erit differentia laterum figuræ super Axem majorem factæ major differentiâ laterum figuræ super quamvis aliam ex diametris illis factæ; ac differentia hæc in diametris Axi propioribus major erit quam in remotioribus: differentia autem laterum figuræ, in diametris lateribus suis rectis minoribus, maxima fit inter Axem minorem & latus ejus rectum: quæque Axi minori propiores sunt diametri majorem habent hanc differentiam quam ab eodem remotiores: differentia etiam inter latera figuræ Axis minoris major *est quam inter latera figuræ Axis majoris.*

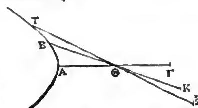
Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ac sint diametri aliæ ΚΒ, ΖΗ; quarum utraque major sit latere suo recto. Dico differentiam inter ΑΓ & latus ejus rectum majorem esse differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum; differentiam

Axis ΔE majus sit quam AΓ; erit differentia inter ΔE & latus ejus rectum major differentia inter AΓ & latus ejus rectum. [*Per conversionem enim rationis latus rectum Axis ΔE est ad differentiam inter ΔE & latus ejus rectum sicut AΓ ad differentiam inter latera figuræ Axis AΓ, ac permutando.*] Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in Hyperbolâ latus transversum figuræ Axis non minus fuerit tertiâ parte lateris ejus recti: summa utriusque lateris figuræ sectionis, super quamlibet diametrum præter Axem factæ, major erit summâ laterum figuræ Axis simul sumptorum; ac summa laterum figuræ super diametrum Axi propiorem factæ minor erit quam latera figuræ diametri remotioris simul sumpta.

Sit AΓ Hyperbolæ Axis, qui non sit minor tertiâ parte lateris ejus recti; ac sint KB, ξT diametri duæ quævis aliæ. Dico quod latera duo figuræ Axis AΓ simul sumpta minora sunt lateribus figuræ diametri KB simul sumptis, quodque latera figuræ ipsius KB minora sunt lateribus figuræ diametri ξT.



Primum sit AΓ non minor latere ejus recto: & diameter KB major erit Axe AΓ, & diameter ξT major diametro KB; latus etiam rectum diametri ξT (per 33[um] hujus) majus erit latere recto diametri KB; & latus rectum diametri KB majus erit latere recto Axis AΓ: diameter igitur ξT una cum latere ejus recto major erit diametro KB unà cum latere ejus recto: ac diameter KB unà cum latere ejus recto major erit Axe AΓ unà cum latere ejus recto. Latera igitur, figuram super diametrum ξT factam continentia, simul sumpta majora sunt lateribus figuræ diametri KB: atque hæc latera majora sunt utroque latere figuræ super AΓ factæ simul sumpto. Q. E. D.

PROPO-

... minus. Verum rectangulum sub ΓN, MΞ (per 17um hujus) est ad quadratum ex MN, MΞ simul, ut quadratum ex AΓ ad quadratum diametri KB unà cum latere ejus recto simul sumptæ; ac rectangulum sub ΓN, AΞ est ad quadratum ex NA, AΞ simul, sicut quadratum Axis AΓ ad quadratum ex AΓ una cum latere ejus recto simul sumpto: ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri KB minor est ratione ejusdem quadrati ex AΓ ad quadratum summæ laterum figuræ super Axem AΓ factæ; ac proinde summa laterum figuræ diametri KB major est summâ laterum figuræ Axis AΓ.

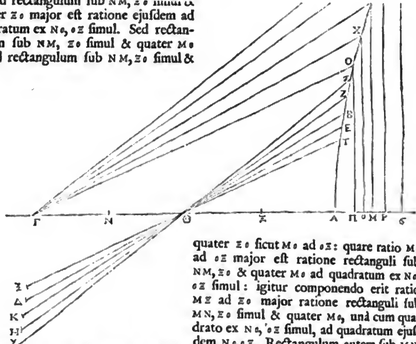
Quinetiam cum MΞ major sit quartâ parte ipsarum MN, MΞ simul sumptarum, erit quadruplum rectanguli sub MN, MΞ *simul* & MΞ majus quadrato ex MN, MΞ simul sumptis: unde argumento supra usitato probabitur, rationem rectanguli sub ΓN, ΞE ad quadratum ex NE, EΞ simul minorem esse ratione rectanguli sub ΓN, MΞ ad quadratum ipsarum MN, MΞ simul. Sed rectangulum sub ΓN, ΞE (per 17um hujus) est ad quadratum ex NE, EΞ simul, ut quadratum ex AΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ξT; ac rectangulum sub ΓN, MΞ est ad quadratum ex ipsis MN, MΞ simul, sicut quadratum ex AΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri BK: ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri ξT minor est ratione ejusdem ad quadratum summæ laterum figuræ diametri KB. Quapropter latera figuræ super diametrum ξT factæ simul sumpta majora sunt lateribus figuræ super diametrum KB factæ simul; prout latera figuræ super KB majora sunt lateribus figuræ Axis simul sumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

SI vero in Hyperbolâ Axis transversus minor fuerit tertiâ parte lateris ejus recti datur: ab utrâque Axis parte diameter una tertiæ parti lateris sui recti æqualis, cujus latera figuræ simul

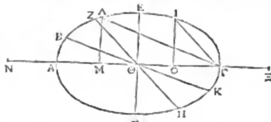
 sumpta

M o ad rectangulum sub N M, Z o simul & quater Z o major est ratione ejusdem ad quadratum ex N o, o Z simul. Sed rectangulum sub N M, Z o simul & quater M o est ad rectangulum sub N M, Z o simul & quater Z o sicut M o ad o Z: quare ratio M o ad o Z major est ratione rectanguli sub N M, Z o & quater M o ad quadratum ex N o, o Z simul: igitur componendo erit ratio M Z ad Z o major ratione rectanguli sub M N, Z o simul & quater M o, una cum quadrato ex N o, o Z simul, ad quadratum ejusdem N o, o Z. Rectangulum autem sub M N, Z o simul & quater M o una cum quadrato ex N o, o Z simul (*per Lemma* I. *Abdol.*) æquale est quadrato ex N M, M Z simul; quare ratio M Z ad Z o major est ratione quadrati ex N M, M Z simul ad quadratum ex N o, o Z simul. Verum M Z est ad Z o sicut rectangulum sub Γ N, M Z ad rectangulum sub Γ N, Z o; quare ratio rectanguli sub Γ N, M Z ad rectangulum sub Γ N, Z o major est ratione quadrati ex M N, M Z simul ad quadratum ex N o, o Z: ac permutando ratio rectanguli sub Γ N, M Z ad quadratum ex M N, M Z simul major est ratione rectanguli sub Γ N, Z o ad quadratum ex N o, o Z simul. Est autem rectangulum sub Γ N, M Z ad quadratum ex M N, M Z simul (per 17^am hujus) sicut quadratum ex A Γ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri K B: ac (per eandem 17^am) rectangulum sub Γ N, Z o est ad quadratum ex N o, o Z simul sicut quadratum ex A Γ ad quadratum summæ laterum figuræ diametri sectionis Δ E. Ratio igitur quadrati ex A Γ ad quadratum summæ diametri



... latera vero figuræ Axis minoris simul sumpta majora sunt lateribus figuræ super quamlibet aliam diametrum factæ.

Sit ΑΓ Axis major Ellipseos, minor vero ΔΕ; diametri autem aliæ sint ΚΒ, ΖΗ, quibus parallelæ ducantur ΓΛ, ΓΙ; & ad Axem demittantur normales ΛΜ, ΙΟ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ, ut & ΑΞ ad ΞΓ, sicut Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis: & erit quadratum ex ΑΓ ad quadratum rectæ ipsi ΑΓ una cum latere ejus recto simul æqualis, sicut quadratum ex ΝΓ, sive rectangulum sub ΝΓ, ΑΞ, ad quadratum ex ΝΞ. Sed quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex ΔΕ sicut ΝΓ ad ΓΞ, quia (per 15^tam primi) demonstratum est quadratum ex ΑΓ esse ad quadratum ex ΔΕ sicut ΑΓ ad latus ejus rectum; ΝΓ autem est ad ΓΞ sicut rectangulum sub ΝΓ, ΓΞ ad quadratum ex ΓΞ: quadratum etiam ex ΔΕ est ad quadratum rectæ æqualis utrisque ΔΕ & lateri recto ejusdem simul, ut quadratum ex ΓΞ est ad quadratum ex ΝΞ, per eandem 15^am primi: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ est ad quadratum ex utrâque ΔΕ & latere recto ejusdem, sicut rectangulum sub ΝΓ, ΓΞ ad quadratum ex ΝΞ. Sed rectangulum sub ΝΓ, ΑΞ est ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum compositæ ex ΑΓ & latere ejus recto: ratio igitur Axis ΑΓ ad ΑΓ una cum latere ejus recto simul major est ratione ipsius ΑΓ ad ΔΕ una cum latere recto ejusdem ΔΕ simul. Latera igitur figuræ Axis majoris ΑΓ minora sunt lateribus figuræ Axis minoris ΔΕ simul sumptis.

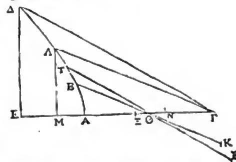


Jam rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ est ad quadratum ex ΝΞ (per 17^am hujus) sicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ una cum latere ejus recto; quare ratio ipsius ΑΓ ad ΑΓ una cum latere ejus recto major est ratione ejusdem ΑΓ ad ΚΒ cum latere ejus recto simul: ac proinde latera figuræ super ΑΓ factæ minora sunt lateribus figuræ diametri ΚΒ. Quinetiam cum rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ est

 ad

figuras quam quæ ab eodem remotiores sunt.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, diametri autem quævis aliæ ΚΒ, ΞΤ. Dico figuram super ΑΓ factam minorem esse factâ super quamlibet aliam diametrum præter Axem: ac figuram diametri ΚΒ minorem esse figura diametri ΞΤ.



Ducantur rectæ ΓΛ, ΓΔ diametris ΚΒ, ΞΤ parallelæ; ac demittantur normales ad Axem ΛΜ, ΔΕ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ sicut ΑΓ ad latus rectum figuræ super ΑΓ factæ: erit igitur ΓΝ ad ΝΑ ut quadratum ex ΑΓ ad figuram sectionis super Axem factam; ac ΓΝ est ad ΝΜ (per 18^{vam} hujus) sicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ. Ratio autem ΓΝ ad ΝΑ major est ratione ejusdem ad ΝΜ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram super ΑΓ factam major est ratione ejusdem ad figuram super ΚΒ factam: adeoque figura Axis ΑΓ minor est figura diametri ΚΒ. Porro (per 18^{vam} hujus) ΓΝ est ad ΝΕ sicut quadratum ex ΑΓ ad figuram super ΞΤ factam, ac ΓΝ est ad ΝΜ sicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ; ratio autem ΓΝ ad ΝΜ major est ratione ejusdem ad ΝΕ: erit igitur ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ major ratione ejusdem ad figuram diametri ΞΤ; ac proinde figura super ΚΒ facta major est factâ super ΞΤ. Q. E. D.

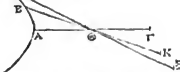
PROPOSITIO XLIII.

Figura Axis majoris in Ellipsi minor est figurâ cujuslibet alterius diametri; maxima autem figura ea est quæ fit super Axem minorem: figura quoque diametri Axi majori propioris minor est factâ super remotiorem ab eodem. Vide figuram Prop. XLI.

Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor ΔΕ, ac aliæ quævis diametri ΚΒ, ΖΗ. Dico figuram Axis ΑΓ minorem esse figurâ diametri ΚΒ; ac figuram ipsius ΚΒ minorem esse factâ super diametrum ΖΗ: denique figuram ipsius ΖΗ minorem esse figurâ super Axem minorem ΔΕ factâ.

Ducantur

metri KB simul sumptis; quadrata vero laterum figuræ super KB factæ simul minora esse quadratis laterum figuræ diametri ξT.



Imprimis autem sit AΓ non minor latere ejus recto; ac (per 33^{am} hujus) erit latus rectum diametri KB majus latere recto Axis AΓ; & (per eandem) latus rectum diametri ξT majus erit latere recto diametri KB; AΓ autem minor est quam KB, ac KB quam ξT: proinde quadrata laterum figuræ Axis AΓ minora sunt quadratis laterum figuræ diametri KB; ac quadrata laterum figuræ diametri KB minora sunt quadratis laterum figuræ ξT simul sumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV.

SI vero Axis minor fuerit quam latus ejus rectum, quadratum autem ejus non minus dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum. Dico eadem etiam consequi quæ in proximâ Propositione demonstravimus.

Maneat figura Propositionis XLII. præcedentis; ac fiat ΓN ad NA ut & AΞ ad ΞΓ in ratione ipsius AΓ ad latus ejus rectum: duplum igitur quadrati ex AΞ non minus erit quadrato ex NΞ (quia AΞ ipsi ΓN æqualis est, ac AΓ est ad latus ejus rectum sicut AΞ ad ΞΓ; ac quadratum ex AΓ non minus est dimidio quadrati differentiæ inter AΓ & latus ejus rectum.) Ductis autem sectionis diametris KB, ξT, parallelæ agantur rectæ ΓΔ, ΓA; & demittantur ad Axem normales ΔE, AM.

Quoniam vero AΓ est ad latus ejus rectum sicut ΓN ad NA, atque etiam ut AΞ ad ΞΓ; ac duplum quadrati ex AΞ non minus est quadrato ex ΞN: duplum rectangulum sub MΞ, AΞ majus erit quadrato ex ΞN. Adjiciatur utrinque duplum rectangulum sub NA, AΞ; & duplum rectangulum sub MN, AΞ simul & AΞ majus erit duplo rectangulo sub NA, AΞ una cum quadrato ex ΞN simul: hoc est, majus erit quadratis ex NA, AΞ simul, *per* 7.II. *El.* Quocirca ratio dupli rectanguli sub NM, AΞ

simul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ simul; ac rectangulum sub ΓΝ, ΞΑ, *sive quadratum ex* ΞΑ, est ad quadrata ex ΝΑ & ΑΞ simul, sicut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ Axis ΑΓ; ut manifestum est ex præmissis: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad summam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ minor est ratione ejus ad summam quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ: quadrata igitur laterum figuræ super ΚΒ factæ simul majora sunt quadratis laterum figuræ Axis simul sumptis. Quoniam vero duplum quadrati ex ΜΞ majus est quadrato ex ΞΝ, ac duplum rectangulum sub ΕΞ, ΞΜ majus est quadrato ex ΝΞ; modo in præcedentibus usurpato, probabitur quadrata laterum figuræ diametri ξΤ majora esse quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ. Q. E. D.

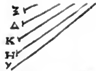
PROPOSITIO XLVI.

SI vero quadratum Axis transversi minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum: ab utrâque parte Axis reperietur diameter cujus quadratum æquatur dimidio quadrati differentiæ inter ipsam & latus ejus rectum; ac summa quadratorum laterum figuræ ejus minor erit quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri ab utrâque ejus parte sumendæ: summa quoque quadratorum laterum figuræ super diametrum huic propiorem factæ minor erit summâ quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eâdem.

Sint ΓΝ ad ΝΑ, sicut ΑΞ ad ΞΓ, in eadem ratione quam habet ΑΓ ad latus ejus rectum; ac sit duplum quadrati ex ΑΞ minus quadrato ex ΝΞ. Fiat duplum quadrati ex ΜΞ æquale quadrato ex ΝΞ, & ad punctum Μ erigatur Axi normalis ΜΑ, ac junctâ ΓΑ eidem parallela ducatur diameter ΚΘΒ: erit igitur ΜΞ ad ΜΝ (per 6^am hujus) sicut ΚΒ ad latus rectum ejusdem, adeoque quadratum ex ΚΒ æquale erit dimidio quadrati differentiæ inter eam & latus ejus rectum.

Ducantur jam inter puncta Α, Β aliæ quævis diametri ut ΔΕ, ξΤ, iisdemque parallelæ ΓΧ, ΓΟ; & Axi normales sint Χϵ, ΟΠ. Quoniam autem duplum quadrati ex ΜΞ æquale est quadrato ex ΞΝ, erit duplum rectangulum sub ΜΞ, Ξϵ minus quadrato ex ΞΝ; ac, facto duplo rectangulo sub ϵΝ, Ξϵ communi, erit duplum rectanguli sub ΜΝ, Ξϵ simul & Ξϵ minus *duplo rectangulo sub* ϵΝ, Ξϵ *& quadrato ex* ΞΝ *simul; hoc est (per* 7. II. *El.)* quadratis ex ϵΝ, Ξϵ. Unde eodem omnino argumentandi modo, quo usi sumus in Propositione præcedente, manifestum erit quadrata laterum

figuræ



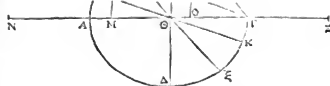
mittantur ad Axem normales ΣΡ, δσ. Quoniam enim *duplum* rectangulum sub ΡΞΜ majus est quadrato ex ΞΝ, pari processu patebit quadrata laterum figuræ diametri ΖΗ esse majora quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ. Denique cum *duplum* rectangulum σΞΡ majus est quadrato ex ΞΝ, eodem modo demonstrabitur quadrata laterum figuræ diametri τγ majora esse quadratis laterum figuræ diametri ΖΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVII.

IN Ellipsi, si quadratum lateris transversi figuræ Axis majoris non majus fuerit dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus: erunt quadrata laterum figuræ Axis majoris simul sumpta minora quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri; ac quadrata laterum figuræ diametri Axi propioris simul sumpta minora erunt quadratis laterum figuræ diametri remotioris ab eodem; maxima autem quadratorum summa fiet ex lateribus figuræ Axis minoris.

Sit Ellipseos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; sitque quadratum Axis ΑΓ non majus dimidio quadrati summæ laterum figuræ ejus: sint etiam aliæ sectionis diametri ΚΒ, ξΤ, quibus ducantur parallelæ ΓΛ, ΓΙ; ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΙΟ.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac rectangulum sub ΝΓ, ΑΞ, *sive quadratum ex* ΑΞ, erit ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ simul ut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ super ΑΓ factæ. Latus autem rectum figuræ Axis minoris ΔΕ est ad ΔΕ sicut ΓΝ ad ΓΞ: quia ΓΝ est ad ΓΞ, sicut ΑΓ ad latus ejus rectum, ac ΑΓ est ad latus ejus rectum (per 15^{am} primi) ut



ratione quadratorum ex NΓ & ΓΞ ad quadrata ex NM, MΞ ſimul; adeoque ratio rectanguli ſub NΓ, AΞ ad rectangulum ſub NΓ, ΞM major erit ratione qnadratorum ex NΓ, ΓΞ ad quadrata ex NM, MΞ. Permutando autem ratio rectanguli ſub NΓ, AΞ ad quadrata ex NΓ, ΓΞ ſimul major erit ratione rectanguli ſub NΓ, MΞ ad quadrata ex NM, MΞ ſimul: atque ſupra demonſtratum eſt rectangulum ſub NΓ, AΞ eſſe ad quadrata ex NΓ, ΓΞ ſimul ſicut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ ejus. Sed & (per 19^{am} hujus) rectangulum ſub ΓN, MΞ eſt ad ſummam quadratorum ex NM, MΞ, ſicut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri KB: ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadrata laterum figuræ ejus ſimul major eſt ratione ejuſdem ad quadrata laterum figuræ diametri KB; adeoque quadrata laterum figuræ Axis majoris AΓ minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri KB ſimul ſumptis.

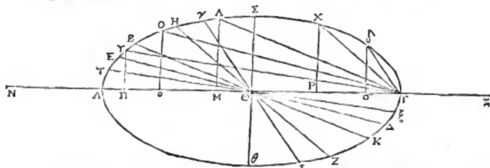
Jam vero MN vel minor erit quam OΞ, vel non minor erit eâ. Imprimis autem ſit minor eâ. Unde quadrata ex MN, MΞ ſimul majora erunt quadratis ex NO, OΞ ſimul; ac quadrata ex NO, OΞ ſimul majora ſunt rectangulo ſub OΞ & dupla differentia ipſarum OΞ, MN; quare ratio rectanguli ſub MO & dupla differentia inter OΞ & MN ad rectangulum ſub OΞ & dupla differentia inter OΞ & MN major eſt ratione ejuſdem ad ſummam quadratorum ex NO, OΞ; ac proinde ratio MO ad OΞ major erit ratione rectanguli ſub MO & dupla differentia ipſarum OΞ, MN ad quadrata ex NO, OΞ ſimul. Sed rectangulum ſub MO & dupla differentia ipſarum OΞ, MN unà cum quadratis ex NO, OΞ ſimul (*per Lemma* IV. *Abdolm.*) æquale eſt quadratis ex MN, MΞ ſimul; quia differentia inter quadrata ex MN, MΞ & quadrata ex NO, OΞ ſimul æqualis eſt duplæ differentiæ inter quadrata ex MΘ, ΘO: componendo igitur ratio MΞ ad ΞO major erit ratione quadratorum ex MN & MΞ ſimul ad quadrata ex NO & OΞ ſimul. Sed ut MΞ ad ΞO ita rectangulum ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, ΞO; quare ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ΓN, ΞO major eſt ratione ſummæ quadratorum ex MN, MΞ ad ſummam quadratorum ex NO, OΞ: ac permutando ratio rectanguli ſub NΓ, MΞ ad ſummam quadratorum ex MN, MΞ major eſt ratione rectanguli

Axis parte diameter, cujus quadratum æquale eſt dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: ac ſumma quadratorum laterum figuræ hujus diametri minor erit ſumma quadratorum laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri ad eundem ſectionis quadrantem ducendæ: quadrata etiam laterum figuræ diametri huic utrinque propioris minora ſunt quadratis laterum figuræ ſuper diametrum remotiorem factæ.

Deſcribatur Schema præcedenti ſimile: ac eodem modo conſtabit duplum quadratum ex ΑΞ majus eſſe quadrato ex ΝΞ. Fiat duplum quadrati ex ΜΞ æquale quadrato ex ΝΞ, & ad punctum Μ erigatur Axi normalis ΑΜ occurrens ſectioni in Α; & jungatur ΓΑ, eidemque parallela ducatur ſectionis diameter ΚΒ: erit igitur ΜΞ ad ΞΝ (per 7^{mam} hujus) ſicut diameter ΚΒ ad latera figuræ ejus ſimul ſumpta; ac proinde quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΞΝ ſicut quadratum ipſius ΚΒ ad quadratum ſummæ laterum figuræ ejus. Sed quadratum ex ΜΞ dimidium eſt quadrati ex ΞΝ; quare quadratum ex ΚΒ dimidium eſt quadrati ſummæ laterum figuræ ejus.

Ducantur jam diametri ΔΕ, ξΤ inter Α & Β; & per punctum Γ iiſdem parallelæ ſint ΓΟ, ΓΥ; ac demittantur ad Axem normales Οϕ, ΤΠ. Quoniam vero quadratum ex ΜΞ dimidium eſt quadrati ex ΞΝ, ac rectangulum ſub ΝΞ, ΞΘ etiam dimidium eſt quadrati ex ΞΝ; erit rectangulum ſub ΝΞ, ΞΘ æquale quadrato ex ΜΞ: unde ΝΞ erit ad ΜΞ ſicut ΜΞ ad ΞΘ; ac auferendo antecedentes à conſequentibus, erit reſiduum ΜΝ ad reſiduum ΜΘ ſicut ΝΞ ad ΜΞ. Hinc rectangulum ſub ΝΞ, ΜΘ æquale erit rectangulo ſub ΜΝ, ΜΞ. Eſt igitur rectangulum ſub ΝΞ, ΜΘ majus rectangulo ſub Νϕ, ΜΞ; ac duplum rectanguli ſub ΝΞ, ΜΘ majus rectangulo duplo ſub Νϕ, ΜΞ: rectangulum igitur ſub ΜΘ, ΘΞ quater majus eſt duplo rectangulo ſub Νϕ, ΜΞ: Adjiciatur commune duplum rectangulum ſub Μϕ, ΜΞ; & quadruplum rectangulum ſub ΜΘ, ΘΞ unà cum duplo rectangulo ſub Μϕ, ΜΞ majus erit duplo rectangulo ſub ΜΝ, ΜΞ. Addatur inſuper quater quadratum ex ΘΜ

torum ex ΝΑ & ΑΞ simul ad quadrata ex ΝΠ, ΠΞ simul sumpta: unde pari ratiocinio constabit quadrata laterum figuræ ξΤ minora esse quadratis laterum figuræ Axis ΑΓ.



Ducantur jam, in iisdem Ellipseos quadrantibus, diametri aliæ remotiores ab Axe majore quam ΚΒ, ut ΖΗ, τγ; & per punctum Γ his diametris parallelæ sint ΓΧ, Γδ: ac demittantur ad Axem normales ΧΡ, δσ. Et, argumento prædictis consimili, manifestum fiet quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ minora esse quadratis laterum figuræ diametri ΖΗ: atque hæc quoque minora esse quadratis laterum figuræ diametri τγ; sive puncta Ρ, σ ceciderint utraque inter Θ & Μ, sive eorum unum fuerit in centro & alterum inter Θ & Μ vel inter Θ & Γ; vel denique si utrumque fuerit inter Θ & Γ. Quadrata igitur laterum figuræ diametri ΚΒ, cujus quadratum dimidium est quadrati summæ laterum figuræ ejus, minora sunt quadratis laterum figuræ cujuscunque alterius diametri in Ellipseos quadrantibus ΛΣ, Γθ ducendæ: ac quadrata laterum figuræ diametri huic utrinque propioris, in iisdem quadrantibus ductæ, minora sunt quadratis laterum figuræ diametri ab eadem remotioris. Consequitur etiam quadrata laterum figuræ Axis minoris Σθ majora esse quadratis è lateribus figuræ cujuscunque alterius diametri sectionis simul sumptis. Q. E. D.

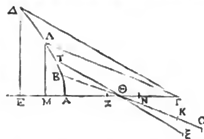
PROPOSITIO XLIX.

SI in Hyperbola latus transversum figuræ Axis majus fuerit latere ejus recto: erit differentia quadratorum laterum figuræ Axis

ad ΝΑ; adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ minor eſt ratione ipſarum ΜΞ, ΜΝ ſimul ad ipſas ΞΑ, ΑΝ ſimul: ac proinde minor eſt ratione rectanguli ſub ΞΜ, ΜΝ ſimul & ΞΝ ad rectangulum ſub ΞΑ, ΑΝ ſimul & ΞΝ. Verum rectangulum ſub ΞΜ, ΜΝ ſimul & ΞΝ (*per* 6. II. *Elem.*) differentia eſt inter quadrata ex ΞΜ & ΜΝ, ac rectangulum ſub ΞΑ, ΑΝ ſimul & ΞΝ differentia eſt inter quadrata ex ΞΑ, ΑΝ: quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ minor eſt ratione differentiæ quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ minor erit ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ. Sed rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad differentiam quadratorum ex ΞΝ, ΜΝ (per 20^mam^ hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ; ac rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ eſt ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ ut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex Axe ΑΓ & ex latere ejus recto: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ minor eſt ratione ejuſdem ad differentiam quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ. Quocirca differentia quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ major eſt differentia quadratorum laterum figuræ Axis.

Similiter, quoniam ratio ΕΞ ad ΞΜ minor eſt ratione ΕΝ ad ΝΜ, erit ratio ΕΞ ad ΞΜ minor ratione ipſarum ΕΞ, ΝΕ ſimul ad ΞΜ, ΜΝ ſimul; unde modo nuper adhibito probabitur differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ξΤ majorem eſſe differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Quinetiam ſi fiat ΒΟ æqualis lateri recto figuræ diametri ΚΒ; erit differentia inter quadrata ex ΒΚ & ΒΟ æqualis duplo rectangulo ſub ΒΟ, ΟΚ una cum quadrato ex ΟΚ; quæ proinde major erit rectangulo ſub ΒΚ, ΚΟ, minor vero duplo ejuſdem. Verum rectangulum ſub ΒΚ, ΚΟ æquale eſt differentiæ inter quadratum ex ΒΚ & figuram ſuper ΒΚ factam; quæ quidem differentia (per 29^am^ hujus) æqualis eſt differentiæ inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejuſdem: differentia igitur inter quadratum diametri ΒΚ & quadratum lateris ejus recti major eſt differentia inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejuſdem; minor vero eſt duplo iſtius differentiæ. Q. E. D.

est ratione rectanguli sub ΜΞ, ΜΝ simul & ΝΞ ad rectangulum sub ΞΑ, ΑΝ simul & ΝΞ. *Sed rectangulum sub* ΜΞ, ΜΝ *simul &* ΝΞ *æquale est differentiæ quadratorum ex* ΜΝ, ΜΞ; *ac rectangulum sub* ΞΑ, ΑΝ *simul &* ΝΞ *æquale est differentiæ quadratorum ex* ΞΑ *&* ΑΝ: quare, eodem modo quo præcedentia, demonstrabitur differentiam quadratorum diametri ΚΒ laterisque recti ejusdem minorem esse differentiâ quadrati Axis ΑΓ & lateris ejus recti: pariterque differentiam quadratorum diametri ξΤ & lateris ejus recti minorem esse differentia quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ.



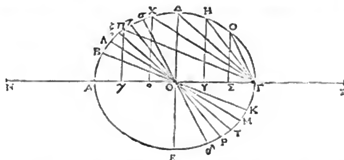
Fiat autem ΒΟ æqualis lateri recto diametri ΚΒ, ac rectangulum sub ΒΚ, ΚΟ (per 29^{am} hujus) æquale erit differentiæ inter quadratum Axis ΑΓ & figuram super Axem factam. Duplum autem rectanguli sub ΒΚ, ΚΟ una cum quadrato ex ΚΟ, *hoc est differentia quadratorum ex* ΒΚ *&* ΒΟ, majus est duplo rectangulo sub ΒΚ, ΚΟ: differentia igitur quadratorum laterum figuræ cujuscunque diametri ΚΒ major erit duplâ differentiâ *inter quadratum Axis* ΑΓ *ejusdemque figuram.* Q. E. D.

PROPOSITIO LI.

D*ifferentia quadratorum laterum figuræ Axis majoris, in Ellipsi, major est differentia quadratorum laterum figuræ cujuslibet alterius diametri, quæ major est latere suo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ factæ super diametrum Axi majori propiorem major est differentia quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eodem: differentia autem quadratorum laterum figuræ Axis minoris major est differentia quadratorum laterum figuræ cujusvis alterius diametri, quæ minor est latere suo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ diametri Axi minori propioris major erit differentia quadratorum laterum figuræ super remotiorem factæ.*

Sit

ejusdem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri ΚΒ & lateris ejus



recti: quapropter differentia quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ major est differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Eodemque modo demonstrabitur rationem rectanguli sub ΓΝ, Ξγ ad rectangulum sub ΓΝ, Ξο minorem esse ratione differentiæ quadratorum ex Ξγ, γΝ ad differentiam quadratorum ex Ξο, οΝ: ac permutando rationem rectanguli sub ΓΝ, Ξγ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ minorem esse ratione rectanguli sub ΓΝ, Ξο ad differentiam quadratorum ex Ξο, οΝ. Unde manifestum fiet differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ majorem esse differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΛΜ.

Ducantur jam aliæ diametri inter ξ & Δ, sicut σδ, τΡ; ac per punctum Γ agantur parallelæ illis rectæ ΓΗ, ΓΟ; & demittantur ad Axem normales ΗΥ, ΟΣ. Dico differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔΕ majorem esse differentia inter quadratum diametri σδ & quadratum lateris recti ejus; atque hanc differentiam majorem esse differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri τΡ.

Quoniam enim ratio rectanguli sub ΓΝ, ΞΥ ad rectangulum sub ΓΝ, ΞΣ major est ratione ΥΘ ad ΘΣ, (quia ΞΥ major est quam ΞΣ ac ΥΘ minor quam ΘΣ) ac ΥΘ est ad ΘΣ ut duplum rectangulum sub ΝΞ & ΥΘ ad duplum rectangulum sub ΝΞ, ΘΣ; duplum autem rectangulum sub ΞΝ, ΥΘ æquale est differentiæ quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ, uti duplum rectangulum sub ΞΝ, ΘΣ æquale est differentiæ

Denique cum ratio $\Sigma\Xi$ ad $\Xi\Gamma$ major eſt ratione $\Sigma\Theta$ ad $\Theta\Gamma$ (quia $\Sigma\Xi$ major eſt quam $\Xi\Gamma$ & $\Sigma\Theta$ minor quam $\Theta\Gamma$) erit ratio rectanguli ſub ΓN, $\Sigma\Xi$ ad rectangulum ΓN, $\Xi\Gamma$ major ratione dupli rectanguli ſub $N\Xi$, $\Sigma\Theta$ ad duplum rectangulum ſub $N\Xi$, $\Theta\Gamma$: quocirca, modo in præcedentibus uſurpato, demonſtrabitur differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔE majorem eſſe differentia inter quadratum diametri $\sigma\delta$ & quadratum lateris recti figuræ ejuſdem. Q. E. D.

APOL-

nos angebat, quod in Codicibus etiam Arabicis ultimus Conicorum liber desideraretur. Tu tamen, qua es ingenii felicitate, statim sensisti, pro re deplorata non habendum esse, sed forte quadantenus restitui posse; indicio ex eo facto quod in Pappi Collectionibus Mathematicis eadem ipsa tradantur Lemmata Conicorum Octavo pariter ac Septimo demonstrando inservientia; quæ tamen in cæteros libros diversos diversa reperiuntur. Hinc Tibi pro comperto fuit, utriusque libri argumenta conjunctissima fuisse; ac Problemata Octavi à Theorematis Septimi διορισμοῖς suas sortiri determinationes. Illud quidem mihi, re probe perpensa, cum conjecturâ probabile tum vestigiis quibusdam indicari videbatur: quo factum ut, Te viam monstrante, jacturæ isti, quantum in me est, resarciendæ memet accingerem. Quæso igitur hoc, quicquid est conaminis, benigne accipias. Vale.

PROPOSITIO I. PROBL.

Dato in Parabola data cujuslibet diametri latere recto; exhibere latus rectum cujuscunque alterius diametri.

Quoniam (per 5^{tam} VII^{mi}) demonstratum est, latus rectum cujuslibet alterius diametri Parabolæ excedere latus rectum Axis, quadruplâ interceptæ inter normalem ad Axem demissam & verticem principalem sectionis: manifestum est quod, si supra verticem Axis capiatur punctum quod quartâ parte lateris ejus recti distet à vertice, portio Axis, inter punctum illud & normalem à vertice cujusvis alterius diametri demissam, erit quarta pars lateris recti istius diametri.

ducatur ΓH ad K, ita ut ΓK sit quarta pars ...
KM æqualis quartæ parti alicujus alterius lateris recti; & per M ipsi ΓH normalis erigatur AM, occurrens sectioni in A; per A vero ipsi ΓH parallela ducatur AN. Dico AN esse diametrum sectionis quæsitam, quæ producatur ad O.

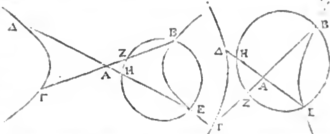
Vel si per K ducatur diametro normalis EKO, & intervallo OA quartæ parti lateris recti dati æquali ducatur MA ipsi EKO parallela; occurret sectioni in puncto quæsito A. Etenim cum ΓK sit quarta pars lateris recti diametri ΓH, & KM sit quarta pars lateris recti dati, cui æqualis est AO; sit autem AO (per demonstrata in quinto VII^mi) quarta pars lateris recti diametri AN: erit igitur AN diameter illa quam quærimus.

Latus autem rectum datum (per 32. VII^mi) non minus esse potest latere recto Axis.

PROPOSITIO III. PROBL.

D*ato in data Hyperbola datæ cujuslibet diametri latere recto; alterius cujusvis diametri latus rectum invenire.*

Sit in Hyperbola BE, cujus centrum A, data aliqua diameter ΓB, ac semissi lateris ejus recti fiat ZB æqualis: proponitur latus rectum diametri cujuscunque alterius ΔE investigandum.



Per data tria puncta B, E, Z (per 5. 4. *El.*) describatur circulus EBZH occurrens diametro propositæ ΔE in puncto H. Dico EH dimidium esse lateris recti quæsiti. Nam (per 29^am. VII^mi) differentia inter quadratum diametri cujuscunque Hyperbolæ & figuram ejusdem ubique eadem est: adeoque rectangula sub diametris & differentiis inter easdem & latera sua recta sunt semper æqualia, uti & rectangula contenta sub earundem dimidiis; quare rectangulum BAZ æquale est contento sub AE & differentia inter AE & semissem lateris recti diametri ΔE. Sed, ob circulum (per 35. vel 36. III. *Elem.*) rectangulum sub EA, AH æquale est rectangulo BAZ: est igitur AH differentia inter semidiametrum AE & semilatus rectum ejusdem diametri, ac proinde EH dimidium est lateris recti quæsiti.

PRO-

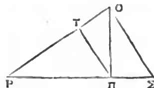
...dem diametro magnitudine: positionem diametri istius in sectione determinare, atque situm & magnitudinem diametri cum eâdem conjugatæ, latusque ejus rectum.

Sit Hyperbolæ AB Axis transversus AΓ, & latus rectum AΔ; quod ponatur in directo Axis ad Δ & δ; ac fiat ΓN ad NA ut & AΞ ad ΞΓ sicut ΓA ad AΔ; erunt itaque puncta N, Ξ (per 2^{dam} VII^{mi}) termini rectarum quas *Homologas* diximus: Componendo autem ΓA erit ad AN sicut Axis transversus & latus ejus rectum simul ad latus rectum, sive ut ΓΔ ad ΔA; per conversionem vero rationis AN erit ad NΞ sicut AΔ ad Γδ differentiam Axis & lateris recti: ex æquo igitur ΓA erit ad NΞ sicut ΓΔ ad δΓ; ac proinde rectangulum sub NΞ & ΓΔ æquale erit contento sub AΓ & Γδ, sive sub Axe & differentiâ Axis laterisque recti. Rectangulum autem sub AΓ & differentiâ ejusdem & lateris ejus recti æquale est differentiæ quadrati Axis & figuræ ejus, quæ quidem (per 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}) differentia est quadratorum è quibusvis sectionis diametris conjugatis: adeoque rectangulum sub NΞ, ΓΔ æquale est differentiæ quadratorum ex quibuslibet sectionis diametris conjugatis. Pone jam BK esse diametrum quam quærimus, ac repetito Schemate Prop. 6^{tæ} VII^{mi} (per eandem 6^{tam}) quadratum ex BK erit ad quadratum ex ZH ut ΞM ad MN, ac per conversionem rationis quadratum ex BK erit ad differentiam quadratorum ex BK, ZH, sive ad rectangulum sub NΞ & ΓΔ, sicut ΞM ad NΞ: quocirca quod fit sub NΞ & quadrato ex BK æquale erit contento sub NΞ & rectangulo sub ΓΔ & ΞM; adeoque quadratum ex BK æquale erit rectangulo sub ΞM & ΓΔ, sive sub ΞM & summâ Axis & lateris ejus recti: est igitur BK media proportionalis inter ΓΔ & MΞ. Dantur autem BK & ΓΔ; data est igitur MΞ, ac dato puncto Ξ punctum M datur.

Compositio autem manifesta est: manentibus enim descriptis, fiat ut ΓΔ ad BK

 ita

ejusdem, hoc est (per 29 VII) differentiam quadratorum e quibusvis diametris conjugatis. Sit ea ΠΟ; & erectâ ad ΟΠ normali ΠΡ, fiat ΟΡ æqualis diametro datæ, & erit ΠΡ æqualis diametro conjugatæ cum ΡΟ: si nempe latus rectum minus fuerit Axe. Si vero majus fuerit eo, fiat ΠΡ diametro propositæ æqualis, & juncta ΟΡ erit ejusdem diametro conjugatæ æqualis; & erecta super ΟΡ normali ΟΣ, erit ΡΣ latus rectum diametri ΠΡ. In priori vero casu, demissâ normali ΠΤ erit ΡΤ latus rectum diametri ΟΡ: conjugata enim media est proportionalis inter diametrum & latus suum rectum. Cætera patent ex 13ª & 29ª VII^{mi}.

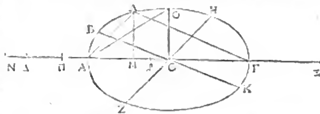


Ac manifestum est diametrum propositam non minorem esse debere Hyperbolæ Axe dato.

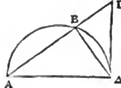
PROPOSITIO VI. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, & datâ quavis ejusdem diametro magnitudine: diametri istius positionem designare, situmque & magnitudinem diametri cum data conjugatæ, simulque latus rectum ejusdem.

Sit Ellipseos ΑΒΓ Axis transversus ΑΓ, qui producatur utrinque, ac fiat utraque ΑΔ, Αδ æqualis lateri recto, & (per 3^{am} VII^{mi}) habeantur rectæ Homologæ ΑΝ, ΓΞ; capiendo scilicet ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ sicut ΑΓ ad ΑΔ. Hinc dividendo ΓΑ erit ad ΑΝ sicut differentia Axis & lateris ejus recti ad latus rectum, sive ut Γδ ad ΔΑ; componendo vero ΑΝ erit ad ΝΞ sicut latus rectum ad summam Axis laterisque ejus recti, sive ut ΑΔ ad ΔΓ: ex æquo igitur ΓΑ erit ad ΝΞ sicut Γδ ad ΔΓ, sive ut differentia Axis & lateris ejus recti ad summam eorundem: rectangulum igitur sub Axe & summâ Axis & lateris ejus recti æquale est rectangulo sub ΝΞ & eorundem differentiâ. Sed rectangulum sub Axe & utroque Axe & latere recto simul æquale est quadrato ex Axe & figuræ ejusdem simul; quorum quidem summa (per 30^{am} & 12^{am} VII^{mi}) æqualis est summæ



ΑΓ & ΓΔ, poterit ΓΠ summam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ, sive quadruplum summæ quadratorum semiaxium ΑΘ, ΘΟ, hoc est quadrati ex ΑΟ. Quapropter si diametro ΓΠ vel radio ΑΟ describatur semi-circulus ΑΔΒ, in quo inscribatur recta ΑΒ datæ diametro ΒΚ æqualis, ac jungatur ΒΔ: erit ΒΔ æqualis conjugatæ ΖΗ; erectaque ΓΔ normali super ΑΔ usque dum occurrat ipsi ΑΒ productæ in Γ, erit ΒΓ tertia proportionalis ipsis ΑΒ, ΒΔ, hoc est ipsis ΒΚ, ΖΗ; ac proinde ΒΓ æqualis erit lateri recto quæsito.

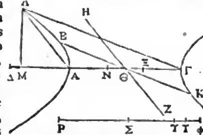


Manifestum autem est oportere diametrum ΒΚ non majorem esse Axe majore, nec minorem Axe minore, sive mediâ proportionali inter latus rectum Axis ipsumque Axem.

PROPOSITIO VII. PROBL.

Datis Axe & latere recto Axis Hyperbolæ, ac datâ ratione diametrorum sectionis conjugatarum: invenire diametros illas conjugatas tam magnitudine quam positione.

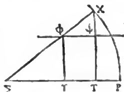
Habeantur puncta Ξ, Ν Homologarum termini, ut in quinta hujus docetur: & quoniam fieri potest ut Axis major sit latere ejus recto, vel æqualis, vel minor eo; primum sit major eo, ac (per demonstrata in 21ma VII^mi) ratio Axis ad suam conjugatam major esse debet ratione cujuscunque alterius diametri ad suam conjugatam. Sit igitur ratio data sicut ΡΣ ad ΣΤ sive majoris ad minorem, sed minor ratione Axium inter se; ac fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ: datis igitur ΡΣ, ΣΤ datur quoque ΣΥ, & ratio ΡΣ ad ΣΥ quoque datur, nempe ratio quadratorum ex ΡΣ, ΣΤ, hoc est ratio quadratorum diametrorum quas quærimus. Puta jam factum, & sit ΒΚ diameter quæsita, ejusque conjugata ΖΗ, ac



ducatur

de centro Θ ad Β & Κ, quæ proinde contingent sectionem; ac fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΘΒ ad ΘΗ vel ΘΖ: ac recta ΖΗ erit diameter conjugata cum diametro ΒΚ.

Cum autem differentia quadratorum ex diametris conjugatis sit semper æqualis differentiæ quadratorum Axium, possumus modo satis expedito problema hoc resolutum dare, sed absque diametrorum positione. Radio ΣΡ describatur arcus circuli; ac, ductâ de centro recta ΣΡ, fiat ΣΤ æqualis minori rationis termino; & erigatur normalis ΤΧ occurrens circulo in Χ; & per Χ ducatur ΣΧ, si opus est, producenda. Dein capiatur ΤΨ, quæ poterit differentiam quadratorum ex Axibus sectionis, & ad distantiam ΤΨ ipsi ΣΤ parallela ducatur ΨΦ, occurrens ipsi ΣΧ in Φ, & ipsi ΤΧ parallela ducatur ΦΥ: dico ΣΦ, ΣΥ esse diametros quæsitas. Nec aliâ demonstratione opus est, nisi quod ΣΥ sit ad ΣΦ sicut ΣΤ ad ΣΧ, hoc est ad ΣΡ, sive in ratione proposita; quodque ΦΥ possit differentiam quadratorum ex utroque Axe, sive rectangulum sub Axe & differentia Axis laterisque ejus recti. Hoc autem fieri debet juxta 13^am & 29^am VII^mi.



Quod si Axis minor fuerit latere ejus recto, eadem prorsus erit tam analysis quam compositio: oportebit autem rationem propositam majorem esse ratione Axis ad Axem ejus conjugatam, minorem vero ratione æqualis ad æqualem, prout demonstratur in 22da VII^mi. At vero si Axes fuerint æquales, erunt quoque omnes diametri conjugatæ (per 23^am VII^mi) æquales inter se respective; ac proinde in Hyperbola quam vocant, æquilatera, nulla alia reperietur inter conjugatas ratio nisi æqualitatis: in cæteris vero omnibus, ad rationem æqualitatis propius accedunt diametri, quo propiores asymptotis sunt.

PROPOSITIO VIII. PROBL.

Pariter in Ellipsi, datis Axe & latere recto ejusdem, oporteat invenire conjugatas diametros, tam magnitudine quam positione, quæ inter se sint in datâ ratione.

Manentibus descriptis in Prop. VI^ta, sit ratio data sicut ΡΣ ad ΣΤ, & sit invenienda diameter ΒΚ quæ eandem habeat rationem ad conjugatam suam ΖΗ ac ΡΣ ad ΣΤ. Fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ, ac ΡΣ erit ad ΣΥ sicut quadratum ex ΒΚ ad quadratum ex ΖΗ. Quoniam vero (per 7^am VII^mi) quadratum ex ΒΚ est ad quadratum ex ΖΗ sicut ΜΞ ad ΜΝ, erit quoque ΡΣ ad ΣΥ sicut ΜΞ ad ΜΝ, ac compo-

Axis & figuræ ejus simul, hoc est (per 12^am & 30^mam VII^mi) summæ quadratorum Axium, sive quadruplo quadrati ex A O: si termini rationis P Σ, Σ T ponantur ad angulos rectos, & in juncta P T capiatur P Φ ipsi A O æqualis; ac centro Φ, radio Φ P, describatur semicirculus occurrens ipsi P Σ in puncto X, & diametro P T in puncto Ψ, & jungatur X Ψ: dico rectas P X, X Ψ æquales esse diametris quæsitis. possunt enim simul quadruplum quadrati ex A O, ob angulum rectum, & sunt in ratione P Σ ad Σ T; ac proinde æquales sunt ipsis B K, Z H, quas quærimus.

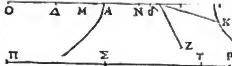
PROPOSITIO IX. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametros ejus conjugatas, tam positione quam magnitudine, quarum summa æqualis sit rectæ datæ.

Repetatur Schema Propositionis quintæ hujus, ac habeantur puncta Ξ, N termini rectarum Homologarum. Quoniam vero N A est ad Γ N sicut latus rectum ad Axem transversum; erit componendo A Γ ad Γ N sicut Axis transversus ac latus rectum simul ad ipsum Axem A Γ; ac proinde quadratum ex A Γ æquale erit rectangulo N Γ Δ, sive sub N Γ & ea quæ æqualis est utrique Axi & lateri recto simul sumpto. Jam (per 8^vam VII^mi) quadratum ex A Γ, hoc est rectangulum sub N Γ, Γ Δ, est ad rectangulum sub N Γ, M Ξ sicut quadratum summæ diametrorum conjugatarum ad quadratum ex utraque M Ξ & ea quæ potest

teft

gatarum ita eadem semi-summa conju-



gatarum ad ΘO, quæ à centro Θ in Axe Hyperbolæ producto ponatur: dein fiat ut dupla ipsius ΘO ad OΞ ita OΞ ad ΞM; ac invento jam puncto M erigatur normalis MA, ac fiant cætera, prout in Prop. quinta & septima præcedentibus ostensum est.

Coëuntibus autem punctis Θ, N, Ξ, ut fit in Hyperbola æquilatera, erunt ΘO, ΞO æquales; ac proinde, si fiat ut Axis ad semi-summam conjugatarum datam ita eadem semi-summa ad ΘO: & si capiatur ΘM ipsius ΘO dimidium; erit punctum M quod quærimus. Id quod aliunde, nempe ex quintâ hujus, manifestum est.

Aliter autem, nec inconcinne, problema hoc resolvi potest. Etenim cum differentia quadratorum è quibusvis conjugatis (per 13^am & 29^am VII^mi) æqualis sit rectangulo sub Axe & differentia Axis laterisque ejus recti; ac rectangulum sub summâ & differentiâ diametrorum conjugatarum sit (per 6. II. *El.*) æquale differentiæ quadratorum ex iisdem; erit rectangulum sub summa & differentia conjugatarum æquale rectangulo sub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti: quapropter summa conjugatarum erit ad Axem sicut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum. Datis autem cæteris, data quoque est differentia conjugatarum; ac proinde ipsæ conjugatæ, ob datas tam summam quam differentiam earundem.

Fiat igitur ut summa proposita ΠP ad Axem AΓ ita Γꝺ ad quartam proportionalem, quæ sit PT; ac, divisa ΠT bifariam in Σ, erit PΣ major è diametris, ΠΣ vero minor.

Inventis autem diametris (per quintam hujus) earundem positionem obtinebimus, capiendo MΞ tertiam proportionalem ipsis ΓΔ, BK, vel NM tertiam proportionalem ipsis ΓΔ, ZH. Sed hoc inversâ (ut ita dicam) compositione fit, nec ad mentem *Apollonii*, quem in singulis problematis ante omnia punctum M, unde cætera consequuntur, quæsivisse verisimile est.

Oportebit autem summam propositam non minorem esse summa Axium conjugatarum, per ea quæ demonstrata sunt ad Prop. 25. Lib. VII^mi.

PROPOSITIO X. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas, tam positione quam magnitudine, quarum summa rectæ datæ æqualis sit.

Habeantur

Componetur itaque hoc modo: fiat ut semi-differentia Axis & lateris recti ad semi-summam conjugatarum (quæ sit ΠΡ) ita eadem semi-summa ad quartam proportionalem ΘΚ; quæ ponatur in Axe ultra punctum Ξ: dein in producto Axe altero ponatur ΘΧ ipsi ΚΞ æqualis, ac centro Χ radio ΞΘ describatur arcus circuli occurrens Axi, si problema possibile sit, in puncto Μ; & ordinatim ductâ rectâ ΜΛ, jungantur ΓΛ, ΔΛ, quibus parallelæ erunt diametri quas quærimus &c. Est enim quadratum ex ΘΜ æquale excessui quo quadratum ex ΞΘ superat quadratum ex ΘΧ sive quadratum ex ΚΞ, prout ex præmissâ Analysi fieri oportuit.

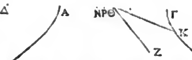
Invenientur autem diametri ipsæ ex data earum summa, methodo omnino diversa. Cum enim summa quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum sit (per 30am VIImi) æqualis datæ summæ quadrati Axis & figuræ ejusdem; atque (per 4am IIdi *El.*) quadratum summæ sit æquale summæ quadratorum partium una cum duplo rectangulo earundem, & hoc quoque quadratum datum sit: dabitur etiam duplum rectangulum sub diametris conjugatis. Hoc autem duplo rectangulo è datâ quadratorum summâ sublato, erit reliquum (per 7am. II. *El.*) æquale dato quadrato differentiæ conjugatarum: adeoque & ipsa differentia data est. Datis autem tam summâ quam differentiâ habentur quoque ipsæ diametri quas quærimus.

Oportebit autem datam summam diametrorum conjugatarum non minorem esse summâ Axium, nec majorem summâ conjugatarum æqualium, sive eâ quæ potest duplum quadratorum ex utroque Axe simul sumptorum; ut ex iis quæ in 26ta septimi demonstrata sunt.

PROPOSITIO XI. PROBL.

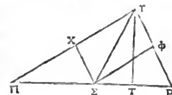
Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire diametros conjugatas, quarum differentia æqualis sit rectæ datæ.

ad ΡΞ ita ΡΞ ad ΞΜ, ac invento puncto Μ erigatur normalis ΜΛ; fiantque cætera prout supra.



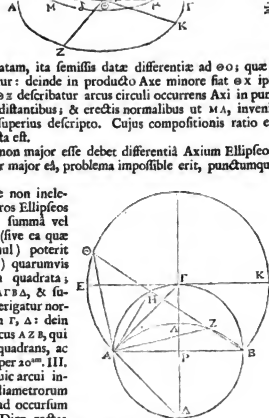
Quoniam vero in nonâ hujus ostensum est rectangulum sub summâ & differentiâ quarumvis Hyperbolæ diametrorum conjugatarum æquale esse rectangulo sub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti; erit ἀνάλογον ut differentia conjugatarum ad Axem sectionis ita differentia Axis & lateris recti ad diametrorum conjugatarum summam; ac datis cæteris data quoque erit summa conjugatarum: & ob datam summam & differentiam dabuntur etiam ipsæ conjugatæ.

Hinc modo satis expedito tam nonum quam hoc undecimum problema construxeris. Erecta enim normali ΤΥ super rectam aliquam ΠΡ, fiat ΤΥ æqualis mediæ proportionali inter Axem & differentiam Axis & lateris recti, sive quæ possit differentiam quadratorum Axium, ac capiatur ΤΡ æqualis differentiæ quarumvis conjugatarum, vel ΠΤ æqualis summæ earundem; junctaque ΡΤ vel ΤΠ bifariam secetur in Φ, Χ; ac ducatur ipsi ΤΡ normalis ΦΣ, vel ΣΧ ipsi ΠΤ, quæ occurrat rectæ ΠΡ in puncto Σ: Dico rectas ΣΡ, ΣΤ æquales esse diametris conjugatis quæsitis, si ΤΡ fuerit data differentia; vel ΠΣ, ΣΤ, si ΠΤ data fuerit conjugatarum summa. Namque ob æquales ΡΦ, ΦΤ, erunt ΣΡ, ΣΤ æquales inter se, ac quadratum ex ΣΤ, hoc est ΣΡ, superabit quadratum ex ΣΤ quadrato ex ΤΥ sive differentiâ inter quadratum Axis & figuram sectionis: adeoque (per 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}) ΡΣ, ΣΤ sunt diametris quæsitis æquales. Pari modo, si ΠΤ fuerit data summa, ΠΣ, ΣΤ erunt æquales, ob ΠΤ in Χ bisectam & angulum ΠΧΣ rectum; ac quadratum ex ΤΥ æquale erit differentiæ quadratorum ex ΠΣ, ΣΤ, quæ proinde erunt diametri quæsitæ. Oportebit autem, per ea quæ in 27ma septimi demonstrata sunt, differentiam conjugatarum datam minorem esse differentia inter Axes Hyperbolæ conjugatas.



Coroll. Hinc manifestum est quod, si in diversissimis Hyperbolis differentiæ inter quadrata Axium & figuras sectionum æquales fuerint, quascunque sumpseris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

PRO-



Componetur itaque problema, si fiat ut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum datam, ita semissis datæ differentiæ ad ΘO; quæ à centro Θ in Axe versus Ξ ponatur: deinde in producto Axe minore fiat ΘX ipsi OΞ æqualis, ac centro X radio ΘΞ describatur arcus circuli occurrens Axi in punctis M, μ, æqualiter à centro Θ distantibus; & erectis normalibus ut MA, invenientur diametri quæsitæ modo superius descripto. Cujus compositionis ratio ex Analysi & ex 47^{mæ} I. *El.* manifesta est.

Differentia autem proposita non major esse debet differentiâ Axium Ellipseos, nam (per 27^{am} VII^{mi}) si ponatur major eâ, problema impossible erit, punctumque M extra Axem cadet.

Aliter autem, ac modo sane non ineleganti, invenire possumus diametros Ellipseos conjugatas, datâ earundem vel summâ vel differentiâ. Quoniam enim AP (sive ea quæ potest semiaxium quadrata simul) poterit quoque (per duodecimam VII^{mi}) quarumvis semidiametrorum conjugatarum quadrata; radio AP describatur circulus AΓBΔ, & super diametrum AB ad centrum P erigatur normalis ΓPΔ, occurrens circulo in Γ, Δ: dein centro Δ radio ΔA circinetur arcus AZB, qui ob æquales AP, PΔ erit circuli quadrans, ac proinde angulus quem capit erit (per 20^{am}. III. *El.*) sesquialter anguli recti. Huic arcui inscribatur ZB æqualis differentiæ diametrorum conjugatarum, quæ producatur ad occursum semi-circuli AΓB in puncto H: Dico rectas BH, HZ æquales esse diametris conjugatis quas quærimus.

 Jungantur

five quadratis Axium simul: quare rectæ ΘΗ, ΗΒ, quarum summa est ΘΒ, æquales sunt diametris conjugatis quas invenire oportuit.

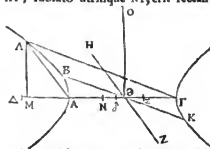
Coroll. Ac manifestum est quod, si in quibusvis Ellipsibus specie diversis, summæ quadratorum Axium æquales fuerint inter se, quascunque sumpseris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

Hic obiter notandum quod, quemadmodum quadrato radii ΑΡ æqualis est *Lunula Hippocratis* ΑΛΒΓ; ita, si ducatur diameter ΕΓΚ ipsi ΑΒ parallela, erit spatium ΑΕΚΒΑ æquale quadrato ex ΕΓ, ac proinde duplum Lunulæ ΑΛΒΓ: unde spatium ΕΓΗΑ semi-lunulæ ΑΗΓΑ sit æquale. Cujus rei demonstratio manifesta est.

PROPOSITIO XIII. PROBL.

Datis Axe & latere recto Hyperbolæ, invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam positione, quæ contineant rectangulum rectangulo dato æquale.

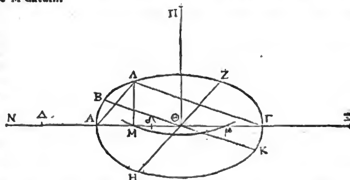
Manentibus Schematis Hyperbolæ prius descriptis, ponatur ΒΚ, ΖΗ diametros esse quæsitas. Quoniam autem (per 10^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΑΓ est ad rectangulum sub diametris conjugatis Hyperbolæ sicut ΝΓ ad eam quæ potest rectangulum ΝΜΞ, ac (per demonstrata in 7ma VIII^{vi}) rectangulum sub ΝΓ & summâ Axis & lateris recti æquale est quadrato ex ΑΓ; sublato utrinque ΝΓ, erit rectangulum sub ΓΔ (Axe & latere ejus recto simul) & eâ quæ potest rectangulum ΝΜΞ æquale rectangulo dato sub diametris quæsitis ΒΚ, ΖΗ. Si igitur applicetur rectangulum propositum ad ΓΔ summam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo, nempe ea quæ potest rectangulum ΝΜΞ, hoc est (per 6^{am}. II. *El.*) ea quæ potest differentiam quadratorum ex ΘΜ, ΘΞ. Sit latitudo ea ΘΟ, ac quadratum ex ΘΟ æquale erit differentiæ quadratorum ex ΘΜ, ΘΞ: utrinque adjiciatur quadratum ex ΘΞ, & quadrata ex ΘΟ, ΘΞ æqualia erunt quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΘΟ, ΘΞ: adeoque & ΘΜ datur, unde & punctum Μ datum.



Componetur

... ex ΘΠ quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΘΞ, ΘΠ: quare recta ΘΜ quoque datur, punctumque Μ datum.

Compositio autem manifesta est. Nam si applicetur rectangulum datum ad Γδ differentiam Axis & lateris ejus recti; hoc est, si habeatur latitudo ΘΠ, ita ut rectangulum sub ΘΠ, Γδ sit æquale rectangulo dato, ac ponatur ΘΠ in axe minore producto; dein centro Π radio ΘΞ describatur arcus circuli occurrens Axi in punctis Μ, μ: erectis normalibus, ut ΜΛ, habebuntur, modo toties dicto, diametri conjugatæ, quarum rectangulum æquale erit dato.



Oportebit autem rectangulum datum (per 28^{am} VII^{mi}) non minus esse rectangulo sub utroque Axe comprehenso; nec majus esse quadrato sub æqualibus diametris contento, hoc est (per 12^{am} VII^{mi}) semi-summâ quadratorum ex utroque Axe, sive rectangulo sub ΘΓ, ΓΔ, quod æquale est semi-summæ quadrati Axis & figuræ ejusdem.

Obtinebimus autem easdem diametros modo prorsus diverso. Quoniam enim (per 12^{am} VII^{mi}) summa quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ sit æqualis summæ datæ quadratorum Axium Ellipseos; si eidem summæ adjiciatur duplum rectangulum sub ΒΚ, ΖΗ, fiet (per 4^{am} II. *Elem*) quadratum ex ΒΚ, ΖΗ simul sumptis, adeoque ΒΚ, ΖΗ simul dantur. Si vero ab eadem quadratorum summâ auferatur duplum illud rectangulum, remanebit (per 7^{am} II. *Elem.*) quadratum differentiæ ipsarum ΒΚ, ΖΗ: adeoque & ipsa differentia data est. Datis autem summâ ac differentiâ duarum rectarum, ipsæ rectæ quoque dantur.

datâ summâ ad ΓΔ summam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo duplæ ipsius ΘΜ æqualis: data est igitur ΘΜ, ac ob datum Θ punctum Μ quoque datur.

Componetur itaque problema, si applicetur semi-summa quadratorum è diametris conjugatis ad ΓΔ sive ad summam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur latitudo ex applicatione orta de centro Θ ad punctum Μ in Axe situm: inventoque puncto Μ habebuntur diametri ipsæ, prout supra. Demonstratio autem ex Analysi manifestissima est.

Manifestum etiam est quod summa quadratorum proposita non minor esse potest summâ quadratorum Axium, hoc est summâ quadrati Axis & figuræ ejusdem, sive rectangulo ΑΓΔ.

PROPOSITIO XVI. PROBL.

Datis Ellipseos Axe & latere recto, oporteat invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam positione, quæ datam habeant quadratorum differentiam.

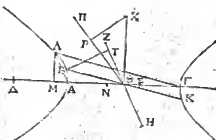
Manentibus Ellipseos figuris prius descriptis, sint diametri ΒΚ, ΖΗ conjugatæ, quarum quadrata datam habeant differentiam: ipsarumque situm ac magnitudinem hoc modo investigabimus. Quoniam (per 14^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΑΓ est ad differentiam quadratorum è diametris conjugatis sicut ΝΓ ad duplam ipsius ΘΜ; argumento toties usurpato, erit rectangulum sub Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) & duplâ ipsius ΘΜ æquale differentiæ quadratorum è diametris conjugatis: applicatâ itaque datâ quadratorum differentiâ ad Γδ (datam Axis & lateris recti differentiam) emerget latitudo data, nempe dupla ipsius ΘΜ: est igitur ΘΜ data, punctumque Μ datum.

Manifesta autem est Compositio: nam si applicetur semi-differentia quadratorum è diametris conjugatis ad Γδ differentiam Axis & lateris recti, orietur ex applicatione latitudo quæsitæ ΘΜ æqualis, unde cætera consequuntur.

Oportebit

... ipsas jam descriptas esse suppono. Propositionem autem 31^{mam} septimi inter *Theoremata dioristica* inseruisse videtur, ut viam sterneret ad solutionem eorundem problematum, ipsis Curvis nondum describi suppositis, ut in præmissis dictum est.

Quoniam enim (per 31^{am} septimi) rectangulum sub Axibus contentum sit æquale parallelogrammo obliquangulo sub quibuscunque duabus conjugatis diametris comprehenso; si ab extremitate diametri alicujus ad conjugatam ejus demittatur normalis, erit duplum rectanguli sub normali & diametro illâ conjugatâ contenti æquale rectangulo sub Axibus sectionis: quod proinde rectangulum erit ad rectangulum sub ipsis conjugatis contentum sicut normalis ipsa ad semi-diametrum, à cujus extremitate demissa est normalis. Dato autem angulo, data est ratio hæc, adeoque, ob datum Axium rectangulum, datum est rectangulum sub diametris conjugatis.

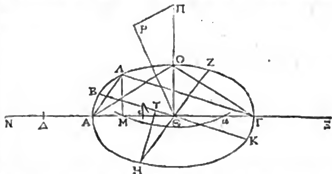


Pone jam factum esse quod quæritur, ac sint BK, ZH diametri conjugatæ, continentes angulum BΘZ æqualem angulo dato: demittaturq; normalis BT ad diametrum ZH; ac, ob datum angulum BΘZ, dabitur ratio BT ad BΘ. Sed, per jam dicta, sicut BT ad BΘ ita rectangulum sub Axibus ad rectangulum sub BK, ZH contentum: &, ob datos Axes, datum quoque erit rectangulum sub BK, ZH. Dato autem rectangulo sub diametris conjugatis dantur quoque ipsæ diametri, tam magnitudine quam positione, per ea quæ demonstravimus in 13^{a} hujus.

Hinc talis conficitur problematis compositio. Fiat angulus AΘΠ æqualis angulo dato, in qua capiatur ΘP ad Axem AΓ sicut Axis conjugatus ad ΓΔ sive summam Axis & lateris ejus recti, & super ΘP ad angulos rectos erigatur PX occurrens Axi conjugato producto in X: Dico XΞ junctam vel jungi suppositam ipsi ΘM æqualem esse. Invento autem puncto M, erigatur normalis AM, ac habebuntur cætera sicut prius.

demissa normali ab extremitate alicujus diametri ZH ad conjugatam ejus BK, ut HT, erit duplum rectangulum sub BK, HT æquale rectangulo sub Axibus contento; quod quidem datum est, adeoque rectangulum sub BK, HT datur. Est autem rectangulum sub BK, HT ad rectangulum sub BK, HΘ sicut HT ad HΘ; ratio autem HT ad HΘ datur, ob angulum BΘH datum: ac proinde datum est rectangulum sub BK, HΘ, ejusque duplum sub BK, HZ, sive rectangulum sub diametris quæsitis. Dato autem conjugatarum rectangulo dabitur quoque (per 14^{am} VIII^{vi}) recta ΘM; unde punctum M datum.

Componetur itaque problema hoc modo. Fiat angulus AΘP æqualis angulo dato sub conjugatis contento, ac capiatur ΘP, ita ut rectangulum sub ΘP & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) æquale sit rectangulo sub Axibus sectionis; & erigatur normalis PΠ occurrens Axi minori producto in Π: dein centro Π, radio ipsi ΘΞ æquali, describatur arcus circuli occurrens Axi majori in punctis M, μ; & erigantur normales ut MΛ, unde cætera consequentur modo toties dicto.



Rectangulum enim sub Γδ, ΘP æquale est parallelogrammo Ellipsi circumscripto; quod quidem est ad rectangulum sub conjugatis BK, ZH sicut HT ad HΘ, hoc est ut ΘP ad ΘΠ, quia angulus ΘΠP angulo BΘH factus est æqualis: proinde rectangulum sub Γδ, ΘΠ erit æquale rectangulo sub BK, ZH: quare (per ea quæ in 14ta hujus invenimus) circulus centro Π, radio ΘΞ descriptus, per punctum quæsitum M necessario transibit.

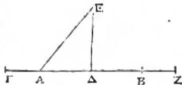
Oportebit autem angulum acutum à diametris conjugatis contentum non minorem esse angulo deinceps ei qui sub rectis AO, OΓ ad mediam sectionem inclinatis continetur; uti demonstravit *Apollonius* in penultima Propositione libri II. Ac si minor fuerit eo, recta ΘΠ major evadet ipsa ΘΞ, ac proinde circulus præscriptus ad occursum Axis AΓ pertingere non potest.

Ipsas autem diametros obtinebimus, si datæ summæ quadratorum ex utroque Axe

tum præmittere.

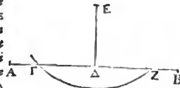
Oporteat igitur primo, applicare datum quadratum ad rectam datam excedens quadrato: hoc est, invenire puncta Γ, Ζ *in data rectâ* ΑΒ *productâ, ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia sint quadrato è rectâ datâ* ΔΕ. *Bisecetur* ΑΒ *in* Δ, *& erigatur normalis* ΔΕ, *quæ fiat æqualis lateri quadrati applicandi: ac junctæ rectæ* ΑΕ *vel jungi suppositæ æquales fiant* ΔΓ, ΔΖ: *Dico* Γ, Ζ *esse puncta quæsita.*

Est enim quadratum ex ΑΕ, *hoc est quadratum ex* ΓΔ, *æquale quadratis ex* ΑΔ, ΔΕ *simul. Quadratum autem ex* ΓΔ (*per* 6^{am} *II. Elem.*) *æquale est quadrato ex* ΑΔ *una cum rectangulo* ΑΓΒ: *quadrata igitur ex* ΑΔ, ΔΕ *æqualia sunt quadrato ex* ΑΔ *& rectangulo* ΑΓΒ; *quare sublato communi quadrato ex* ΑΔ, *erit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *quod fieri oportuit. Ac eodem modo probabitur rectangulum* ΑΖΒ *eidem quadrato ex* ΔΕ *æquale: unde manifestum est rectas* ΑΓ, ΒΖ *æquales esse.*



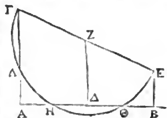
2do *Oporteat applicare datum quadratum ad rectam datam deficiens quadrato, sive invenire in rectâ datâ* ΑΒ, *inter* Α *&* Β, *puncta* Γ, Ζ, *ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia sint quadrato datæ alicujus* ΔΕ. *Bisecetur similiter* ΑΒ *in* Δ, *ac sit normalis* ΔΕ *latus quadrati dati; & centro* Ε, *radio* ΑΔ *describatur arcus circuli occurrens rectæ* Α,Β *in punctis* Γ, Ζ: *Dico* Γ, Ζ *puncta esse quæ quærimus.*

Quadratum etenim ex ΕΓ *æquale est quadratis ex* ΔΕ, ΓΔ *simul, ac idem quadratum ex* ΕΓ *sive* ΑΔ (*per* 5^{am} *II. Elem.*) *æquale est rectangulo* ΑΓΒ *una cum quadrato ex* ΓΔ: *sublato itaque communi quadrato ex* ΓΔ, *restabit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *parique argumento etiam rectangulo* ΑΖΒ: *unde* ΑΓ *ipsi* ΖΒ *&* ΑΖ *ipsi* ΓΒ *fiunt æquales. Ac manifestum est quod* ΔΕ *latus quadrati applicandi non majus esse debet dimidio rectæ datæ* ΑΒ; *nam si aliter fuerit, circulus centro* Ε *radio* ΑΔ *descriptus nec secabit neque continget ipsam* ΑΒ; *adeoque problema impossibile est.*



3° *Applicandum sit rectangulum sub datis lateribus contentum ad rectam datam excedens*

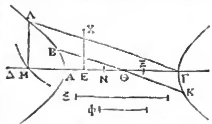
lis, ut & ΛΑ ipsi ΒΕ: proinde rectangulum ΛΑΓ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΒΕ, æquale erit (per 36^{am} III. Elem.) rectangulo ΗΑΘ, hoc est ipsi ΑΗΒ vel ΑΘΒ rectangulo, adeoque puncta Η, Θ rem præstant. Oportebit autem rectangulum sub ΑΓ, ΒΕ non majus esse quadrato ex ΑΔ, quia (per 5^{am} II. El.) quadratum ex ΑΔ majus est rectangulo ΑΗΒ quadrato ex ΗΔ; adeoque rectangulum ΑΗΒ, hoc est ΓΑΛ, sive quod fit sub ΑΓ, ΒΕ, non majus erit quadrato ex ΑΔ vel ΔΒ. Sin aliter fuerit, circulus ΓΛΕ rectæ ΑΒ non occurret: unde constabit applicationem propositam impossibilem esse.

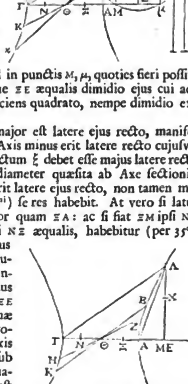


PROPOSITIO XIX. PROBL.

Datis in Hyperbola Axe & latere ejus recto, invenire diametrum quæ habeat latus suum rectum rectæ datæ æquale.

Manentibus Schematis Hyperbolæ præcedentibus, sit recta data ξ, & erit (per 15^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex Axe ΑΓ, sive rectangulum sub ΝΓ & ΓΔ (summa Axis & lateris recti) ad rectangulum sub ΝΓ & ΜΞ, hoc est ut summa illa Axis & lateris recti ad ΜΞ, ita quadratum lateris recti dati ξ ad quadratum ex ΜΝ; adeoque si fiat, ut summa Axis & lateris ejus recti ad latus rectum ξ ita idem ξ ad aliam, puta ad Φ, data erit recta Φ; ac rectangulum sub ΜΞ & Φ æquale erit quadrato ex ΜΝ: unde ΜΞ erit ad ΜΝ sicut ΜΝ ad Φ. Jam si Axis sectionis major fuerit latere ejus recto, ΜΞ major erit quam ΜΝ, ac proinde ΜΝ major quam Φ: quare per conversionem rationis ΜΞ erit ad ΞΝ sicut ΜΝ ad excessum quo ΜΝ superat Φ, ac permutando ΜΞ erit ad ΜΝ sicut ΞΝ ad differentiam inter ΜΝ & Φ: rursusque per conversionem rationis ΜΞ erit ad ΞΝ sicut ΞΝ ad excessum quo ipsa ΞΝ superat differentiam ipsarum ΜΝ & Φ. Sed ΜΝ est excessus quo ΜΞ superat ΞΝ; igitur excessus quo ΞΝ superat differentiam ipsarum ΜΝ & Φ æqualis est excessui quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ: erit igitur ut ΜΞ ad ΝΞ ita ΝΞ ad excessum quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ; unde rectangulum sub ΜΞ & excessu quo dupla ipsius ΝΞ & Φ simul superant ΜΞ æquale est





... ejus recto ad semi-latus rectum datum, ita idem semi-latus rectum ad tertiam proportionalem, cui æqualis ponatur NE; & erectâ ad Axem normali EX, fiat EX ipsi NΞ æqualis; & centro X radio ΞE describatur arcus circuli occurrens Axi in puncto M quæsito, vel in punctis M, μ, quoties fieri possit: est enim NE æqualis dimidio ipsius Φ; adeoque ΞE æqualis dimidio ejus cui adjacet rectangulum æquale quadrato ex NΞ deficiens quadrato, nempe dimidio excessûs quo Φ superat duplam ipsius NΞ.

Διορισμός. In primo quidem casu, ubi Axis major est latere ejus recto, manifestum est (ex 33^{æ} VII^{mi}) quod latus rectum Axis minus erit latere recto cujusvis alterius diametri; adeoque propositum latus rectum ξ debet esse majus latere recto Axis; ac quo majus est ξ eo remotior erit diameter quæsita ab Axe sectionis. Atque etiam in altero casu, si Axis minor fuerit latere ejus recto, non tamen minor dimidio ejus, eodem modo (per 34^{am} VII^{mi}) se res habebit. At vero si latus rectum majus fuerit duplo Axis, erit NΞ major quam ΞA: ac si fiat ΞM ipsi NΞ æqualis, & erigatur normalis MX sive EX ipsi NΞ æqualis, habebitur (per 35^{am} VII^{mi}) diameter illa sectionis BK, cujus latus rectum, ex omnibus lateribus rectis *Minimum*, duplum erit diametri; coincidentibus scilicet punctis M, E, & circulo, cujus centrum X & radius MΞ, Axem contingente in puncto M, propter ΞE ipsi EX æqualem. Diameter autem BK, per ea quæ in sextâ hujus demonstravimus, media est proportionalis inter MΞ sive NΞ & summam Axis ejusque lateris recti; adeoque rectangulum sub NΞ & summâ Axis & lateris recti æquale est quadrato ex BK. Sed summa Axis & lateris recti est ad differentiam earundem sicut Axis AΓ ad NΞ; quare rectangulum sub NΞ & summa Axis laterisque recti ejus æquale est rectangulo sub Axe & excessu lateris recti supra Axem: quadratum igitur ex BK æquale est rectangulo sub Axe & differentia Axis & lateris recti, hoc est differentiæ inter figuram Axis ejusdemque

 Axis

ejusdem; hoc est, æqualis est rectangulo sub ... & differentiâ inter Axem & latus rectum ejus: rectangulum igitur sub ZH & excessu quo latus rectum ejus superat ipsam ZH datum est. Adjacet autem rectæ datæ, nempe lateri recto proposito, deficiens quadrato: proinde latus rectum æquale erit utrique & ZH & alteri diametro quæ idem habeat latus rectum ac ZH.

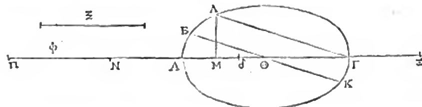


Coroll. Hinc manifestum est alteram diametrum, quæ latus rectum idem habet ac Axis AΓ, æqualem esse excessui quo latus illud rectum superat Axem.

PROPOSITIO XX. PROBL.

Datis in Ellipsi Axe & latere ejus recto: invenire diametrum, quæ habeat latus suum rectum rectæ datæ æquale.

Iisdem manentibus quæ in Schematis Ellipseos prioribus. Sit recta data ξ, & oporteat invenire diametrum illam Ellipseos quæ habeat latus ejus rectum ipsi ξ æquale. Per 15^{am} VII^{mi}, demonstratum est quadratum ex AΓ, sive rectangulum sub NΓ & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) esse ad rectangulum sub NΓ, MΞ, sicut quadratum lateris recti ξ ad quadratum ex MN: est igitur ut differentia Axis & lateris recti ad MΞ ita quadratum ex ξ ad quadratum ex MN: quapropter si



fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad ξ ita ξ ad aliam, quæ sit Φ; data erit recta Φ, ac rectangulum sub MΞ & Φ æquale erit quadrato ex MN: ἀνάλογον itaque MΞ erit ad MN sicut MN ad Φ, ac componendo ΞN erit ad MN sicut MN & Φ simul ad Φ; unde rectangulum sub ΞN & Φ æquale erit quadrato ex MN una cum rectangulo sub MN & Φ. Datum autem est rectangulum sub ΞN, Φ; datum igitur est rectangulum sub MN & MN & Φ simul: adjacet igitur rectangulum datum sub ΞN & Φ datæ rectæ Φ excedens quadrato; quare data est recta MN; ac ob punctum N datum, datur quoque punctum M.

Compo-

Hinc talis conficitur constructio. Fiat ut differentia Axis laterisque ejus recti ad ξ ita dimidium ipsius ξ ad dimidium ipsius φ, cui fiat ipsa ΝΕ æqualis; & erectâ normali ΕΧ, fiat ΕΧ ipsi ΝΞ æqualis, ac centro Χ radio ΞΕ describatur circuli particula occurrens Axi in puncto Μ: quo invento, cætera peragantur ut prius.

Ac manifestus est hujus problematis διορισμός. Nam si latus rectum propositum minus fuerit latere recto Axis majoris, vel majus latere recto Axis minoris, impossibile erit problema; cadente puncto Μ, in priori casu, inter Ε & Α; in posteriore, ultra verticem Γ.

PROPOSITIO XXI. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto Axis; invenire diametrum ejus, quæ ad latus suum rectum datam habeat rationem.

Manentibus prius descriptis, sit ratio data sicut Σ ad Τ, ac ponatur ΒΚ diameter quæsita; &, demissâ normali ΑΜ, erit (per 6^am VII^mi) ut Σ ad Τ, sive ut ΒΚ ad latus ejus rectum, ita ΜΞ ad ΜΝ: datur igitur ratio ΜΞ ad ΜΝ: ac dividendo ratio ΝΞ ad ΞΜ data est, quæ nempe eadem est ac ratio differentiæ terminorum Σ & Τ ad terminum Σ diametro analogum: ac ob datam ΝΞ data quoque est ΞΜ, unde & punctum Μ datum.

Si igitur fiat ut differentia terminorum ad terminum diametro analogum, ita ΝΞ ad ΞΜ; habebitur punctum quæsitum Μ, unde cætera consequuntur.

Ratio autem proposita non major esse potest ratione Axis ad latus ejus rectum, si Axis major fuerit latere recto; nec minor ratione eorundem, si Axis minor fuerit.

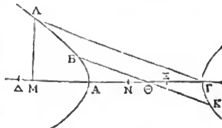
Si igitur fiat ut ſumma terminorum Σ, Τ ad terminum Σ ita ΝΞ ad ΞΜ, habebimus punctum Μ, & ejus ope diametrum quæſitam, tam magnitudine quam poſitione, per ea quæ in ſexta hujus oſtendimus.

Ratio autem propoſita non major eſſe poteſt ratione Axis majoris ad latus ejus rectum; nec minor ratione Axis minoris ad latus ejus rectum; hoc eſt non minor ratione lateris recti Axis majoris ad Axem ipſum.

PROPOSITIO XXIII. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; oporteat invenire diametri ſitum & magnitudinem, quæ datâ differentiâ differat à latere ſuo recto.

Manentibus Hyperbolæ figuris, puta factum; ſitque diameter quæſita ΒΚ, eidemque parallela ΓΑ, ac demittatur normalis ΑΜ. Erit itaque (per 16^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex ΑΓ, ſive rectangulum ſub ΝΓ, ΓΔ, ad rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ (hoc eſt ut ΓΔ ad ΜΞ) ita quadratum differentiæ diametri ΒΚ lateriſque ejus recti ad quadratum ex ΞΝ. Data autem eſt ratio quadrati differentiæ iſtius ad quadratum ex ΞΝ, ob datas ipſas: quare datur ratio ΓΔ ad ΜΞ; &, ob datam ΓΔ, recta ΜΞ quoque datur, adeoque & punctum Μ.



Componetur autem problema hoc modo. Fiat ut quadratum differentiæ datæ ad quadratum ex ΞΝ, ita ſumma Axis lateriſque ejus recti ad ΜΞ: invento autem puncto Μ peragantur cætera ad modum ſuperius dictum.

Ac conſtabit differentiam datam minorem eſſe debere differentiâ inter Axem ejuſque latus rectum, ex iis quæ in 6ta VII^{mi} demonſtrata ſunt, uti & ex ipsâ conſtructione: ſunt enim rectæ omnes ΜΞ reciprocè ut quadrata differentiarum inter diametros lateraque earundem recta: adeoque perpetuo augentur dum differentiæ illæ decreſcunt, quæ proinde ad *Minimam* nunquam devenire poſſunt.

Diametrorum autem magnitudines aliunde obtinebimus: cum enim differentia inter cujuſvis diametri quadratum & figuram ejuſdem (per 29^{am} VII^{mi}) ſit ubique æqualis

ΘΜ: ac proinde ἀνάλογον ΜΞ erit ad ΘΜ ſicut ΘΜ ad Ψ; ac dividendo vel componendo ΞΘ erit ad ΘΜ ſicut differentia vel ſumma ipſarum ΘΜ & Ψ ad ipſam Ψ; adeoque datum rectangulum ſub ΞΘ & Ψ æquale erit rectangulo ſub ΘΜ & ſummâ vel differentiâ ipſarum ΘΜ & Ψ; quod rectangulum proinde datum eſt: adjacet igitur rectangulum æquale rectangulo ſub ΞΘ & Ψ datæ rectæ Ψ, excedens quadrato; quia Ψ data eſt differentia laterum: datur igitur (*per Lem.* 3. *Schol. noſtri*) recta ΘΜ; ac, ob datum Θ, datur quoque punctum Μ.

Unde talis oritur Compoſitio. Fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad ſemi-differentiam diametri lateriſque recti propoſitam, ita eadem ſemi-differentia ad quartam, nempe ad ipſam Ψ; cui æqualis ponatur in Axe recta ΘΞ: & producto Axe minore ad Π ita ut ΘΠ ſit æqualis ipſi ΘΞ, eidem parallela ducatur ΡΞ ipſi ΞΘ æqualis; ac jungatur ΠΡ, quæ biſecetur in Ο: ac arcus circuli ΜΡμ centro Ο radio ΡΟ deſcriptus, ſi problema poſſibile ſit, occurret Axi in punctis Μ, μ, vel in ſolo μ; uti in ſequentibus patebit.

Aliter autem & paulo ſimplicior habetur problematis ſolutio. Nam cum ΜΞ ſit ad ΘΜ ſicut ΘΜ ad Ψ, erit per converſionem rationis ΜΞ ad ΞΘ ſicut ΘΜ ad exceſſum quo ΘΜ ſuperat Ψ, ac permutando ΜΞ erit ad ΘΜ ſicut ΞΘ ad dictum exceſſum: quare rurſus, per converſionem rationis, ΜΞ erit ad ΞΘ ſicut ΞΘ ad exceſſum quo ΞΘ & Ψ ſimul ſumptæ ſuperant ΘΜ, hoc eſt ad exceſſum quo ΝΞ & Ψ ſimul ſuperant ΜΞ: quadratum igitur ex ΞΘ æquale eſt rectangulo ſub ΜΞ & exceſſu

ac si major fuerit differentiâ quæ est inter Axem minorem & latus ejus rectum, cadet quoque punctum μ ultra verticem Γ: unde omnino impossibile erit problema. Hac vero si minor fuerit, sed major eâ quæ inter Axem majorem & latus ejus rectum intercedit, duabus diametris utrinque Axi minori adjacentibus satisfactum erit problemati. Si vero differentia proposita minor fuerit differentia inter Axem majorem & latus ejus rectum, cadet utrumque M & μ in Axe AΓ, & omnino habebuntur quatuor diversæ diametri quarum differentiæ à lateribus suis rectis æquales erunt inter se & eidem datæ. *Minima* autem non datur differentia, sed in diametris conjugatis æqualibus evanescit, punctis M & μ in centro Θ coeuntibus.

Coroll. Ac nullo negotio demonstrabitur, duarum diversarum diametrorum rem propositam præstantium differentiam æqualem esse dimidio datæ differentiæ inter diametros illas & latera sua recta: adeoque si data fuerit altera harum diametrorum una cum latere ejus recto, alteram facile invenies. Etenim datarum (diametri & semi-differentiæ) summa ac differentia æquales sunt, altera quidem diametro, altera lateri ejus recto, quæsitis.

Coroll. 2. Quare duplum diametri alicujus æquale erit alteri diametro ejusque lateri recto simul sumptis, quarum differentia æqualis sit differentiæ inter datam diametrum & latus rectum ejusdem.

Coroll. 3. Eodemque argumento patebit. Ellipseos diametrum, cujus conjugata ipsi æqualis est, mediam proportionalem esse inter duas quasvis diametros sectionis, quarum altera excesserit latus suum rectum eodem excessu quo latus rectum alterius superat diametrum.

PROPOSITIO XXV. PROBL.

Datis in Hyperbola Axe & latere ejus recto; oporteat invenire positionem diametri illius, quæ una cum latere suo recto datam conficit summam.

Iisdem positis ac in præcedentibus Hyperbolæ Schematis, puta factum quod quæritur: ac sit BK diameter illa quæ cum latere suo recto propositam facit summam. Per 17^am VII^mi quadratum ex AΓ, sive rectangulum NΓΔ, id est, quod sub NΓ & utroque Axe & latere ejus recto simul, est ad rectangulum sub NΓ & MΞ, sicut quadratum summæ diametri alicujus BK & lateris ejus recti ad quadratum rectæ compositæ ex NM, MΞ simul sumptis: erit igitur ut summa Axis & lateris ejus

recti

rectangulum igitur sub ΜΞ & dictum excessum æquale erit quadrato ex ΞΘ. Datâ autem ΞΘ, datum est rectangulum illud, adjacens rectæ datæ, æquali nempe ipsi ψ auctæ vel minutæ duplo ipsius ΞΘ, & deficiens quadrato: unde (*per Lemma* 2^{dum} *Schol.*) data erit recta ΜΞ, punctumque Μ datum.

Componetur itaque hoc modo. Fiat ut dupla summa Axis & lateris ejus recti, sive ΓΔ bis, ad datam semi-summam diametri & lateris ejus recti, ita eadem semi-summa ad tertiam proportionalem, quæ ideo æqualis erit dimidio rectæ quam ψ diximus; ac fiat ΘΕ (versus Α ponenda) eidem dimidio rectæ ψ æqualis: unde ΞΕ æqualis erit dimidio ejus cui applicandum est rectangulum æquale quadrato ex ΞΘ, idque in utroque Casu. Erigatur igitur (*per Lemma* 2^{dum}) normalis ΕΧ ipsi ΞΘ æqualis, ac centro Χ radio ΞΕ describatur arcus circuli occurrens Axi in puncto Μ, vel etiam in punctis Μ, μ, si problema dupliciter construi possit; uti proxime docebitur.

Determinatur autem problema hoc ex propositionibus 38va, 39na & 40^{a} Septimi. Nam si Axis sectionis major fuerit latere ejus recto, per 38^{vam} erit summa Axis & lateris ejus recti minor quavis aliâ diametro una cum latere ejus recto simul sumpto; oportebit igitur summam propositam majorem esse Axe & latere ejus recto simul. Nec aliter si Axis minor fuerit latere ejus recto, sed non minor tertia parte ejusdem; nam, per 39^{am} Septimi, constat quoque summam Axis laterisque ejus recti minorem esse summâ diametri alterius cujusvis & lateris ejus recti: eâ igitur major esse debet summa proposita; aliter problema erit impossibile.

Quod si Axis Hyperbolæ minor fuerit tertia parte lateris ejus recti, erit ΞΘ major quartâ parte Axis; ac si fiat ΞΕ ipsi ΞΘ æqualis, cadet punctum Ε in Axe ultra verticem Α; erectâque normali ΕΧ ipsi ΞΘ æquali, circulus centro Χ radio ΞΕ, hoc est ΞΘ, continget Axem in puncto Ε; ac proinde diameter ΒΚ, cujus positio hoc in casu determinatur per punctum Ε coincidens cum puncto Μ, *Minimam* omnium habebit summam sui laterisque sui recti. Et quoniam ΝΕ tripla est ipsius ΞΕ, erit (per 6^{am} VII^{mi}) latus rectum diametri ΒΚ triplum ipsius ΒΚ, quod quidem plenius in 40ma VII^{mi} demonstratum invenietur. Diameter autem illa ΒΚ

quadrato summæ Axis & lateris ejus recti, sola recta BK rem præstat ad idem latus Axis. Hac vero si major fuerit summa proposita, minor vero summa Axis & lateris ejus recti, occurret circulus radio ΞE centro X descriptus Axi in punctis M & μ, ultra verticem A; unde obtinebuntur duæ diametri ab utraque parte ipsius BK & ad idem Axis latus, quæ habeant eandem ipsarum & laterum suorum rectorum summam: ut omnino quatuor diametri rem præstent. Si vero summa illa æqualis fuerit summæ Axis & lateris ejus recti, duæ tantum præter Axem diametri, (ab utroque ejus latere una) satisfaciunt problemati, coincidente puncto μ cum vertice A. Quod si summa proposita major fuerit eâ summâ, una tantum diameter ab utraque parte Axis, ultra BK, solutionem præbet; cadente puncto μ citra verticem A. *Maxima* autem non datur.

Coroll. 1. Hinc facillime constabit, quod quemadmodum diameter BK quarta pars est summæ ipsius BK & lateris ejus recti, ita summa duarum quarumvis diametrorum, communem una cum lateribus suis rectis summam conficientium, semissis est communis illius summæ.

Coroll. 2. Hinc diameter illa quæ eandem habet summam sui laterisque sui recti, quam habet alia quævis data diameter, æqualis erit semissi excessûs quo latus rectum diametri datæ superat ipsam diametrum: ac latus rectum alterius illius diametri æquale erit semi-summæ lateris recti diametri datæ ac triplæ ipsius diametri.

Coroll. 3. Diameter autem illa quæ eandem habet summam sui laterisque sui recti. quam habet Axis, æqualis erit semissi excessûs quo latus rectum Axis superat Axem: ac latus ejus rectum æquale erit semi-summæ lateris recti Axis & Axis tripli; ac proinde minus est latere recto Axis semisse excessûs quo latus rectum Axis superat Axis triplum.

PROPOSITIO XXVI. PROBL.

Ellipseos Axe & latere recto datis, oporteat invenire diametrum, quæ una cum latere suo recto datam conficiat summam.

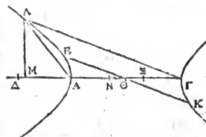
Manentibus iis quæ in Ellipsi supposuimus, puta factum; ac sit BK diameter quam quærimus. Ac (per 17^{am} Septimi) erit quadratum Axis ad rectangulum sub NΓ, MΞ sicut quadratum summæ diametri & lateris recti datæ ad quadratum summæ ipsarum MN, MΞ, hoc est, ad quadratum ex NΞ; erit igitur, per toties dicta, differentia Axis & lateris ejus recti ad MΞ sicut quadratum summæ propositæ ad quadratum

& lateris ejus recti ad summam Axis laterisque recti Axis, ita ipse Axis Ellipseos ad diametrum quæsitam: unde manifestum est, ob datum Axem ejusque latus rectum, summam diametri cujusvis & lateris ejus recti reciprocè proportionalem esse ipsi diametro Ellipseos.

PROPOSITIO XXVII. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, oporteat invenire positionem diametri quæ habeat figuram ejus, sive rectangulum sub diametro & latere ejus recto, proposito rectangulo æquale.

Iisdem manentibus quæ in figuris Hyperbolæ præmissis, erit (per 18^vam^ VII^mi^) quadratum ex AΓ ad rectangulum sub diametro BK & latere ejus recto, sicut NΓ ad MN; sed quadratum ex AΓ ostensum est æquale rectangulo sub NΓ & summa Axis & lateris ejus recti: quare, ob utrinque inventum NΓ, erit rectangulum sub MN & summa Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo sive figuræ propositæ: si igitur rectangulum illud datum applicetur rectæ datæ, nempe ipsi ΓΔ, summæ Axis & lateris ejus recti; latitudo ex applicatione orta æqualis erit quæsitæ MN, quæ proinde data est: ac ob datum punctum N punctum M quoque datur.



Applicetur igitur figura proposita ad summam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur inventa latitudo à puncto N versus A, ut NM; ac si major fuerit NM quam NA, possibile erit problema: invento autem puncto M, peragantur cætera ut in præcedentibus. Διορισμὸν autem habet ex 42da VII^mi^, qua demonstratur figuram propositam minorem esse non posse figurâ Axis: *Maximam* autem figuram non habet Hyperbola.

 PRO-

normalis MA, cujus quadratum sit ad rectangulum AMΓ ut latus rectum Axis ad ipsum Axem; junctæque ΓA parallela ducatur BK, quæ, per demonstrata in præmissis, diameter erit quam quærimus.

Limites autem habet problema hoc ex 43ⁱᵃ Septimi, qua constat figuram propositam non minorem esse figurâ Axis majoris; aliàs enim caderet punctum M citra A, extra sectionem: nec potest esse major figurâ Axis minoris; hoc enim si fuerit, caderet M extra sectionem, ultra verticem Γ. Nec opus est ut toties repetamus, reperiri aliam diametrum ipsi BK æqualem, parique intervallo alteri Axis lateri adjacentem, quæ quoque rem propositam efficiat.

In hac autem, uti & in præcedente, diametrum quæsitam habebimus, ope 29^{ne} & 30me VII^{mi}. Nam cum in Ellipsi (per 30^{mam}) summa quadrati & figuræ Axis sit semper æqualis summæ quadrati diametri cujuscunque & figuræ ejusdem; si de datâ summâ quadrati & figuræ Axis auferatur data figura diametri quæsitæ, restabit quadratum ipsius diametri. In Hyperbola autem differentia quadrati & figuræ Axis (per 29^{am} VII^{mi}) æqualis est differentiæ quadrati & figuræ cujusvis diametri; erit igitur excessus, quo quadratum Axis & proposita figura simul superant figuram Axis, æqualis quadrato diametri quæsitæ.

PROPOSITIO XXIX. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, proponatur diametrum sectionis invenire, cujus quadratum una cum quadrato lateris recti ejusdem datam conficiat summam.

Iisdem positis, quæ in prioribus Hyperbolæ Schematis descripta sunt, puta factum; & sit BK diameter illa quam quærimus: erit igitur (per 19^{am} VII^{mi}) quadratum ex AΓ, sive rectangulum sub NΓ & summâ Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum sub NΓ & MΞ; hoc est, ut summa Axis & lateris recti ad MΞ, ita proposita summa quadratorum ex BK & latere ejus recto ad summam quadratorum ex NM & MΞ: ac applicatâ quadratorum summâ illâ datâ ad summam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum sub MΞ & latitudine ex applicatione ortâ, quæ sit ψ, æquale summæ quadratorum ex MN & MΞ.

Jam Axis sectionis vel major erit latere ejus recto, vel minor, vel eidem æqualis; ac

portio, quæ occurrat Axi in puncto M, ad quod erigatur Axi normalis MΛ; cæteraque fiant quæ in præcedentibus. Demonstratio autem Analysi reciproca satis manifesta est, cum scilicet facta sit EX æqualis ei quæ potest duplum quadrati ex ΞΘ, sive semissi quadrati ex NΞ.

Neque alium habet limitem, præterquam quod in 44ta VII^{mi} demonstratum sit summam quadratorum Axis laterisque ejus recti minorem esse summa quadratorum laterum figuræ cujuslibet alterius diametri. Hâc igitur si summa proposita minor fuerit, cadet punctum M citra verticem, sive extra sectionem; vel circulus Axem non attinget: ac proinde problema impossibile erit.

PROPOSITIO XXX. PROBL.

Iisdem positis, sit jam Axis Hyperbolæ minor latere ejus recto; ac oporteat invenire diametrum sectionis, quæ habeat quadrata laterum figuræ ejus simul sumpta æqualia dato rectangulo.

Per ea quæ in præcedente demonstravimus, ex 19na VII^{mi} erit ut summa Axis & lateris ejus recti ad MΞ, ita proposita quadratorum summa ad summam quadratorum ex NM & MΞ: quare applicatâ summâ illâ datâ ad summam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum sub MΞ & datâ latitudine ex applicatione ortâ, quæ sit recta ψ, æquale summæ quadratorum ex MN, MΞ. Quoniam vero Axis AΓ minor est quam latus ejus rectum, erit MΞ minor quam MN. Verum (per 7^{am} II^{di} *Elem.*) quadrata ex MN, MΞ simul æqualia erunt duplo rectangulo sub NMΞ una cum quadrato ex NΞ, hoc est, duplo rectangulo sub MΞ; & MΞ, NΞ simul una cum quadrato ex NΞ: quapropter rectangulum sub MΞ & ψ æquale erit duplo rectangulo sub MΞ, NΞ simul & MΞ una cum quadrato ex NΞ: & utrinque sublato communi, duplo nempe rectangulo sub NΞ, MΞ simul & MΞ, erit excessus, quo rectangulum sub ψ & MΞ superat duplum rectangulum

erit quadratis laterum figuræ cujuſvis alterius ſectionis diametri ſimul ſumptis: ac proinde oportebit propoſitam ſummam majorem eſſe quadratis laterum figuræ Axis; ac quo major fuerit ſumma illa, tanto longius aberit ab Axe diameter quam quærimus.

Si vero quadratum Axis minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum, demonſtratur, in 46ta VII^mi, quod ab utraque Axis parte reperiatur diameter, cujus quadratum, una cum quadrato lateris ejus recti ſimul, minus erit ſummâ quadratorum laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri, ab eadem Axis parte ſumendæ; quodque huic utrinque propiores diametri minorem habent ſummam quadratorum laterum figuræ quam ab eadem remotiores: hoc enim in caſu punctum E cadet in Axe Hyperbolæ ultra verticem producto; ac E X, ſive ea quæ poterit dimidium quadrati ex N Ξ, æqualis erit ipſi Ξ E, ac circulus centro X deſcriptus continget Axem in puncto E, hoc in caſu cum puncto M coincidente: adeoque quartâ pars ipſius ψ, ſive Θ E, æqualis erit ei quæ poterit duplum quadrati ex Ξ Θ una cum ipſâ Ξ Θ; ac proinde Θ E erit ad Ξ Θ ſicut diagonium quadrati & latus ejus ſimul ad latus quadrati, ſive ut $\sqrt{2} + 1$ ad 1. Rectangulum autem ſub Θ E, hoc eſt $\frac{1}{4}\psi$, & ſummâ Axis & lateris ejus recti, æquale eſt (per conſtruct.) quartæ parti minimæ quadratorum ſummæ; ac proinde rectangulum ſub ſub $\sqrt{2}+1 \times N\Xi$ & ſummâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio minimæ illius ſummæ. Cum autem ſumma Axis & lateris ejus recti ſit ad differentiam earundem ſicut Axis ad N Ξ; erit rectangulum ſub N Ξ & ſummâ Axis & lateris ejus recti æquale exceſſui quo figura Axis ſuperat Axis quadratum; adeoque *Minima* ſumma quadratorum è lateribus figuræ erit ad exceſſum quo figura Axis ſuperat Axis quadratum ſicut $\sqrt{8} + 2$ ad unitatem, ſive ut dupla ſumma diagonii quadrati & lateris ejus ad ipſum latus.

Hac igitur *Minimâ* ſummâ ſi minor fuerit propoſita, impoſſibile erit problema; circulo, cujus radius eſt Ξ E, Axem non attingente. Si vero major fuerit eâ, minor vero ſummâ quadratorum è lateribus figuræ Axis; occurret circulus Axi in duobus punctis ultra verticem, ut ad M & μ; quorum ope, modo toties dicto, invenientur duæ diametri ab utroque Axis latere, hoc eſt omnino quatuor, quæ habeant eandem propoſitam quadratorum laterum figuræ ſummam. Quod ſi data ſumma æqualis fuerit ſummæ quadratorum è lateribus figuræ Axis, coincidet punctum μ cum

... simul sumpto, propositam conficiat summam.

Manentibus iis quæ in præcedentibus Ellipseos Schematis descripta sunt, puta factum; sitque ΒΚ diameter illa quam quærimus. Erit igitur (per 19^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex ΑΓ, sive rectangulum sub ΝΓ & differentia Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum sub ΝΓ & ΜΞ, hoc est ut Γδ differentia Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ, ita summa illa proposita ad summam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ; adeoque applicato rectangulo summæ propositæ æquali ad differentiam Axis & lateris recti, dicatur latitudo inde orta ψ, quæ proinde data est. Ac manifestum est rectangulum sub ΜΞ & ψ æquale esse quadratis ex ΜΝ, ΜΞ simul. Verum (per 4^{tam} 11^{di} *Elem.*) quadratum ex ΝΞ æquale est quadratis ex ΜΝ, ΜΞ simul una cum duplo rectangulo sub ΝΜΞ, hoc est quadratum ex ΝΞ æquale est rectangulo sub ΜΞ & ψ una cum duplo rectangulo sub ΝΜΞ; rectangulum autem sub ΝΜΞ æquale est rectangulo sub ΝΞΜ dempto quadrato ex ΜΞ: quapropter rectangulum sub ΜΞ & utraque ΝΞ & ½ψ simul, dempto quadrato ex ΜΞ, æquale est dimidio quadrati ex ΝΞ. Sed datur quadratum ex ΝΞ: datum est igitur rectangulum sub ΜΞ & utrâque ΝΞ & ½ψ simul, dempto quadrato ex ΜΞ. Adjacet autem rectæ datæ, ipsis nempe ½ψ & ΝΞ simul sumptis æquali, deficiens quadrato: data est igitur recta ΜΞ, datumque punctum Μ.

Componetur itaque problema ad hunc modum. Applicetur quarta pars datæ

itratur. Quænam autem fuerit minima illa summa, eodem argumento quo in Hyperbola usi sumus, statim patebit. Quoniam enim punctum M, in hoc *summæ minimæ* casu, coincidit cum puncto E; erit XE, quæ semper æqualis est ei quæ poterit duplum quadrati ex NΘ, rectæ ΞE æqualis; adeoque ΘE æqualis erit excessui quo potens duplum quadrati ex NΘ superat NΘ: quare ΘE erit ad NΘ sicut excessus quo diagonium quadrati superat latus ejus ad ipsum latus, sive ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1.

Per constructionem autem, rectangulum sub ΘE & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale est quartæ parti summæ quadratorum laterum figuræ; adeoque rectangulum sub $\sqrt{2} - 1 \times N\Xi$ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio summæ minimæ quadratorum laterum figuræ, quam quærimus. Cum autem differentia Axis & lateris ejus recti sit ad earundem summam sicut ipse Axis ad NΞ; erit rectangulum sub NΞ & differentia Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo sub Axe & summâ Axis & lateris ejus recti; hoc est, quadrato Axis & figuræ ejusdem simul, sive summæ quadratorum ex utroque Axe: *Minima* igitur summa quadratorum è lateribus figuræ erit ad summam quadratorum Axium Ellipseos sicut $\sqrt{8} - 2$ ad unitatem, sive ut duplus excessus quo diagonium quadrati superat latus ejusdem ad ipsum latus.

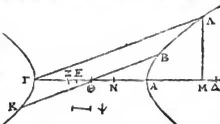
Quapropter, si in Ellipsi proponeretur inquirere diametrum, quæ habeat summam quadratorum laterum figuræ minorem jam ostensâ, impossibile erit problema, ac circulus juxta leges compositionis descriptus non attinget Axem. Si vero major fuerit dictâ *Minimâ*, minor vero quam summa quadratorum laterum figuræ Axis, conveniet circulus cum Axe in duobus punctis M, μ intra sectionem; ac proinde ab

Coroll. 6. Ac manifeſtum eſt, ex determinationibus jam dictis, quod, ſi Axis major majorem habeat rationem ad Axem conjugatam quam habet Unitas ad $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, ſive quam 1 ad 0, 6436; duci poſſunt quatuor diametri, quæ eandem habeant quadratorum ſui & lateris ſui recti ſummam: aliter vero non item.

PROPOSITIO XXXII. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametrum ejus, cujus quadratum à quadrato lateris recti ejus datâ differentiâ differat.

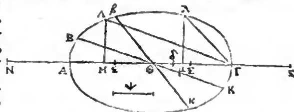
Manentibus Hyperbolæ figuris in præcedentibus deſcriptis, puta factum: ſitque BK diameter quæſita, cujus quadratum differat à quadrato lateris ſui recti datâ differentiâ. Per 20^mam^ VII^mi^ erit quadratum Axis ſectionis, ſive rectangulum ſub NΓ, ΓΔ, ad rectangulum ſub NΓ, MΞ, hoc eſt ΔΓ ad MΞ, ſicut differentia quadratorum propoſita ad differentiam quadratorum ex NM, MΞ. Eſt autem differentia quadratorum ex NM, MΞ (per 6^tam^ II^di^ *El.*) æqualis quadruplo rectanguli ſub ΘM, ΘΞ; adeoque ſi fiat rectangulum ſub ΓΔ & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti differentiæ quadratorum propoſitæ, data erit recta ψ: ac, argumento toties uſurpato, rectangulum ſub MΞ & ψ æquale erit rectangulo ſub ΘM, ΘΞ; erit igitur ἀνάλογον ut ΘΞ ad ψ ita MΞ ad ΘM, ac dividendo erit differentia ipſarum ΘΞ & ψ



Uu ad

Datis Ellipseos Axe & latere recto; invenire diametros ejus, quarum quadrata datâ differentiâ superent quadrata laterum suorum rectorum, ac ab iisdem deficiant.

Manentibus iis quæ in Ellipsi hactenus descripta sunt; erit quadratum ex ΑΓ sive rectangulum sub ΝΓ, Γδ ad rectangulum sub ΝΓ, ΜΞ (per 20^{mam} VII^{mi}) sicut differentia data quadratorum ex ΒΚ & lateris ejus recti ad differentiam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ: adeoque, per toties dicta, erit Γδ ad ΜΞ sicut differentia proposita ad differentiam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ; hoc est, (per 5^{tam} 11^{di} *Elem.*) ad quadruplum rectanguli sub ΘΞ, ΘΜ: proinde si applicetur quarta pars datæ quadratorum differentiæ ad rectam Γδ, & habeatur latitudo, quam dicamus ψ, hoc est, si fiat ut rectangulum sub Γδ & ψ æquale sit quartæ parti datæ quadratorum differentiæ; erit rectangulum sub ΜΞ & ψ æquale rectangulo sub ΘΞ & ΜΘ: ἀνάλογον itaque erit ut ψ ad ΘΞ ita ΘΜ ad ΜΞ: componendo autem ac dividendo, ΘΞ aucta & minuta rectâ ψ erit ad ΘΞ sicut ΘΞ ad ΞΜ. Verum dantur ΘΞ & ψ, adeoque & recta ΘΜ datur; unde, ob datum Θ, punctum Μ quoque datur.



Componetur itaque problema, si fiat rectangulum sub differentiâ Axis & lateris ejus recti & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti datæ differentiæ quadratorum; & ab utroque centri latere ponantur rectæ ΘΕ, Θε ipsi ψ æquales: deinde fiat ut ΕΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad ΞΜ, ut diameter major sit latere suo recto; ac ut εΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad Ξμ, ut latus rectum majus fuerit diametro: & inventis punctis Μ, μ, utramque diametrum obtinebimus ut prius. Nec opus est ut demonstratione regressivâ res, ex Analysi quantum fieri potest manifesta, stabiliatur.

Per

suasum habeo. Speramus autem, si ita contigerit ut ipsas Apollonii *Analyses & Compositiones minus assecuti simus, nos illud saltem præstitisse, ut quæcunque in earum locum substituimus æquo Lectori haud inconcinna videantur. Etiamsi vero innumera fere sint Problemata Conica determinata, quorum Analyses ex his Elementis non multo studio peti possunt; in præsentia tamen, id solum nobis propositum fuit, ut* Apollonii *vestigia, quoad ejus fieri posset, premeremus. Quod si forte fortuna integrum Auctoris opus posthac lucem conspexerit, nobis leve damnum erit, ea conditione oleum & operam perdidisse.*

F I N I S.

DE SECTIONE
CYLINDRI ET CONI
LIBRI DUO.

Ex Codd. MSS. *Græcis* edidit EDMUNDUS HALLEIUS apud *Oxonienses* Geometriæ Professor *Savilianus*.

[ ] a

LIBELLUS,

Nunc primum GRÆCE & LATINE

EX SUO EXEMPLARI MS^to EDITOS,

JURE MERITOQUE

D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

LIBER.

ΠΟΛΛΟΥΣ ὁρῶν, ὦ φίλε Κῦρε, τῶν περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων, οἰομένους τὴν τοῦ κυλίνδρου πλαγίαν τομὴν ἑτέραν εἶναι τῆς τοῦ κώνου τομῆς τῆς καλουμένης ἐλλείψεως· ἐδικαίωσα μὴ χρῆναι περιορᾷν ἀγνοοῦντας αὐτούς τε καὶ τοὺς ὑπ' αὐτῶν οὕτω φρονεῖν ἀναπεπεισμένους· καί τοι δόξειεν ἂν παντὶ ἄλογον εἶναι, γεωμέτρας γε ὄντας περὶ γεωμετρικοῦ προβλήματος ἄνευ ἀποδείξεως ἀποφαίνεσθαί τι καὶ πιθανολογεῖν ἀτεχνῶς, ἀλλότριον γεωμετρίας πρᾶγμα ποιοῦντας. ὁμοίως δ' οὖν ἐπείπερ οὗτοι ὑπειλήφασιν, ἡμεῖς δὲ οὐ συμφερόμεθα, φέρε γεωμετρικῶς ἀποδείξωμεν, ὅτι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κατ' εἶδος ἀνάγκη γίνεσθαι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς σχήμασι τομήν, τῷ κώνῳ λέγω καὶ τῷ κυλίνδρῳ, ποιῶς δὲ μέντοι, ἀλλ' οὐχ ἁπλῶς τεμνομένοις. ὥσπερ δὲ οἱ τὰ κωνικὰ πραγματευσάμενοι τῶν παλαιῶν οὐκ ἠρκέσθησαν τῇ κοινῇ ἐννοίᾳ τοῦ κώνου, ὅτι τριγώνου περιενεχθέντος ὀρθογωνίου συνίσταιτο, περιεργότερον δὲ καὶ

CUM viderem, Amice *Cyre*, plurimos eorum qui in Geometria versantur, in ea esse opinione, transversam Cylindri sectionem plane diversam esse ab ista Coni sectione quæ Ellipsis vocatur; non committendum putavi, ut ab errore non liberarem tum eos ipsos, tum & illos quibus persuaserunt ita se rem habere: quòd absurdum omnino videatur, Geometras de problemate Geometrico absque demonstratione quicquam affirmare, argumentis à probabili inscite adhibitis; quod à Geometria quam maxime alienum est. Itaque quoniam hi ita sentiunt, nos vero illis non assentimur, libeat Geometrice demonstrare unam eandemque specie sectionem necessario fieri in utraque figura, in Cono inquam & Cylindro; si modo ratione quadam & non simpliciter secentur. Quemadmodum autem Veteres qui Conica tractarunt, non contenti communi notitiâ Coni, nempe quod circumductu trianguli rectanguli describatur; uberius &

* Pro ἀγνοοῦντας juxta scribendi modum sequioris ævi *Græcis* familiarem.

[] A universalius

Præmittendæ autem nobis sunt istæ ad rem propositam spectantes definitiones.

τάδε.

DEFINITIONES.

1. SI igitur duorum circulorum æqualium & æquidistantium diametri semper inter sese parallelæ, & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur; & unà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte conjungens, quousque rursus in eum locum restituatur à quo moveri cœpit: superficies, quæ à circumlata recta describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, rectâ ipsam describente in infinitum productâ.

2. Cylindrus autem figura, quæ circulis æquidistantibus & cylindrica superficie inter ipsos interjectâ continetur.

3. Cylindri vero bases, circuli ipsi.

4. Axis autem, recta linea quæ per circulorum centra ducitur.

5. Latus vero cylindri, linea quæ, cum recta sit & in superficie ipsius cylindri bases utrasque contingit; quamque circumlatam cylindri superficiem describere antea diximus.

6. E Cylindris autem recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

7. Scaleni vero, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

ΟΡΟΙ.

α'. ΕΑΝ μὲν δὴ τῶν δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων αἱ διάμετροι παράλληλοι ὦσι διαπαντός, αὗταί τε περιενεχθῶσιν ἐν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις περὶ μένον τὸ κέντρον, καὶ συμπεριενεχθῇ ἡ τὰ πέρατα αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἕως εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῶσιν· ἡ γραφεῖσα ὑπὸ τῆς περιενεχθείσης εὐθείας ἐπιφάνεια, κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλείσθω· ἥτις καὶ ἐπ' ἄπειρον αὐξάνεσθαι δύναται, τῆς γραφούσης αὐτὴν εὐθείας ἐκβαλλομένης.

β'. Κύλινδρος δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπειλημμένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

γ'. Βάσεις δὲ τοῦ κυλίνδρου οἱ κύκλοι.

δ'. Ἄξων δὲ ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα.

ε'. Πλευρὰ δὲ τοῦ κυλίνδρου γραμμή τις, ἥτις εὐθεῖα οὖσα καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου τῶν βάσεων ἀμφοτέρων ἅπτεται· ἣν καί φαμεν περιενεχθεῖσαν γράφειν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

ς'. Τῶν δὲ κυλίνδρων, ὀρθοὶ μὲν οἱ τὸν ἄξονα πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι.

ζ'. Σκαληνοὶ δὲ οἱ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὸν ἄξονα.

Θεώρημ

ταγμένως κατηγμένη ἀχθεῖσα καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς γραμμῆς, δευτέρα διάμετρος καλείσθω· δειχθήσεται γὰρ πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν διάμετρον δίχα τέμνουσα.

ιε΄. Ἔτι κἀκεῖνο προσδιορίσθω ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἰσίν, ὧν ἑκατέρας αἱ συζυγεῖς διάμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἀλλήλας.

transit, parallela ei quæ ordinatim applicata est, & terminatur ab ipsa linea curva, secunda diameter dicatur: demonstrabitur enim rectas omnes in sectione ductas, quæ priori diametro parallelæ sunt, bifariam secare.

15. Illud etiam definiendum est: similes ellipses esse, quarum conjugatæ diametri, sese ad angulos æquales secantes, eandem habent rationem inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, καὶ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν.

Prop. I. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ conveniant, ac duabus rectis lineis etiam convenientibus parallelæ sint, & sint utræque utrisque æquales: rectæ quæ terminos earum conjungunt & ipsæ æquales & parallelæ erunt.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἴση ἔστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· λέγω ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

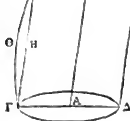


Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΑΔ ἴση τε καὶ παράλληλος

Sint duæ rectæ lineæ concurrentes ΑΒ, ΒΓ; quæ duabus rectis lineis etiam concurrentibus, ut ΔΕ, ΕΖ, parallelæ sint; sitque ΑΒ æqualis ΔΕ, & ΒΓ ipsi ΕΖ; & jungantur ΑΓ, ΔΖ: dico rectas ΑΓ, ΔΖ & æquales esse & parallelas.

Junctis enim ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ; quoniam ΑΒ ipsi ΔΕ est æqualis & parallela; erit [per 33. 1.] ΒΕ & æqualis & parallela

Ε Δ conveniunt ad puncta Ε, Γ; atque est Ε Η Γ in superficie cylindri: ipsa Ε Θ Γ in cylindri superficie non erit. & quoniam circuli Α, Β æquales sunt & æquidistantes, secanturque à plano Ε Δ; communes ipsorum sectiones [per 16.11.] parallelæ erunt, atque etiam æquales, cum diametri sint æqualium circulorum. itaque si, manentibus Α, Β punctis, diametros Α Γ, Β Ε intelligamus circumferri, & una cum ipsis rectam lineam Ε Θ Γ circa circulos Α, Β, quousque rursus in eundem locum restituantur, à quo moveri cœperunt: recta Ε Θ Γ cylindri superficiem describet, & erit Θ punctum in superficie ipsa. atqui erat extra superficiem, quod fieri non potest: recta igitur linea est Ε Η Γ; similiter & recta est ipsa Ζ Δ. & conjungunt æquales & parallelas rectas Ε Ζ, Γ Δ: parallelogrammum igitur [per 33. 1.] erit planum Ε Δ. quod erat demonstrandum.



ἐπιπέδῳ εἰσί, συνάπτουσι κατὰ τὰ Ε, Γ σημεῖα, καὶ ἔστιν ἡ Ε Η Γ γραμμὴ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα οὐκ ἔσται ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ Ε Δ ἐπιπέδου· αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι γάρ εἰσι ἴσων κύκλων· ἐὰν ἄρα, μενόντων τῶν Α, Β σημείων, τὰς Α Γ, Β Ε διαμέτρους νοήσωμεν περιενεγκούσας τὴν Ε Θ Γ εὐθεῖαν περὶ τοὺς Α, Β κύκλους, καὶ εἰς ταυτὸ πάλιν ἀποκαθισταμένας, ἡ Ε Θ Γ εὐθεῖα γράψει τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἔσται τὸ Θ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. ἦν δὲ ἐκτός, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Η Γ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ Ζ Δ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς Ε Ζ, Γ Δ· τὸ Ε Δ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. *Theor.*

Si cylindrus plano secetur æquidistante parallelogrammo quod fit per axem: sectio parallelogrammum erit, angulos habens æquales angulis parallelogrammi per axem.

SIT cylindrus, cujus bases circuli circa centra Α, Β; & axis recta linea Α Β, parallelogrammum autem per axem Γ Δ; & secetur cylindrus alio plano Ε Ζ Η Θ parallelo ipsi Γ Δ parallelogrammo, quod faciat sectiones, in basibus quidem rectas lineas Ε Ζ, Η Θ, in superficie autem cylindri ipsas Ε Η, Ζ Θ: dico figuram Ε Η Ζ Θ parallelogrammum esse æquiangulum ipsi Γ Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ· ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται ἴσας γωνίας ἔχον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ Γ Δ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, παραλλήλῳ ὄντι τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ, καὶ ποιοῦντι τομὰς ἐν μὲν ταῖς βάσεσι τὰς Ε Ζ, Η Θ εὐθείας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς Ε Η, Ζ Θ γραμμάς· λέγω ὅτι τὸ Ε Η Ζ Θ σχῆμα παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἰσογώνιον τῷ Γ Δ.

Ἤχθω

τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· κοινὴ ἄρα πλευρά ἐστι τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΕΗΖΘ σχήματος. εὐθεῖα δὲ ἐδείχθη ἡ πλευρὰ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἡ ΖΘ ἄρα ἐστὶν εὐθεῖα, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΗΘ· τὸ ΕΘ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον τῷ ΓΔ. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΜΑ, ΛΘ παράλληλοί εἰσι, καί εἰσιν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἴσαι· καὶ αἱ ΖΔ, ΜΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα· καὶ αἱ ΖΘ, ΔΜ ἄρα καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΑΜ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΘΖ γωνία τοῦ ΕΘ παραλληλογράμμου τῇ ὑπὸ ΑΜΔ γωνίᾳ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΘ τῷ ΓΔ.

… latus est & parallelogrammi per axem & figuræ EHZΘ. sed [per 2. huj.] demonstratum est latus parallelogrammi per axem esse rectam lineam: quare recta linea est ZΘ, similiter & recta erit ipsa EH. conjungunt autem æquales & parallelas rectas EZ, HΘ: ergo [per 33. 1.] planum EΘ parallelogrammum erit.

Dico insuper & æquiangulum esse parallelogrammo ΓΔ. quoniam enim duæ rectæ ΔB, BZ duabus rectis MA, AΘ parallelæ sunt, suntque quatuor rectæ æquales; & ipsæ ZΔ, MΘ inter se æquales erunt & parallelæ, per primum theorema: ergo & æquales & parallelæ sunt ipsæ ZΘ, ΔM. est autem & AΘ ipsi AM parallela: angulus igitur AΘZ parallelogrammi EΘ æqualis est angulo AMΔ parallelogrammi ΓΔ: quare parallelogrammum EΘ parallelogrammo ΓΔ æquiangulum erit.

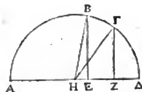
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν καμπύλῃ γραμμῇ ὑποτείνῃ εὐθεῖα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης· ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται.

Prop. IV. *Theor.*

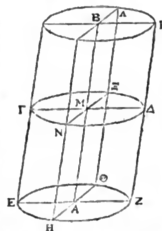
Si curvæ lineæ recta subtendatur; & quæ à linea ad subtensam perpendiculares ducuntur, possint spatium æquale ei, quod ipsius subtensæ partibus continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

ΕΣΤΩ καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔ, ὑποτείνουσα δὲ αὐτὴν ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΔ αἱ ΒΕ, ΓΖ, καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειά ἐστι.



SIT curva linea ABΓΔ, & quæ ei subtenditur recta AΔ; ducantur autem BE, ΓZ perpendiculares ad ipsam AΔ, ponaturque quadratum ex BE æquale rectangulo AE, EΔ, & quadratum ex ΓZ æquale ipsi AZΔ: dico lineam ABΓΔ circuli circumferentiam esse.

Describantur in circulo Α diametri ΕΖ, ΗΘ; & per utramque ipsarum & axem ducantur plana cylindrum secantia, quæ quidem facient sectiones parallelogramma; & sit parallelogrammi ΕΚ & plani ΓΞΔΝ communis sectio ΓΔ, parallelogrammi autem ΗΛ & ejusdem plani communis sectio ΝΞ. quoniam igitur planum ΓΞΔΝ æquidistat circulo Α, & secatur à plano ΕΚ, recta ΓΔ ipsi ΕΖ est parallela; & eadem ratione recta ΝΞ parallela est ipsi ΗΘ. itaque quoniam ΒΑ utrique ΓΕ, ΔΖ parallela est, & est ΕΑ æqualis ipsi ΑΖ: erit ΓΜ ipsi ΜΔ æqualis. similiter quoque cum sit ΗΑ æqualis ipsi ΑΘ, ΜΝ æqualis erit ipsi ΜΞ. sunt autem ΑΕ, ΑΗ æquales; ergo & ΜΓ, ΜΝ æquales erunt: quare omnes ΜΓ, ΜΔ, ΜΝ, ΜΞ inter se æquales. & simili ratione aliæ æquales ostendentur, quæcunque à puncto Μ ad lineam ΓΞΔΝ pertingunt: circulus igitur est sectio ΓΞΔΝ. quod autem centrum habeat in recta ΑΒ manifesto patet: nam cum punctum Μ sit in tribus planis; & in ipsa ΑΒ communi planorum sectione necessario erit, hoc est in ipso axe.



γω ὅτι ἡ ΓΞΔΝ γραμμὴ κύκλου ἐστὶ περιφέρεια.

Ἤχθωσαν ἐν τῷ Α κύκλῳ διάμετροι αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν ΕΖ, ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμα τὰς τομάς. ἔστω τοῦ μὲν ΕΚ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔΝ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, τοῦ δὲ ΗΛ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔΝ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΞΔΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ Α κύκλῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΕΚ ἐπιπέδου· ἡ ΓΔ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΝΞ τῇ ΗΘ παράλληλός ἐστι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλός ἐστι, καὶ ἴση ἡ ΕΑ τῇ ΑΖ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΜΔ. ὁμοίως ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΑΘ, ἴση ἄρα ἐστὶ ἡ ΜΝ τῇ ΜΞ. ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΕ, ΑΗ ἴσαι εἰσί· ἐστὶ αἱ ΜΓ, ΜΝ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πᾶσαι ἄρα αἱ ΜΓ, ΜΔ, ΜΝ, ΜΞ ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΞΔΝ γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι εὑρεθήσονται· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΞΔΝ τομή. ὅτι δὲ καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἔχει, δῆλον· τὸ γὰρ Μ, ἐν τοῖς τρισὶν ἐπιπέδοις ὄν, ἐπὶ τῆς ΑΒ κοινῆς τομῆς τῶν παραλληλογράμμων ἐστὶ, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Prop. VI. *Theor.*

Si cylindrus scalenus per axem secetur plano ad rectos angulos ipsi basi; secetur autem & alio plano recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem sectionem in pa-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν κύλινδρος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τε πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον, καὶ ποιῇ τὴν κοινὴν

τομὴν

πρὸς ὀρθὰς ἡ Μ Ν, καὶ διὰ τῶν Ζ Θ, Κ Λ ἤχθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὴν Κ Ζ Λ τομήν. ἐπεὶ οὖν ἡ Μ Ν κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Α Β κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ Μ Ν ἐπὶ τὸ Α Δ ἐπίπεδον· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ Ζ Θ, Μ Ν. παράλληλοι δὲ καὶ αἱ Κ Λ, Α Β· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα· ἡ Κ Ζ Λ ἄρα τομὴ παράλληλός ἐστι τῇ βάσει· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Ζ Λ τομή. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἡ Κ Λ, καὶ τῇ Κ Λ πρὸς ὀρθὰς ἡ Ζ Θ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Κ Θ, Θ Λ τῷ ἀπὸ τῆς Θ Ζ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Κ Θ, Θ Λ τῷ ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η ἴσον ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ μὲν Ε Θ τῇ Θ Κ, ἡ δὲ Η Θ τῇ Θ Λ, διὰ τὸ τὰς πρὸς ταῖς Ε Κ, Λ Η βάσεσι γωνίας ἴσας εἶναι· καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ ἴσον ἐστὶν, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ Ζ Θ ἐπὶ τὴν Ε Η. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλην ἀγάγῃς παράλληλον τῇ Ζ Θ ἐπὶ τὴν Ε Η, ἴσον δυνήσεται τῷ ὑπὸ τῶν γενομένων τμημάτων τῆς Ε Η· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Ζ Η τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ Ε Θ Η εὐθεῖα.

que ipsi A B ad rectos angulos M N, & per Z Θ, K Λ ducatur planum faciens sectionem K Z Λ. quoniam igitur M N, in basis plano existens, perpendicularis est ad A B communem planorum sectionem; erit ipsa M N perpendicularis ad planum A Δ: quare [per 6. 11.] Z Θ, M N parallelæ sunt. sed & parallelæ ipsæ K Λ, A B: ergo [per 15. 11.] parallela quoque quæ per illas transeunt plana: sectio igitur K Z Λ parallela est basi; ideoque [per præc.] circulus est, & ejus diameter K Λ, cui ipsa Z Θ ad rectos angulos insistit: quare [per cor. 13. 6.] rectangulum K Θ, Θ Λ est æquale quadrato ex Θ Z. at rectangulum K Θ, Θ Λ æquale est ipsi E Θ, Θ H rectangulo, cum sit [per 6. 1.] E Θ æqualis ipsi Θ K, & H Θ ipsi Θ Λ, propterea quod ad bases E K, Λ H anguli æquales sunt: ergo quadratum ex Z Θ æquale est rectangulo E Θ, Θ H; atque est Z Θ ad E H perpendicularis. similiter autem, si ad E H alia ducatur parallela ipsi Z Θ, poterit spatium æquale ei, quod sub partibus ipsius E H continetur: igitur [per 4. huj.] sectio E Z H circulus est, cujus diameter est recta E Θ H.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Δοθέντος κυλίνδρου καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀγαγεῖν διὰ τοῦ σημείου πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ

Prop. VII. *Probl.*

Cylindro dato & puncto in superficie ejus; per dictum punctum latus cylindri ducere.

SIT cylindrus, cujus bases circuli A, B, axis vero recta linea A B; datum autem punctum in ejus superficie

SIT cylindrus, cujus bases circuli A, B; sumanturque in superficie ejus duo puncta Γ, Δ, quæ non sint in uno latere parallelogrammi per axem; & jungatur ΓΔ: dico ipsam ΓΔ intra cylindri superficiem cadere.

Si enim fieri potest, vel in superficie ejus, vel extra superficiem cadat; & quoniam puncta Γ, Δ non sunt in latere cylindri, ducatur per Γ quidem latus ΕΓΖ, per Δ vero ipsum ΗΔΘ; & jungantur ΕΗ, ΖΘ: ergo [per 2. 3.] ΕΗ, ΖΘ intra circulos cadent. sumatur aliquod punctum in recta ΓΔ, quod sit K: igitur K vel erit in superficie cylindri, vel extra. sit primum in superficie; & per K ducatur latus cylindri recta linea ΛΚΜ, quæ quidem cadens in circumferentias ΕΗ, ΖΘ, si producatur, neutram rectarum ΕΗ, ΖΘ secabit: quare ΛΜ non erit in plano ΖΕΗΘ. sed punctum K est in recta ΛΜ; igitur K non erit in plano ΖΕΗΘ. quoniam autem ΓΔ est in ipso ΖΕΗΘ plano, & in ΓΔ est punctum K; erit K in eodem ΖΕΗΘ plano: quare K in dicto plano erit & non erit; quod fieri non potest. igitur ΓΔ non est in superficie cylindri.

Sed sit extra; sumaturque in circumferentia ΕΗ aliquod punctum Λ, & jungatur ΚΛ: ergo ΚΛ ex utraque parte producta neutram rectarum ΕΗ, ΖΘ secabit: quare ΚΛ non erit in plano ΖΕΗΘ. cætera manifesta sunt.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις εἰσὶν οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, μὴ ὄντα ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ εὐθεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐντὸς πίπτει τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς· καὶ ἐπεὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Γ ἡ ΕΓΖ πλευρὰ, διὰ δὲ τοῦ Δ ἡ ΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΘ εὐθεῖαι· ἐντὸς ἄρα πίπτουσι τῶν κύκλων αἱ ΕΗ, ΖΘ. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Κ· τὸ δὴ Κ ἤτοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα, πίπτουσα ἐπὶ τὰς ΕΗ, ΖΘ περιφερείας· ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· οὐδὲ τὸ Κ ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΔ ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΖΕΗΘ· ἔστιν ἄρα καὶ οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐκτὸς, καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ περιφερείας τοῦ Λ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· ἐκβληθεῖσα δὴ ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΚΛ οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· ὥστε οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

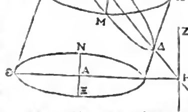
PROP. IX. *Theor.*

Si cylindrus plano secetur, neque basibus æquidistante, neque subcontrarie posito, neque per axem, neque æ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μήτε παρὰ τὰς βάσεις, μήτε ὑπεναντίως, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε

σῳ τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ οὐκ ἔστι παράλληλον, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τεμεῖ ἄλληλα. τεμνέτω, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α κέντρου ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΑΗ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, ἐν δὲ τῇ ΓΕΔ τομῇ τὴν ΓΔ εὐθεῖαν· καὶ, τῆς ΓΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Λ, ἤχθωσαν τῇ ΖΗ παράλληλοι, διὰ μὲν τοῦ Λ ἡ ΕΛΜ, διὰ δὲ τοῦ Α ἡ ΝΑΞ· αἱ ἄρα ΜΕ, ΝΞ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. ἤχθω τοίνυν διὰ τῆς ΕΜ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὴν ΟΕΠΜ· ἡ ΟΕΠΜ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΟΠ, δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ γὰρ τῶν ΛΟΓ, ΛΠΔ τριγώνων, ὁμοίων ὄντων, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΟΛ τῇ ΛΠ· διάμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΛΜ τοῦ ΟΕΠ κύκλου. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΟΛ τῇ ΘΑ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΑΞ· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΑΞ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΑΞ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ· ἡ ΕΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΟΠ διάμετρον τοῦ κύκλου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΟΛ, ΛΠ. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστιν ἡ τομὴ ὑπεναντία, ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΟΓ γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΟΓΛ· οὐδὲ ἡ ΟΛ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΛ ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ, τῷ ἀπὸ τῆς ΓΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ οὐκ ἔστι τῷ ὑπὸ



planum plano circuli Α non est æquidistans: si plana producantur, ipsa se invicem secabunt. secent ergo sese, & sit ipsorum communis sectio ΖΗ; perque Α centrum ducatur ΘΑΗ ad ΖΗ perpendicularis; & per ΘΑ perque axem ducatur planum, faciens in cylindro sectionem parallelogrammum ΘΚ, in sectione autem ΓΕΔ rectam lineam ΓΔ; &, secta ΓΔ bifariam in puncto Λ, ducantur ipsi ΖΗ parallelæ, per Λ quidem recta ΕΛΜ, per Α vero ipsa ΝΑΞ: quare [per 9.11.] ΜΕ, ΝΞ inter sese parallelæ erunt. ducatur deinde planum per ΕΜ basi cylindri æquidistans, quod faciat in cylindro sectionem ΟΕΠΜ; & erit [per 5. huj.] sectio ΟΕΠΜ circulus, cujus diameter ΟΠ bifariam secatur in Λ. nam, cum triangula ΛΟΓ, ΛΠΔ similia sint, & sit ΓΛ æqualis ipsi ΛΔ; erit & ΟΛ ipsi ΛΠ æqualis: quare ΕΛΜ circuli ΟΒΠ diameter erit. & quoniam recta ΟΛ ipsi ΘΑ parallela est, ut & ΛΜ ipsi ΑΞ; angulus ΟΛΜ [per 10.11.] angulo ΘΑΞ est æqualis: rectus autem est angulus ΘΑΞ; rectus igitur est ΟΛΜ, & ΕΛ perpendicularis est ad ΟΠ circuli diametrum: unde sequitur quadratum ex ΕΛ æquale esse rectangulo ΟΛΠ. quoniam autem sectio non est subcontraria, angulus ΛΟΓ angulo ΟΓΛ æqualis non erit: & idcirco latera ΟΛ, ΓΛ inæqualia: igitur quadratum ex ΟΛ, hoc est rectangulum ΟΛΠ, non est æquale quadrato ex ΓΛ, hoc est rectangulo ΓΛΔ. sed rectangulo ΟΛΠ æquale est quadratum ex ΕΛ: quare quadratum ex ΕΛ non est æquale rectangulo

[ ] C ΓΛΔ.

partem. itaque si, axe & circulis manentibus, ipsa ΘΝ circumferatur unà cum diametris, quousque redeat in eum locum à quo moveri cœpit; cylindri superficies secundum altitudinem augebitur: &, producto plano ΖΕ, augebitur etiam sectio usque in punctum Ν. illud idem continget & ex parte ΓΛ: erit itaque ΝΗΕΡ cylindri sectio, qualis in præcedenti theoremate: unde constat ΝΗΕΡ neque circulum esse, neque rectilineum: quare sectio ΓΕΗΖ neque rectilineum est, neque circulus, neque portio circuli; sed erit ejusmodi sectio portio sectionis cylindri.

βλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΘΝ. ἐὰν ἄρα μένοντος τοῦ ἄξονος καὶ τῶν κύκλων, ἡ ΘΝ περιενεχθεῖσα σὺν ταῖς διαμέτροις ἀποκατασταθῇ, αὐξήσει τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ ὕψος, καὶ προσεκβληθέντος τοῦ ΖΕ ἐπιπέδου, αὐξηθήσεται καὶ τομὴ μέχρι τοῦ Ν. τὸ δ' αὐτὸ ἔσται καὶ ἐπὶ τὰ ΓΛ μέρη· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομή ἐστι κυλίνδρου, οἵα καὶ ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ οὔτε κύκλος, οὔτε εὐθύγραμμόν ἐστι· καὶ ἡ ΓΕΗΖ ἄρα τομὴ οὔτε εὐθύγραμμον, οὔτε κύκλος, οὔτε τμῆμα κύκλου, ἀλλ' ἔστιν ἡ τοιαύτη τομὴ κυλίνδρου τομῆς τμῆμα.

Prop. X. *Theor.*

Si cylindrus plano per axem secetur; sumatur autem aliquod punctum in ejus superficie, quod non sit in latere parallelogrammi per axem; & ab ipso ducatur recta linea parallela rectæ cuipiam in eodem plano existenti in quo cylindri basis, quæque ad rectos angulos incidit basi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum, & producta usque ad alteram partem superficiei ab ipso parallelogrammo bifariam secabitur.

SIT cylindrus, cujus bases Α, Β circuli, & parallelogrammum per axem ΓΔ; sumatur autem aliquod punctum Ε in superficie cylindri, & ab ipso ducatur recta linea ΕΖ parallela rectæ cuipiam, quæ perpendicularis sit ad ΓΑ basim parallelogrammi per axem: dico rectam ΕΖ intra ΓΔ parallelogrammum cadere; &, si ulterius producatur usque ad alteram partem superficiei, ab ipso parallelogrammo bifariam secari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ, ἥτις, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσα τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἐστι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἐντὸς πεσεῖται τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος ἤχθω εὐθεῖα τινὶ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΓΑ βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

*

Ἤχθω

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι μετὰ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου γινομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσοῦνται, καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων· καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τούτου διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Σκαληνοῦ δὲ ὄντος, οὐκέτι· πλὴν ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου.

Si cylindrus secetur plano per axem, secetur etiam alio plano basis planum extra circulum secante; communis autem planorum sectio perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: rectæ lineæ quæ à sectione in superficie cylindri à secante plano factâ ducuntur, parallelæ ei quæ perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur, communi planorum sectioni occurrent, & productæ usque ad alteram sectionis partem, à communi planorum sectione bifariam dividentur; quæ vero perpendicularis est ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur, cylindro recto existente, etiam ad communem planorum sectionem, parallelogrammi scilicet per axem & secantis plani, perpendicularis erit. Scaleno autem existente cylindro, non item; præterquam cum parallelogrammum per axem ad ipsam basim cylindri rectum fuerit.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος, ὡς εἴρηται, ἐπιπέδῳ

SIT cylindrus, cujus bases quidem circuli A, B, parallelogrammum autem per axem ΓΔ; & secetur plano, ut dictum est, quod faciat

est ut ostendamus, si cylindrus rectus sit, vel planum ΓΔ rectum super basim cylindri, rectam ΚΛ ad ipsam ΕΗΛ perpendicularem esse. quoniam enim planum ΓΔ ad planum basis rectum est, & ΚΛ in basis plano existens perpendicularis est ad ΓΑΛ communem planorum sectionem; & ad reliquum ipsius ΓΔ parallelogrammi planum [per 4. defin. 11.] perpendicularis erit.

Quod si planum ΓΔ non sit rectum ad basim, scaleno existente cylindro, ΚΛ ad ΛΕ perpendicularis non erit. si enim fieri potest, sit ΚΛ perpendicularis ad ΛΕ; est autem & ad ΛΓ perpendicularis: quare [per 4. 11.] & ad planum quod per ipsas transit, hoc est ad planum ΓΔ: planum igitur per ΚΛ, hoc est planum basis Α, ad planum ΓΔ [per 18. 11.] rectum erit, contra hypothesin: ergo ΚΛ ad ΛΕ non est perpendicularis.

Ex jam demonstratis itaque constat, rectam ΕΗ sectionis ΕΖΗΘ diametrum esse; omnes enim, quæ ad ipsam ducuntur parallelas ipsi ΚΛ, bifariam dividit, quemadmodum ΖΘ.

τὸ θεώρημα. Λοιπὸν δεῖ δεῖξαι, ὅτι ἡ ΚΛ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, ἢ τοῦ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΕΗΛ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, τῇ δὲ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΓΑΛ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· καὶ τῷ λοιπῷ ἄρα τῷ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

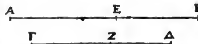
Εἰ δὲ τὸ ΓΔ οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, σκαληνοῦ δηλαδὴ ὄντος τοῦ κυλίνδρου, οὐκ ἔσται πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ· ἔστι δὴ καὶ τῇ ΛΓ πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ΓΔ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ ΚΛ· καὶ τὸ δι᾽ αὐτῆς ἄρα ἐπίπεδον, τουτέστι τὸ τῆς Α βάσεως, πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ΓΔ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΛΕ.

Ἐκ δὴ τῶν δεδειγμένων φανερὸν, ὅτι ἡ ΕΗ διάμετρός ἐστι τῆς ΕΖΗΘ τομῆς· πάσας γὰρ τὰς παρὰ τὴν ΚΛ καταγομένας ἐπ᾽ αὐτὴν δίχα τέμνει, ὥσπερ τὴν ΖΘ.

Prop. XII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ similiter secentur; erit ut quadratum primæ ad quadratum secundæ, ita quod fit sub primæ partibus rectangulum ad rectangulum sub partibus secundæ.

Rectæ namque lineæ ΑΒ, ΓΔ similiter secentur in punctis Ε, Ζ: dico ut quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΓΔ, ita esse rectangulum ΑΕΒ ad rectangulum ΓΖΔ.



Quoniam enim ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; erit componendo & permutando ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΒ ad ΖΔ. & rursus quoniam ut ΑΕ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὁμοίως τμηθῶσιν· ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας.

Εὐθεῖαι γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ ὁμοίως τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα· λέγω ὅτι ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως

[...] τοῦ κυλίνδρου ἐπίπεδον συμπιπτέτω τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κατ' εὐθεῖαν ὀρθὴν πρὸς τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ γινομένη τομὴ ἡ ΕΖΗ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ ΕΗ, διάμετρος οὖσα τῆς τομῆς, ὡς ἐδείχθη· ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Ζ, κατήχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΘ· πίπτει ἄρα ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὡς ἐδείχθη· λέγω δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Ηχθω διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΓΑ ἡ ΚΘΛ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ εὐθειῶν ἤχθω ἐπίπεδον, τομὴν ποιοῦν τὴν ΚΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, οὔσῃ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα παράλληλά ἐστιν· ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΚΛ. καὶ ἔστι κύκλος ὁ ΚΖΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΗ παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν

[...] autem cylindrus plano occurrenti plano basis secundum rectam lineam, quæ ad ipsam ΓΑ productam sit perpendicularis; sitque sectio facta ΕΖΗ; & communis sectio parallelogrammi ΓΔ & secantis plani sit recta ΕΗ, quæ diameter est sectionis, ut ostensum est; sumpto deinde in sectione quovis puncto Ζ, ab eo ad diametrum ducatur recta linea ΖΘ, parallela communi planorum sectioni: cadet igitur ΖΘ, ex iis quæ [per 11. huj.] demonstrata sunt, in ipsam ΕΗ: dico itaque rectangulum ΕΘΗ ad quadratum ex ΖΘ eam rationem habere quam diametri ΕΗ quadratum ad quadratum diametri basis.

Ducatur enim per Θ recta ΚΘΛ parallela ipsi ΓΑ; & per ΖΘ, ΚΛ rectas planum ducatur, quod faciat sectionem ΚΖΛ. itaque quoniam recta ΚΛ parallela est ipsi ΓΑ, & ΖΘ parallela communi planorum sectioni quæ in basis plano existit; igitur [per 15.11.] quæ per ipsas transeunt plana inter se æquidistantia erunt: quare [per 5. huj.] circulus est sectio ΚΖΛ. rursus quoniam ΚΛ ipsi ΓΑ est parallela; & ΖΘ parallela communi sectioni planorum, quæ perpendicularis est ad ΓΑ: erit & ΖΘ ad ΚΛ perpendicularis. est autem circulus ΚΖΛ; ergo [per 4. huj.] quadratum ex ΖΘ rectangulo ΚΘΛ æquale erit. & cum parallela sit ΚΕ ipsi ΛΗ, erit ut ΚΘ ad ΘΛ ita ΕΘ ad ΘΗ: quare rectangu-

[ ] D lum

[per præced. 13. huj.] quadratum ex NΠ ad rectangulum EΠH eandem habet rationem, quam habet quadratum diametri basis cylindri ad quadratum diametri sectionis, & habet quadratum ex ΞP ad rectangulum EPH hanc eandem rationem; erit ut quadratum ex NΠ ad rectangulum EΠH ita quadratum ex ΞP ad rectangulum EPH, & permutando. est autem quadratum ex NΠ æquale quadrato ex ΞP; parallelogrammum enim est NΠPΞ: ergo & rectangulum EΠH æquale est rectangulo EPH. quibus sublatis ab æqualibus quadratis ex EΘ, & ΘH, erit [per 5. 2.] reliquum quadratum ex ΠΘ reliquo quadrato ex ΘP æquale: æqualis igitur est ΠΘ ipsi ΘP, hoc est NO ipsi OΞ. Eadem ratione & aliæ omnes ipsi EH parallelæ à ZM bifariam secabuntur: ergo [ex definit.] ZM secunda diameter est sectionis.

λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞP πρὸς τὸ ὑπὸ EPH τὸν αὐτὸν λόγον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς NΠ πρὸς τὸ ὑπὸ EΠH οὕτως τὸ ἀπὸ ΞP πρὸς τὸ ὑπὸ EPH, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ NΠ τῷ ἀπὸ ΞP, παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ NΠPΞ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ EΠH τῷ ὑπὸ EPH. καὶ ἀπ' ἴσων ἀφῄρηται τῶν ἀπὸ EΘ, ΘH· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΠΘ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΘP ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΠΘ τῇ ΘP, τουτέστιν ἡ NO τῇ OΞ. ὁμοίως δὲ πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν EH δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ZM· δευτέρα διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZM.

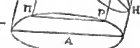
Prop. XV. *Theor.*

Si cylindrus plano secetur basis planum secante; communis autem sectio plani basis & secantis plani perpendicularis sit ad basim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipsi constituitur: quæ à sectione ad diametrum ducitur, parallela communi planorum sectioni jam dictæ, poterit spatium quoddam, ad quod rectangulum sub diametri partibus contentum eam rationem habet, quam habet diametri sectionis quadratum ad quadratum secundæ diametri; quæ vero à sectione ad secundam diametrum ducitur parallela diametro, poterit spatium, ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τούτου τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἡ μὲν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ

τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου τῆς τομῆς. ἤχθω διὰ τῆς Μ Ν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμον τὴν τομήν. ποιείτω τὸ Ρ Σ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ τομαὶ αὐτοῦ μὲν καὶ τῶν παραλλήλων κύκλων αἱ Σ Τ, Ξ Ο, Π Ρ, αὐτοῦ δὲ καὶ τῆς Ε Ζ Η τομῆς κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ Μ Ν. ἐπεὶ οὖν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ Γ Δ, Ρ Σ τέμνεται ὑπὸ τοῦ Κ Ζ Λ ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσί· παράλληλος ἄρα ἡ Θ Κ τῇ Ν Ξ. ἦν δὲ καὶ ἡ Θ Ε τῇ Μ Ν παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ Κ Θ Ε γωνία τῇ ὑπὸ Ξ Ν Μ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ Ρ Σ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ Γ Δ παραλληλογράμμῳ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ γʹ. θεωρήματι· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν Σ Π Ρ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν Ε Γ Α ἴση ἐστί, τουτέστιν ἡ ὑπὸ Σ Ξ Ν τῇ ὑπὸ Ε Κ Θ· ὅμοια ἄρα ἀλλήλοις τὰ Ε Κ Θ, Μ Ξ Ν τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ Κ Θ πρὸς Θ Ε οὕτως ἡ Ξ Ν πρὸς Ν Μ· καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Κ Θ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ Ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς Φ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ξ Ν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν Μ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Ν Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Φ Ν, Ν Ζ (κύκλος γάρ ἐστιν ὁ Κ Ζ Λ καὶ ὀρθὴ ἡ Θ Ζ ἐπὶ τὰς Κ Θ, Ξ Ν) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Φ Ζ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Η διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Φ Ν, Ν Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Μ Ν. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



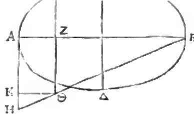
metri sectionis E H. ducatur per rectam M N planum æquidistans parallelogrammo Γ Δ, quod cylindrum secet: faciet igitur [per 3. huj.] sectionem parallelogrammum. faciat P Σ; & communes sectiones ipsius & æquidistantium circulorum sint Σ T, Ξ O, Π P; ipsius vero & plani sectionis E Z H communis sectio M N. itaque quoniam æquidistantia plana Γ Δ, P Σ secantur à plano K Z Λ, communes eorum sectiones parallelæ erunt: parallela est igitur Θ K ipsi N Ξ. erat autem & Θ E ipsi N M parallela: ergo [per 10.11.] angulus K Θ E æqualis est angulo Ξ N M. & cum parallelogrammum P Σ parallelogrammo Γ Δ æquiangulum sit, id quod demonstravimus in tertio theoremate, angulus Σ Π P angulo E Γ A æqualis erit, hoc est Σ Ξ N ipsi E K Θ: similia igitur triangula sunt E K Θ, M Ξ N: quare ut K Θ ad Θ E ita Ξ N ad N M, & [per 22. 6.] ut quadratum ex K Θ ad quadratum ex Θ E, hoc est ut quadratum ex Φ Z secundâ diametro ad quadratum diametri E H, ita quadratum ex Ξ N ad quadratum ex N M. sed quadratum ex N Ξ æquale est rectangulo Φ N Z, quia K Z Λ circulus est & Θ Z perpendicularis ad K Θ, Ξ N; ut igitur quadratum ex Φ Z secundâ diametro ad quadratum diametri E H ita rectangulum Φ N Z ad quadratum ex M N. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν κυλίνδρου τομῆς συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὴν δευ-

Prop. XVI. *Theor.*

Si in cylindri sectione conjugatæ diametri sint; & fiat ut diameter sectionis



A B ad ipsam A H, hoc est B Z ad Z Θ; ut autem quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ ita rectangulum B Z A ad quadratum ex E Z, & ut B Z ad Z Θ ita B Z A rectangulum ad rectangulum Θ Z A, hoc est ad A Θ parallelogrammum: quadratum igitur ex E Z æquale erit rectangulo A Θ, quod quidem adjacet tertiæ proportionali A H, latitudinem habens A Z, & deficiens figura H K Θ ipsi H A B simili. vocetur autem A B transversum figuræ latus, & A H latus rectum.

Ex quibus manifeste constat, cylindri sectionem A B Γ ellipsim esse. quæcunque enim hoc loco demonstrata sunt inesse huic sectioni, omnia similiter & coni ellipsi insunt, ut demonstratum est in elementis conicis, theoremate quinto decimo [libri primi] iis saltem qui ejus theorematis vim rite perceperint: & nos quoque in nostris in idipsum commentariis geometrice demonstravimus *.

ἡ A B πρὸς τὴν A H, τουτέστιν ἡ B Z πρὸς Z Θ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως τὸ ὑπὸ Z B, Z A πρὸς τὸ ἀπὸ Z Θ, ὡς δὲ ἡ B Z πρὸς Z Θ οὕτως τὸ ὑπὸ B Z, Z A πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z, Z A, τουτέστι τὸ A Θ παραλληλόγραμμον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς E Z ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν A H τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν A Z, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ H K Θ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ A H B. καλείσθω δὲ ἡ μὲν A B πλαγία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ A H ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, φανερόν ἐστιν ὅτι ἡ A B Γ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν. ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχεν· ὡς ἐν τοῖς κωνικοῖς δείκνυται, θεωρήματι ιε, τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος· καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασιν γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν.

Prop. XVII. *Theor.*

Si in cylindri sectione conjugatæ diametri sint; & fiat ut secunda diameter ad diametrum ita diameter ad aliam quampiam: quæ à sectione ad secundam diametrum ordinatim applicatur poterit spatium quod adjacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & sectionem interjicitur, deficiens vero figura simili ei quæ sub secundâ diametro & tertia proportionali inventâ continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου καὶ τῆς ποιηθείσης τρίτης ἀνάλογον.

* Vide Eutocii Comment. in prop. XVI. lib. primi Conicorum *Apollonii*.

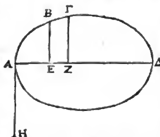
ΕΣΤΩ

ΑΒΓΔ necessario ellipsim esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἑαυτὰ δὲ ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ καὶ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἴδους, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ,ΕΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου οὕτως τό τε ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, καὶ ἡ ΑΗ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν ΑΔ πλαγίαν· ὡς ἄρα ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ

Prop. XVIII. *Theor.*

Si in ſectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta eis quæ inter ipſas & terminos tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut rectum figuræ latus ad tranſverſum; inter ſeſe vero ut ſpatia, quæ rectis modo dicto interceptis continentur.

SIT cylindri ſectio ΑΒΓΔ, cujus diameter quidem & tranſverſum figuræ latus ΑΔ, rectum vero latus ΑΗ, & ad ipſam ΑΔ ordinatim applicentur ΒΕ, ΓΖ: dico ut quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ ita eſſe ΗΑ ad ΑΔ, & quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΓΖ ſicut rectangulum ΑΕΔ ad rectangulum ΑΖΔ.

Quoniam enim ut quadratum ſecundæ diametri ad diametri quadratum ita eſt quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ, & ita ΑΗ rectum latus ad tranſverſum ΑΔ: erit ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΔ. ſimiliter autem & quadratum ex ΓΖ ad rectangulum ΑΖΔ: quare & permu-

catam, eadem & circa ſectionem cylindri contingere, ex iis quæ hoc loco demonſtrata ſunt, facile inveniet. quare ab his abſtinens, cum lemmatia nonnulla appoſuero, quæ ſectiones plane eaſdem eſſe oſtendunt, ad alia me convertam.

τὴν τοῦ κώνου τομὴν συμβαίνοντα, τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τοσαῦτα καὶ περὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου τομὴν ἐκ τῶν ἐνταῦθα προδεδειγμένων εὑρήσει συμβαίνοντα. διόπερ τούτου μὲν ἀποστὰς, ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια προσθεὶς, δι' ὧν καὶ αὐτῶν ἐνδείκνυται πῶς ἡ τῶν τομῶν ταυτότης, ἐπ' ἄλλο τι τρέψομαι.

Prop. XIX. *Theor.*

Itaque dico fieri poſſe, ut conum ſimul & cylindrum una eademque ellipſi ſectos oſtendamus.

Consttruatur triangulum ſcalenum ΑΒΓ ſuper baſim ΒΓ, quæ bifariam ſecetur in Δ; ſitque ΑΒ major quam ΑΓ; & ad rectam lineam ΓΑ ad Α punctum conſtituatur angulus ΓΑΕ, qui vel major ſit angulo ΑΒΓ, vel minor; occurrat autem ΑΕ ipſi ΒΓ Ε in puncto Ε; & inter ΒΕ, ΕΓ media proportionalis ſit ΕΖ; junctaque ΑΖ, ducatur in triangulo recta ΘΗ ipſi ΑΕ parallela; & per puncta Θ, Η ducantur ΘΚ, ΛΗΜ parallelæ ipſi ΑΖ, & compleatur parallelogrammum ΚΜ; deinde, juxta rectam ΒΕ ducto plano ad rectos angulos ſuper planum ΒΑΕ, deſcribatur in eo, circa diametrum quidem ΚΛ, circulus ΚΝΛ, qui cylindri baſis erit cujus parallelogrammum per axem eſt ΚΜ; circa diametrum vero ΒΓ deſcri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Λέγω τοίνυν ὅτι δυνατόν ἐστι δεῖξαι κῶνον ὁμοῦ καὶ κύλινδρον μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ τεμνομένους ἐλλείψει.

Ἐκκείσθω τρίγωνον σκαληνὸν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ βάσεως δίχα τεμνομένης κατὰ τὸ Δ, καὶ μείζων ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ, καὶ πρὸς τῇ ΓΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΕ, ἢ μείζων ἢ ἐλάττων τῆς ΑΒΓ γωνίας, καὶ συμπιπτέτω ἡ ΑΕ τῇ ΒΓΕ κατὰ τὸ Ε, καὶ τῶν ΒΕ, ΕΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΕ παράλληλος ἐν τῷ τριγώνῳ διήχθω ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τῶν Θ, Η σημείων τῇ ΑΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΗΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΜ παραλληλόγραμμον· καὶ, διὰ τῆς ΒΕ ἀχθέντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΑΕ ἐπιπέδῳ, γεγράφθω ἐν τῷ ἀχθέντι, περὶ μὲν τὴν ΚΛ διάμετρον, ὁ ΚΝΛ κύκλος, βάσις ἐσόμενος κυλίνδρου οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΚΜ· περὶ δὲ τὴν ΒΓ διάμετρον

διχοτομία τῆς ΘΗ κατὰ τὸ Σ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται τῇ ΘΗ δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥσπερ καὶ ἡ ΡΤ· ἡ ἄρα ΡΤ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τε κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς. ὁμοίως δὲ ἡ ΘΗ διάμετρός ἐστι τῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· τὸ Ρ ἄρα σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἐν ταῖς τομαῖς τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ αὐταί εἰσι διάμετροι, ἥ τε ΘΗ καὶ ἡ ΡΤ· καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἀνάλογον ἡ αὐτή, τουτέστιν ἡ ΘΧ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά· ἡ ἄρα ΘΧ καὶ ἐπὶ τῆς κυλίνδρου τομῆς ὀρθία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΘΧ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΤ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἡ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καὶ ποιούσης τὰ τμήματα· καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἄρα τομῆς ὡς ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΤΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ἡ ἴση τῇ ΤΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀγομένη κατὰ τὸ Φ οὐχ ἑτέρα ἐστὶ τῆς ΤΦ· ἡ ἄρα ΦΤ καὶ ἐν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ τομῇ· τὸ ἄρα Τ σημεῖον, ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ὄν, καὶ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δείκνυται, κἂν ὁσασοῦν ὁμοίως τεταγμένως ἀγάγωμεν· ἡ ΘΡΗ ἄρα γραμμὴ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ μία καὶ αὐτὴ ἐν ἀμφοτέροις ἐστὶ τοῖς σχήμασι. καὶ ἐπεὶ κατεσκευάσθη ἡ ὑπὸ ΓΑ, ΑΕ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΗ, ΗΘ, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων οὖσα

ca ipsi P T secundæ diametro sectionis com- dividiturque Θ H bifariam in puncto Σ, & ipsi ad rectos angulos ducitur secunda diameter sectionis cylindri, quemadmodum & ipsa P T: ergo P T secunda diameter est sectionis tum coni tum cylindri. similiter & Θ H est diameter sectionis coni & cylindri: & propterea punctum P & in coni & in cylindri superficie erit. rursus quoniam in sectionibus coni & cylindri eædem diametri sunt Θ H, P T, tertia etiam proportionalis eadem erit; hoc est Θ X rectum latus figuræ sectionis coni: quare Θ X & in cylindri sectione rectum est figuræ latus. quoniam igitur ut Θ H ad Θ X ita rectangulum H Φ Θ ad quadratum ex Φ T; atque ostensum est in cylindri sectione, ut transversum figuræ latus ad rectum ita rectangulum sub diametri partibus contentum ad quadratum ejus quæ ad ipsam ordinatim applicata partes efficit: erit & in cylindri sectione ut Θ H transversum figuræ latus ad Θ X rectum ita rectangulum H Φ Θ ad quadratum rectæ ipsi T Φ æqualis & sub angulis æqualibus ad ipsam Θ H ductæ. sed recta, æqualis ipsi T Φ & sub æqualibus angulis cum ipsa Θ H ad punctum Φ occurrens, non alia est quam ipsa T Φ; ergo Φ T & in cylindri sectione erit: ac propterea punctum T, in coni superficie existens, in cylindri etiam erit superficie. simili modo demonstratio fiet & in aliis, quæ ad ipsam ordinatim applicabuntur; linea igitur Θ P H in superficiebus utriusque figuræ continetur: quare Θ P H una eademque sectio est in utraque figura. præterea quoniam angulus Γ A E, hoc est, angulus A H Θ, factus est vel major vel minor angulo qui ad B, se-

* Hoc est ad quadratum ex E Z, per constructionem.

ctio

si concipiamus cylindrum, cujus basis quidem sit circulus circa diametrum ΘΚ, parallelogrammum vero per axem ΘΛ: erit & in ipso cylindro sectio, cujus diameter ΖΕ. & simili modo, atque in antecedenti theoremate, demonstrabimus secundam diametrum eandem esse, easdemq; omnes quæ ad diametrum ordinatim applicantur: inventus igitur est cylindrus, quæ secatur eadem ellipsi qua conus datus. quod erat faciendum.

περιπληρούσθω τὸ ΘΛ παραλληλόγραμμον. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴ ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΕ. ὁμοίως δὲ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα, καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι· εὕρηται ἄρα κύλινδρος, ὃς τέμνεται τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κώνου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXI. *Probl.*

Cylindro dato & in eo ellipsi; invenire conum eadem ellipsi sectum qua cylindrus sectus est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Κυλίνδρου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κῶνον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κυλίνδρου.

Exponatur seorsum recta linea ΑΒ, & in ea sumatur quodvis punctum Δ, fiatque ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΒΔ ad ΒΓ, ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΕ, & à punctis Ε, Δ, Γ attollantur rectæ lineæ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, quæ

Εκκεισθω ἔξωθεν εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ, καὶ γενέσθω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ, Γ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς οἵαν δή-

ποτε

ψει τοῦ δοθέντος κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ΄.

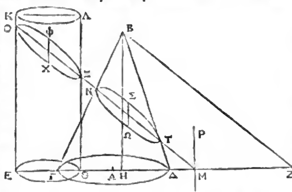
Κώνου δοθέντος εὑρεῖν κύλινδρον, καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰς τομὰς ποιεῖν ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ Γ Β Δ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡ Α Γ Ε, Α Δ Ζ, καὶ πρὸς τῇ Δ Β καὶ πρὸς τῷ ἐν αὐτῇ σημείῳ τῷ Β συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν Δ Β, Β Ζ γωνία, ἥτις μείζων ἔσται τῆς ὑπὸ Β Γ Δ ἢ ἐλάσσων· καὶ τῶν Γ Ζ, Ζ Δ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Ζ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Η, τοῦ δὲ ζητουμένου κυλίνδρου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος, ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α κύκλῳ, οὐδὲν γὰρ διοίσει. ἔστω δὴ ὁ περὶ τὴν Ε Θ διάμετρον, καὶ διὰ τῶν Ε, Θ σημείων παράλληλοι τῇ Β Η εὐθείᾳ ἤχθωσαν αἱ Ε Κ, Θ Λ· ἐν τῷ

Prop. XXII. *Probl.*

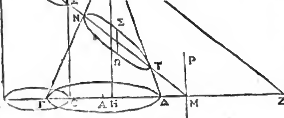
Cono dato invenire cylindrum, & utrumque eodem plano secare, ita ut sectiones faciat in utrisque ellipses similes.

SIT conus datus, cujus basis quidem circulus circa centrum A, vertex punctum B, triangulum vero per axem Γ Β Δ ad basim coni rectum; producaturque in utramque partem Α Γ Ε, Α Δ Ζ; ac ad rectam lineam Δ Β & ad punctum B constituatur angulus Δ Β Ζ vel major vel minor ipso Β Γ Δ; atque inter Γ Ζ, Ζ Δ media proportionalis sumatur Ζ Η, & jungatur Β Η; cylindri autem quæsiti basis sit vel circulus A, vel alius aliquis in eodem plano quo circulus A existens; nihil enim differt. itaque sit is circulus circa diametrum Ε Θ; & per puncta Ε, Θ ipsi Β Η parallelæ ducantur Ε Κ, Θ Λ: eodem igitur plano sunt in quo triangulum



* *Hoc loco desunt nonnulla in hunc sensum*: Et per jam ostensa, Γ Κ diameter erit ellipseos, communis nempe sectionis tam coni cujus basis est circulus diametro Α Γ ac vertex H quam cylindri cujus basis est Γ Β & planum per axem Ζ Ε Γ Θ; sive cylindrus rectus fuerit, sive sub quolibet angulo scalenus.

BH, & recta BZ communiter omnes secat; erit ut MO ad ME, hoc est ut OΞ ad ΘE, ita BZ ad ZH: quare ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΘE, ita quadratum ex BZ ad quadratum ex ZH, hoc est ad rectangulum ΓZΔ [per constructionem.] sed ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΘE ita quadratum diametri OΞ ad quadratum conjugatæ diametri, videlicet ipsius ΦX. ut autem quadratum ex BZ ad rectangulum ΓZΔ ita [per 15. 1. conic.] quadratum diametri NT ad quadratum conjugatæ diametri ΣΩ: ergo ut quadratum ex OΞ ad quadratum ex ΦX ita quadratum ex NT ad quadratum ex ΣΩ; ac propterea ut OΞ ad conjugatam ΦX ita NT ad diametrum conjugatam ΣΩ. at vero diametrum OΞ secare ΦX ad rectos angulos, itemque NT similiter secare ΣΩ, manifeste apparet; quia ipsas ΦX, ΩΣ, & inter sese & ipsi MP parallelas, recta linea MO ad rectos angulos secat: sectio igitur OΦΞ similis est sectioni NΣT. neutra autem earum est circulus, quippe quia sectio subcontraria non sit; angulus enim ΔBZ, videlicet BTN, non est æqualis angulo BΓΔ: quocirca utraque sectionum OΦΞ, NΣT ellipsis est, suntque similes inter sese. quod erat faciendum.



ληλοι ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ EZ τέμνει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ MO πρὸς τὴν ME, τουτέστιν ὡς ἡ OΞ πρὸς τὴν ΘE, οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ZH· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς OΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΦX. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς NT διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΣΩ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς OΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦX οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς NT πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΩ· καὶ ὡς ἡ OΞ ἄρα πρὸς τὴν ΦX συζυγῆ διάμετρον οὕτως ἐστὶν ἡ NT πρὸς τὴν ΣΩ συζυγῆ διάμετρον. ὅτι δὲ ἐστὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν, ἥτε OΞ τὴν ΦX, καὶ ἡ NT τὴν ΣΩ, δῆλον· τὰς γὰρ ΦX, ΩΣ, παραλλήλους οὔσας ἀλλήλαις τε καὶ τῇ MP, ἡ MO τέμνει· ἡ ἄρα OΦΞ τομὴ τῇ NΣT τομῇ ὁμοία ἐστί. καὶ οὐκ ἔστι κύκλος οὐδετέρα αὐτῶν, διὰ τὸ μὴ ὑπεναντίαν εἶναι τὴν τομήν· τῆς ὑπὸ τῶν ΔBZ γωνίας, τουτέστι τῆς ὑπὸ τῶν BTN, ἀνίσου οὔσης τῇ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓΔ· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν OΦΞ, NΣT τομῶν, καὶ εἰσὶν ὅμοιαι ἀλλήλαις. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIII. *Probl.*

Cylindro dato invenire conum, & utrosque eodem plano secare, ita ut sectiones faciat in utrisque ellipses similes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ′.

Κυλίνδρου δοθέντος εὑρεῖν κῶνον, καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ποιοῦντι διὰ τῆς τομῆς ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟ-

ὅτι δὲ καὶ ἐλλείψεις αἱ τομαί, καὶ οὐχὶ κύκλοι, δῆλον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς Μ Η ἤτοι μεῖζον κατεσκευάσθη ἢ ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τῆς Η Θ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν Ε Η, Η Ζ.

…tur; quadratum enim ex M H factum est vel majus vel minus quadrato ex H Θ, hoc est rectangulo E H Z.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ κατὰ δύο σημεῖα, τὸ δὲ πρὸς τῷ ἑνὶ πέρατι τῆς εὐθείας τμῆμα μὴ μεῖζον ᾖ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος, τῷ δὲ συναμφοτέρου τοῦ τε μέσου τμήματος καὶ τοῦ λοιποῦ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὸ μὴ μεῖζον τμῆμα παραβληθῇ χωρίον, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ· ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τοῦ μέσου τμήματος, ἐλάττων δὲ συναμφοτέρου τοῦ τε μέσου καὶ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si recta linea secetur in duobus punctis, segmentum vero quod ad unum rectæ extremum non majus sit eo quod ad alterum; applicetur autem ad non majus segmentum spatium æquale quadrato ex segmento medio & non minore simul sumpto, excedens figurâ quadratâ: latus excessus majus quidem erit medio, minus vero quam medium & quod ad alterum rectæ terminum adjacet segmentum simul sumptum.

ΕΣΤΩ εὐθεῖα ἡ Α Β, τετμημένη κατὰ τὰ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ Α Γ τῆς Δ Β μὴ ἔστω μείζων· λέγω δὴ ὅτι ἐὰν τῷ ἀπὸ τῆς Γ Β τετραγώνῳ ἴσον χωρίον παρὰ τὴν Α Γ παραβληθῇ, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς Γ Δ, ἐλάττων δὲ τῆς Γ Β.

SIT recta linea A B, quæ secetur in punctis Γ, Δ; & sit A Γ non major quam Δ B: dico si ad A Γ applicetur spatium æquale quadrato ex Γ B excedens figurâ quadratâ, latus excessûs majus quidem esse quam Γ Δ, minus vero quam Γ B.



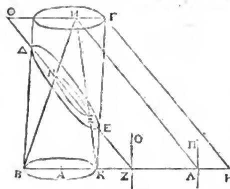
Εἰ γὰρ δυνατόν, ποιείσθω πρῶτον ἡ Γ Δ πλευρὰ εἶναι τοῦ ὑπερβλήματος. ἐπεὶ οὖν τὸ παρὰ τὴν Α Γ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς Γ Δ τετραγώνῳ, ταὐτόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν Α Δ Γ· ἔστι δὲ τὸ παρὰ τὴν Α Γ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον

Si enim fieri potest, primum ponatur Γ Δ latus esse excessus. quoniam igitur id quod ad A Γ applicatur, excedens quadrato ex Γ Δ, idem est ac rectangulum A Δ Γ, quod quidem æquale est quadrato est Γ B; erit rectangulum

A Δ Γ

SIT datus cylindrus, cujus basis quidem circulus circa centrum A; parallelogrammum vero per axem BΓ; & in eo diameter datæ ellipseos sit EΔ, quæ producta occurrat ipsi BA in Z: perque Γ ducatur ΓH ipsi ΔZ parallela occurrens rectæ BA in H; &, protracta recta linea ZΔ ad Θ, compleatur parallelogrammum HΘ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ A κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ BΓ, ἐν ᾧ διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ EΔ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ BA κατὰ τὸ Z, καὶ τῇ ΔZ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓH, συμπίπτουσα τῇ BA κατὰ τὸ H, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ZΔ ἐπὶ τὸ Θ, συμπεπληρώσθω τὸ HΘ παραλληλόγραμμον.



Quoniam igitur parallelogrammi HΘ, latus ZH lateri ΘΓ est æquale, latus autem ΘΓ non est minus ipsa BK; neque igitur ZH ipsa BK minor erit. si igitur ad rectam BK applicetur spatium æquale quadrato ex KH excedens figurâ quadratâ, latus excessûs majus erit quam KZ, & minus quam KH, per ea quæ proxime demonstrata sunt. itaque sit latus excessûs KΛ, & per Λ ipsi HΓ parallela ducatur ΛM; junctisque MB, MK, concipiatur conus, cujus vertex punctum M & basis circulus A; triangulumque per axem BKM. si igitur intelligamus conum sectum eodem plano à quo facta est EΔ diameter sectionis cylindri; erit etiam in cono sectio cujus diameter NΞ. & quoniam ad rectam BK applicatum est spatium æquale quadrato ex KH excedens quadrato ex KΛ; rectangulum BΛK quadrato ex KH æquale erit. & sunt ΔB, KΓ inter se parallelæ, itemque parallelæ sunt ΔZ, MΛ, ΓH: ut igitur ΔZ ad ZB ita ΓH ad

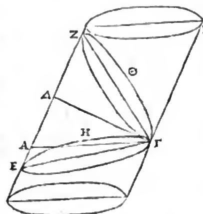
Ἐπεὶ οὖν τοῦ HΘ παραλληλογράμμου ἡ ZH πλευρὰ τῇ ΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΘΓ τῆς BK οὐκ ἔστιν ἐλάττων· καὶ ἡ ZH ἄρα τῆς BK οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς KH τετραγώνῳ ἴσον παραβάλλωμεν παρὰ τὴν BK ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς KZ, ἐλάττων δὲ τῆς KH, διὰ τὸ προδειχθέν. ἔστω τοίνυν ἡ KΛ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἤχθω τῇ HΓ ἡ ΛM, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ MB, MK, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ M σημεῖον, βάσις δὲ ὁ A κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον δηλονότι τὸ BKM. ἐὰν δὴ νοήσωμεν καὶ τὸν κῶνον τετμημένον τῷ ἐπιπέδῳ, ὑφ' οὗ γέγονεν ἡ EΔ διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρος ἡ NΞ. ἐπεὶ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς KH τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὴν BK παραβέβληται, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς KΛ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BΛ, ΛK τῷ ἀπὸ τῆς KH τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔB, KΓ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔZ, MΛ, ΓH παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις· ὡς ἄρα ἡ ΔZ πρὸς τὴν ZB οὕτως ἡ ΓH

ἐστὶν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις, μὴ παραλλήλοις μὲν κειμένοις, ποιοῦσι δὲ ὁμοίας ἐλλείψεις.

possumus ex eadem parte infinite secare duobus planis, non æquidistanter positis, quæ ellipses similes efficiant.

ΕΣΤΩ πρῶτον ὁ δοθεὶς κύλινδρος σκαληνὸς, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὑποκείσθω ἡ πρὸς τὸ Α γωνία ὀξεῖα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ πλευρὰν ἡ ΓΔ· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ πασῶν τῶν ταῖς ΑΔ, ΓΒ παραλλήλοις ἐμπιπτουσῶν. εἰλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Δ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΓ τῇ ΖΓ. ἐὰν οὖν, κατὰ τὸν προδεδομένον τρόπον, ἀγάγωμεν διὰ τῶν ΓΕ, ΓΖ ἐπίπεδα, τεμεῖ τὸν κύλινδρον. τεμνέτω καὶ ποιείτω τὰς ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις· λέγω δὴ ὅτι ὅμοιαί εἰσιν.

SIT primum datus cylindrus scalenus, cujus per axem parallelogrammum AB rectum sit ad basim cylindri; ponaturque angulus ad A acutus, & per Γ ducatur ΓΔ ad latus AΔ perpendicularis: minima igitur est ΓΔ omnium quæ inter parallelas AΔ, ΓB cadunt. sumantur ex utraque parte puncti Δ rectæ æquales EΔ, ΔZ, & jungantur EΓ, ΓZ: erit igitur EΓ ipsi ΓZ æqualis. si igitur per ΓE, ΓZ, juxta prædictum modum, plana ducantur, secabunt cylindrum. secent itaque & faciant ellipses EHΓ, ZΘΓ: dico eas inter se similes esse.

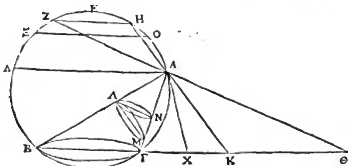


Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑαυτῇ συζυγοῦς διαμέτρου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΓ

Quoniam enim ut quadratum ex EΓ ad quadratum ex ΓA, ita quadratum ex ZΓ ad quadratum ex ΓA; ratio autem quadrati ex EΓ ad quadratum ex ΓA ratio est quadrati ex EΓ diametri sectionis ad quadratum conjugatæ diametri; & ratio quadrati ex ZΓ ad quadratum ex AΓ ratio est quadrati diametri sectionis ZΓ ad quadratum conjugatæ ipsi diametri: erit ut EΓ

occurrat ΖΑ quidem rectæ ΒΓ in Θ, ΗΑ vero eidem in Κ; adeoque ut ΑΚ ad ΚΗ ita ΑΘ ad ΘΖ. sed ut ΑΚ ad ΚΗ ita quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ; & ut ΑΘ ad ΘΖ ita quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΑΘΖ: ut igitur quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ, hoc est [per 36.3.] ad rectangulum ΒΚΓ, ita quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΖΘΑ,

παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἡ μὲν ΖΑ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ ΗΑ κατὰ τὸ Κ· ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι



hoc est ad rectangulum ΒΘΓ. itaque si ducantur rectæ lineæ parallelæ, ΛΜ quidem ipsi ΑΚ, ΛΝ vero ipsi ΑΘ, & per ipsas plana conum secantia; similes habebuntur ellipses. Quoniam enim ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita est quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ; est autem quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ sicut quadratum ex ΛΜ diametro ellipseos ad quadratum conjugatæ diametri ejus; & ut quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ ita quadratum ex ΛΝ diametro ellipseos ad quadratum diametri ipsi conjugatæ: erit igitur ut diameter ΛΜ ad conjugatam ei diametrum ita diameter ΛΝ ad diametrum ipsi conjugatam: & idcirco ΛΜ, ΛΝ similium ellipsium diametri sunt. quod demonstrandum erat. At si alias rectas ipsi ΖΗ parallelas ducamus, ut ΞΟ; & à punctis Ξ, Ο rectas junctas produca-

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΘΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ. ἐὰν οὖν διάγωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ μὲν ΑΚ τὴν ΛΜ, τῇ δὲ ΑΘ τὴν ΛΝ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἀχθέντα ἐπίπεδα τέμῃ τὸν κῶνον, ὁμοίας ἐλλείψεις ποιήσει. ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΘΓ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΜ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον οὕτως ἡ ΝΛ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον· αἱ ἄρα ΛΜ, ΛΝ ὁμοίων ἐλλείψεων εἰσι διάμετροι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κἂν ἑτέρας δὲ τῇ ΖΗ παραλλήλους ἀγάγωμεν, ὡς τὴν ΞΟ, καὶ ἀπὸ τῶν Ξ καὶ Ο ἐπὶ τὸ Α ἐπιζεύξαντες

τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· αἱ ἄρα ΚΓ, ΑΘ διάμετροί εἰσιν ὁμοίων ἐλλείψεων.

hoc est ad quadratum conjugatæ diametri, ita quadratum ex ΚΓ diametro ellipseos ad quadratum ex ΑΓ, hoc est ad quadratum diametri ipsi conjugatæ: ergo ΚΓ, ΑΘ ellipsium similium diametri sunt.

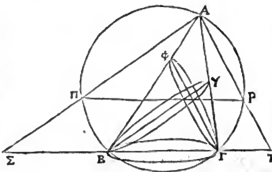
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθʹ.

ΚΕΙΣΘΩ πάλιν ἡ καταγραφὴ τοῦ κώνου, καὶ, ἐκβληθείσης τῆς ΓΒ ἐπὶ θάτερα, δέον ἔστω ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἀγαγεῖν ἐπίπεδα ποιοῦντα ὁμοίας ἐλλείψεις.

Διήχθω τις εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΠ, ΑΡ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Σ, Τ σημεῖα· ὡς ἄρα ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΠ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΤ, ΤΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΓ. ἐὰν ἄρα ταῖς ΣΑ, ΑΤ παραλλήλους εὐθείας ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, ὡς τὰς ΒΥ, ΓΦ, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις· ἔσονται, διὰ τὰ πολλάκις εἰρημένα, αἱ ΒΥ, ΓΦ εὐθεῖαι ὁμοίων ἐλλείψεων διάμετροι.

Prop. XXIX. *Probl.*

SIT deinde conus, ut supra; &, producta ΓΒ, oporteat ab utraque parte ducere plana quæ ellipses similes faciant.



Ducatur in circulo recta quædam linea ΠΡ, ipsi ΒΓ parallela; & junctæ ΑΠ, ΑΡ ad puncta Σ, Τ producantur: ut igitur ΑΣ ad ΣΠ, ita ΑΤ ad ΤΡ, & ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΑΣΠ, hoc est ad rectangulum ΓΣΒ, ita quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤΡ, hoc est ad rectangulum ΒΤΓ. quare si rectas lineas in triangulo duxerimus ipsis ΣΑ, ΑΤ parallelas, ut ΒΥ, ΓΦ; & per eas plana ellipses facientia: erunt ΒΥ, ΓΦ similium ellipsium diametri, per ea quæ superius demonstrata sunt.

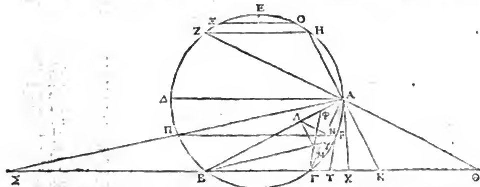
Prop.

diameter ad secundam diametrum, ita alterius conjugationis secunda diameter ad diametrum ipsius transversam.

In cono autem, si rursus fiat ut HA ad AK ita AΠ ad ΠΣ: erit ut AK ad KH ita ΠΣ ad ΣA; hoc est ut quadratum ex AK ad rectangulum HKA ita rectangulum ΠΣA ad quadratum ex AΣ. sed ut quadratum ex AK ad rectangulum HKA, hoc est ad rectangulum BKΓ, ita quadratum diametri duarum similium ellipsium quæ ex eadem parte fiunt, nempe

διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον οὕτως ἡ τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

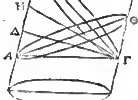
Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν πάλιν κατασκευάσωμεν ὡς τὴν HA πρὸς AK, οὕτως τὴν AΠ πρὸς τὴν ΠΣ· ἔσται ὡς ἡ AK πρὸς τὴν KH, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΣA, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν HK, KA οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AΣ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ AK πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν HK, KA, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BK, KΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ἀπὸ

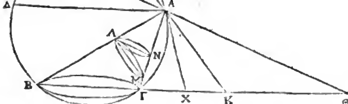


quadratum ex AN vel AM, ad quadratum secundæ diametri eidem conjugatæ; ut autem rectangulum ΠΣA, hoc est ΓΣB, ad quadratum ex ΣA, ita quadratum secundæ diametri similium ellipsium quæ ex oppositis partibus fiunt ad conjugatæ diametri BΥ vel ΓΦ quadratum: ergo ut unius conjugationis diameter ad secundam ejus diametrum, ita alterius conjugationis secunda diameter ad diametrum ipsam.

τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίων δύο ἐλλείψεων, ἤτοι τῆς AN ἢ τῆς AM, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣA, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣB, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣA, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν γινομένων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς BΥ ἢ τῆς ΓΦ· ὡς ἄρα τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

Καὶ





παραλλήλων· μήτε τὴν διάμετρον αὐτῆς παράλληλον εἶναι τῇ διὰ τῶν Ε καὶ Α ἀγομένῃ εὐθείᾳ, ἐν τῇ καταγραφῇ τοῦ κώνου· μονήρης γὰρ καὶ αὐτή, διὰ τὸ τὴν διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλον ἀγομένην ἐφάπτεσθαι τοῦ κύκλου καὶ πίπτειν ἐκτός· ὥστε μὴ εἶναι τῷ Ε σημείῳ σύζυγον, ὡς τῷ Ξ τὸ Ο ἢ τῷ Ζ τὸ Η.

Περὶ μὲν οὖν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος ἀντὶ πλειόνων ἀρκείτω καὶ τὰ εἰρημένα. ὥρα δ' ἂν εἴη μετελθεῖν ἐφ' ὅπερ ἀρτίως ἐπηγγείλαμεν· ἀφορμὴ δέ μοι τῆς μελλούσης σκέψεως οὐκ ἄκαιρος, ἔστι δὲ ἥδε. Πείθων ὁ γεωμέτρης, ἐν συγγράμματι ἑαυτοῦ τὰς παραλλήλους ἐξηγούμενος, οἷς μὲν Εὐκλείδης εἶπεν οὐκ ἠρκέσθη, σαφέστερον δὲ δι' ὑποδείγματος αὐτὰς ἐσαφήνισε· φησὶ γὰρ τὰς παραλλήλους εὐθείας εἶναι τοιαύτας οἵας ἐν τοῖς τοίχοις ἢ τῷ ἐδάφει τὰς τῶν κιόνων σκιὰς ὁρῶμεν πλημμελῶς, ἤτοι ἀπὸ λαμπάδος τινὸς ἀπ' ἀντικρὺ καιομένης ἢ λύχνου. τοῦτο δὲ εἰ καὶ πᾶσι πλεῖστον παρέχει καταγελᾶν, ἀλλ' ἡμῖν οὐ καταγέλαστον, αἰδοῖ τοῦ γεγραφότος· φίλος γὰρ ἀνήρ. ἀλλὰ σκεπτέον ὅπως τὸ τοιοῦτον ἔχει μαθηματικῶς· οἰκεία δὲ ἡ σκέψις τοῖς ἐνταῦθα προτεθεωρημένοις, δι' αὐτῶν γὰρ ἀποδειχθήσεται τὸ προκείμενον.

similis constituitur præter æquidistantes: neque ipsius diametrum parallelam esse ei quæ per E & A ducitur in figura coni; hæc enim solitaria est, quia recta per E ducta ipsi A Δ parallela circulum contingit, & cadit extra: nec est aliud punctum compar puncto E, quemadmodum est O ipsi Ξ & Z ipsi H. *

De proposito igitur nobis problemate hæc dicta sufficiant. Tempus est ut ad ea aggrediar, quæ modo pollicitus sum: mihi vero futuræ contemplationis occasio non intempestiva fuit; nempe hæc. *Pitho* geometra, in adversariis ejus rectas parallelas explicans, non contentus iis quæ scripserat *Euclides*, satius duxit eas exemplo declarare: dixit enim lineas parallelas esse, quales in parietibus vel pavimento columnarum umbras, à lampade è regione ardente vel lucernâ factas, videmus. quod tametsi omnibus non parvum risum moverit, mihi tamen ridiculum non videtur, propter meam in auctorem, qui amicus noster est, observantiam. sed videamus quomodo hoc mathematice se habeat; talis enim contemplatio hujus loci propria est: quippe quòd per ea quæ proxime demonstrata sunt propositum ostendi possit.

* Sectio hæc, cujus diameter ipsi A E parallela est, rationem habet omnium minimam diametri ad latus ejus rectum: ac proinde, si proponatur ellipsis, cujus diameter ad latus ejus rectum minorem habet rationem; duæ tantum duci possunt rectæ, secundum quas designata plana sectiones datæ similes producant.

[ ] H PROP.

planum ducatur faciens in cylindro parallelogrammum ΗΘ; ipsi vero ΖΓ ad rectos angulos ducatur ΓΚ in plano circuli Ζ, & per ΓΚ & utramque ipsarum ΓΔ, ΓΕ plana ducantur cylindrum secantia, quæ faciant in superficie quidem cylindri curvas ΛΔΜ, ΝΕΞ; in plano vero parallelogrammi rectas lineas ΛΜΓ, ΝΞΓ: diametri igitur sectionum sunt ΛΜ, ΝΞ. ad eas igitur ordinatim applicentur ΔΟ, ΕΠ, & ad alteram partem superficiei ad puncta Ρ, Σ producantur. itaque quoniam recta ΓΔ contingit sectionem ΛΔΜΡ in puncto Δ; & hujusmodi cylindri sectio ostensa est ellipsis, non circulus; ordinatimque applicata est ΔΟ: erit ut ΛΓ ad ΓΜ ita ΛΟ ad ΟΜ, id quod demonstratum est ab *Apollonio* in 36ta primi libri Conicorum: & eadem ratione ut ΝΓ ad ΓΞ ita ΝΠ ad ΠΞ. est autem ΝΗ ipsi ΘΜ parallela; quare ut ΛΓ ad ΓΜ ita ΝΓ ad ΓΞ, & propterea ut ΛΟ ad ΟΜ ita ΝΠ ad ΠΞ: recta igitur puncta Π, Ο connectens est in plano ΗΘ, & utrique ipsarum ΒΑ, ΘΜ parallela.

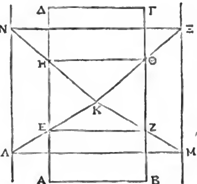
πεδα, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ· καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον, καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, τὰς ΛΜΓ, ΝΞΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. κατήχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς ΛΔΜΡ γραμμῆς ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ δέδεικται ἡ τοιαύτη τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψις οὖσα ἀλλ᾽ οὐ κύκλος, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, ὡς δέδεικται τῷ Ἀπολλωνίῳ ἐν τῷ α΄ τῶν Κωνικῶν τριακοστῷ ἕκτῳ θεωρήματι. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΝΗ τῇ ΘΜ παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΟ πρὸς ΟΜ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Π, Ο σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐν τῷ ΗΘ ἐπιπέδῳ ἐστί, καὶ παράλληλος ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ,

* Hæc demonstratio cylindrum supponit rectum; sed propositio non minus vera est de scaleno, ubicunque situm fuerit punctum Γ: nec modo diverso probabitur, nisi quod angulus ΒΖΓ, jam non sit necessario rectus: oportebit autem planum circuli, cujus centrum Ζ, transire per datum punctum Γ, ita ut basis Α plano æquidistet.

Θ Μ.

ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΛΝ, ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ τῇ ΛΝ παράλληλός ἐστι.

in punctis Λ, Μ, Ν, Ξ, & jungantur ΛΝ, ΜΞ: dico rectam ΜΞ ipsi ΛΝ parallelam esse.



Τὸ γὰρ διὰ τῶν ΚΛ, ΕΖ εὐθειῶν ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον τεμεῖ καὶ τὸ ΛΜΝΞ ἐπίπεδον, καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν ΛΜ παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΖ· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ διὰ τῶν ΚΝ, ΗΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ποιήσει παράλληλον τὴν ΝΞ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΛΚΝ τρίγωνον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ ΝΛ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΞΜ τῇ ΘΖ παράλληλος· ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, καὶ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ. ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ, καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα καὶ ἡ ΜΞ εὐθεῖα τῇ ΛΝ.

Planum enim per rectas ΚΛ, ΕΖ ductum secabit etiam planum ΛΜΝΞ, & in eo communem sectionem faciet rectam lineam ΛΜ ipsi ΕΖ parallelam: similiter & planum per ΚΝ, ΗΘ ductum faciet ΝΞ parallelam ipsi ΗΘ. quoniam igitur ΛΚΝ triangulum ab æquidistantibus planis ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ secatur, communes ipsorum sectiones ΝΛ, ΗΕ [per 16.11.] inter se parallelæ sunt. & eadem ratione parallelæ sunt rectæ ΞΜ, ΘΖ: quare ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΗΚ ad ΚΝ, & ut ΗΚ ad ΚΝ ita ΗΘ ad ΝΞ. sed ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΕΖ ad ΛΜ; ut igitur ΕΖ ad ΛΜ ita ΗΘ ad ΝΞ, & permutando. est autem ΕΖ æqualis ipsi ΗΘ; ergo & ΛΜ ipsi ΝΞ. & sunt inter se parallelæ; recta igitur ΜΞ [per 33.1.] ipsi ΛΝ parallela est.

Ἐὰν δὴ τὸ μὲν Κ σημεῖον ὑποθώμεθα εἶναι τὸ φωτίζον, τὸ δὲ ΑΓ παραλληλόγραμμον τὸ ἐπιπροσθοῦν τῶν ἀκτίνων, εἴτε καθ᾽ αὑτὸ εἴη, εἴτε ἐν κυλίνδρῳ· συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Κ φωτίζοντος ἀκτῖνας ἐκβαλλομένας ὁρίζεσθαι τῇ τε ΝΛ καὶ τῇ ΜΞ εὐθείᾳ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν ΝΛ, ΜΞ παραλλήλων ἐσκιασμένον

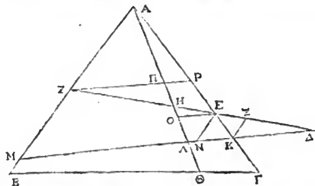
Si igitur ponamus punctum Κ esse corpus illuminans, & ΑΓ parallelogrammum quod ejus radiis opponatur, sive per se sive in cylindro: accidet ut radii, qui ab ipso Κ producuntur, terminentur rectis lineis ΝΛ, ΜΞ; & quod intra parallelas ΝΛ, ΜΞ continetur umbrosum

triangulum continetur ad minorem parti exteriori adjacentem: quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum secat, ab ea quæ à vertice ad basim ducitur in eadem proportione secatur. quod si rectæ ab eo puncto ad triangulum ductæ secentur in eadem proportione; recta linea, quæ intra triangulum ipsas secat, per trianguli verticem necessario transibit.

ἂν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀνάλογον τέτμηται ὑπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας. καὶ πᾶσαι αἱ οὕτως ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ τέμνουσα αὐτὰς εὐθεῖα, ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγομένη, διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐλεύσεται.

SUMATUR enim aliquod punctum Δ extra triangulum ABΓ, à quo ducatur recta linea ΔEZ triangulum secans; & à vertice A ad basim ducatur AHΘ, quæ ita secet ZΔ, ut ZΔ ad ΔE eandem rationem habeat quam ZH ad HE; deinde ducatur alia recta ΔKΛM: dico ut MΔ ad ΔK ita esse MΛ ad ΛK.

ΤΡΙΓΩΝΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον ἡ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθήτω ἡ ΑΗΘ τέμνουσα τὴν ΖΔ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω τις ἑτέρα εὐθεῖα ἡ ΔΚΛΜ· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ.



Per puncta enim E, K ducantur rectæ EN, KΞ ipsi AB parallelæ; & per E, Z ducantur EO, ZΠP parallelæ ipsi MΔ. quoniam igitur in triangulo AMK ducta est EN ipsi AM parallela, erit ut NE ad EK ita MA ad AK, hoc est ZA ad AP. rursus quoniam ZA pa-

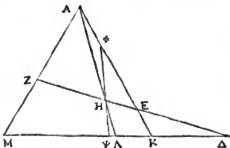
Ἤχθωσαν διὰ μὲν τῶν Ε, Κ σημείων τῇ ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΝ, ΚΞ, διὰ δὲ τῶν Ε, Ζ τῇ ΜΔ παράλληλοι αἱ ΕΟ, ΖΠΡ. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΜΚ τριγώνου παρὰ τὴν ΑΜ πλευράν ἐστιν ἡ ΕΝ· ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΚ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΑ τῇ

ΚΞ

διαιρεθήσονται) τὸν εἰρημένον τρόπον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Κἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Δ διαχθεῖσαι ἀνάλογον ὦσι τετμημέναι, ἵν᾽ ᾖ ὡς μὲν ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ἀπειλημμένας εὐθείας, οἷον τὰς ΖΕ, ΜΚ, ἀνάλογον τέμνουσα εὐθεῖα διαγομένη διὰ τῆς κορυφῆς ἥξει τοῦ τριγώνου.

Quod si à puncto Δ ductæ lineæ in eadem proportione secentur, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; & rursus quam habet ΜΔ ad ΔΚ eandem habeat ΜΛ ad ΛΚ: recta linea, proportionaliter secans eas quæ intra triangulum continentur, nempe rectas ΖΕ, ΜΚ, per verticem trianguli necessario transibit.



Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ ΑΗΨ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν, κατὰ τὸ προδειχθέν, εὐθεῖά τις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἡ ΑΨ ἀγομένη τέμνει τὴν ΖΔ εὐθεῖαν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ· καὶ τὴν ΜΔ ἄρα ἀνάλογον τεμεῖ· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΨ πρὸς τὴν ΨΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ ἄρα ΑΗ ἐκβαλλομένη οὐχ ἥξει δι᾽ ἄλλου σημείου πλὴν τοῦ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim fieri potest, transeat extra verticem per punctum Φ; & ducatur recta linea ΑΗΨ. quoniam igitur, ex iis quæ proxime demonstrata sunt, recta quædam ΑΨ à vertice ducta secat ΖΔ, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; etiam ipsam ΜΔ in eadem proportione secabit: eritque ut ΜΔ ad ΔΚ ita ΜΨ ad ΨΚ, quod est absurdum; posuimus enim ΜΔ ad ΔΚ sicut ΜΛ ad ΛΚ: quare ΑΗ producta non transibit per aliud punctum quam per verticem trianguli. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδʹ.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κωνικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ᾽ ἀμφότερα τὰ μέρη, πα-

Prop. XXXIV. *Theor.*

Omnes rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam superficiem ex utra-

nes ΛΔΜ, ΝΕΞ, in plano autem trianguli ΒΗΘ rectas lineas ΛΓ, ΝΓ: diametri igitur sectionum ΛΔΜ, ΝΕΞ sunt rectae ΛΜ, ΝΞ. itaque ad diametros ΛΜ, ΝΞ ordinatim applicentur ΔΟ, ΕΠ; quae ad alteram partem superficiei ad puncta Ρ, Σ producantur. quoniam igitur recta linea ΓΔ contingit sectionem ΛΔΜ in puncto Δ, & ΔΟ ordinatim applicata est; erit [per 36. 1.] ut ΛΓ ad ΓΜ ita ΛΟ ad ΟΜ. eadem quoque ratione ut ΝΓ ad ΓΞ ita erit ΝΠ ad ΠΞ: ergo, per proxime demonstrata, recta linea quae connectit puncta Ο, Π, si producatur, per verticem transibit. ducatur igitur ΟΠΒ. & quoniam ΕΣ, ΔΡ ipsi ΓΚ sunt parallelae; etiam inter se parallelae & in eodem plano erunt: itaque planum juxta rectas ΒΠΟ & ΕΣ, ΔΡ ductum sectionem faciet in coni superficie triangulum: adeoque puncta Ε, Δ, quae sunt in superficie coni, erunt etiam in latere trianguli secantis triangulum ΒΗΘ secundum rectam lineam ΒΠΟ. simili modo demonstrabitur idem evenire in quibusvis aliis, uti & in contingentibus ad puncta Ρ, Σ. omnes igitur rectae lineae, quae à puncto Γ ductae conicam

διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΒΗΘ τριγώνου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΓ, ΝΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν ΛΔΜ, ΝΕΞ τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. ἤχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῆς ΛΔΜ γραμμῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Ο καὶ Π ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἥξει διὰ τῆς κορυφῆς, διὰ τὸ πρὸ τούτου. διήχθω τοίνυν ἡ ΟΠΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΣ, ΔΡ τῇ ΓΚ ἐστὶ παράλληλος· αἱ ἄρα ΔΡ, ΕΣ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. τὸ οὖν διὰ τῆς ΒΠΟ καὶ τῶν ΕΣ, ΔΡ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τὴν τομὴν ποιήσει τρίγωνον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ· τὰ ἄρα Ε καὶ Δ σημεῖα, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὄντα τοῦ κώνου, ἐπὶ πλευρᾶς ἐστι τριγώνου τοῦ τέμνοντος τὸ ΒΗΘ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΠΟ εὐθεῖαν. ὁμοίως δὲ δείκνυται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων πασῶν, καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένων, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτόμεναι τοῦ κω-

* Supponit hic conum rectum esse, sed eadem fere demonstratione res in cono scaleno comprobari potest, uti diximus in nota ad vigesimam nonam propositionem de Cylindro.

νικῆς

ἐστιν· ἐκβληθεῖσαι ἄρα αἱ ΚΛ, ΜΝ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΚΞ, ΞΝ δυσὶ ταῖς ΔΑ, ΑΕ παράλληλοί εἰσιν· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τὸ Ξ γωνία τῇ πρὸς τὸ Α. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΞΚ, ΚΝ δυσὶ ταῖς ΑΔ, ΔΕ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚ, ΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ ἴση· τὰ ἄρα ΞΚΝ, ΑΒΓ τρίγωνα ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις.

Ἐὰν οὖν πάλιν τὸ μὲν Θ σημεῖον ὑποθώμεθα τὸ φωτίζον εἶναι, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἐπιπροσθοῦν τῶν ἀκτίνων, εἴτε καθ' αὑτὸ ὂν τὸ τρίγωνον εἴτε ἐν κώνῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Θ φερομένας ἀκτῖνας, ἐκπιπτούσας διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ποιεῖν τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῆς σκιᾶς, ὅμοιον ὂν τῷ ΑΒΓ. ταῦτα εἰ καὶ ὀπτικῆς θεωρίας ἔχεται, καὶ δοκεῖ διὰ τοῦτο τῆς παρούσης πραγματείας ἀλλότρια εἶναι· ἀλλ' οὖν ἐκεῖνό γε φανερὸν γέγονεν, ὅτι, ἄνευ τῶν περὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἐνταῦθα δειχθέντων, τῆς ἐλλείψεως λέγω καὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εὐθειῶν, ἀδύνατον ἦν κατασκευάσαι τὸ τοιοῦτον πρόβλημα. ὥστε οὐκ ἀλόγως, ἀλλὰ διὰ τὴν χρείαν, ἐπεισῆλθεν ὁ περὶ τούτων λόγος.

& cum duæ rectæ ΚΞ, ΞΝ duabus ΔΑ, ΑΕ parallelæ sint; erit angulus ad Ξ angulo ad Α æqualis. rursus cum duæ ΞΚ, ΚΝ duabus ΑΔ, ΔΕ parallelæ sunt, erit angulus ΞΚΝ angulo ΑΔΕ æqualis; triangula igitur ΞΚΝ, ΑΒΓ inter se similia erunt.

Quod si punctum Θ fingamus esse corpus illuminans, & triangulum ΑΒΓ ejus radiis oppositum, sive per se sive in cono, eveniet ut radii, qui ab ipso Θ emittuntur juxta triangulum ΑΒΓ, faciant triangulum umbræ ΚΝΞ ipsi ΑΒΓ simile. etsi enim hæc ad Opticam contemplationem pertineant, & ob id à proposita tractatione aliena videantur, tamen perspicue constat, absque iis quæ hoc loco de coni & cylindri sectione, hoc est de ellipsi & rectis lineis eam contingentibus, demonstrata sunt, problema hujusmodi absolvi non posse: quare non temere, sed necessario de his sermonem instituimus.

ΣΕΡΗ-

ANTISSENSIS PHILOSOPHI
DE
SECTIONE CONI
LIBER.

CUM ea sectio, præstantissime *Cyre*, quæ in Conis per verticem fit, in eorum quidem superficiebus triangula efficiat, variamque & perpulchram præbeat contemplationem; à nullo autem eorum qui nos præcesserunt, quod sciam, pertractata sit: non malè me facturum existimavi, si locum hunc inexplicatum non relinquerem, sed perscriberem de his quæcunque ipse cogitatione complectebar. Propemodum quidem hæc omnia, quæque profundiore geometriâ indigere videntur, me hoc libro comprehendisse arbitror: neque mirum alicui videri debeat, si nonnulla quæ dici debuerant prætermiserim, utpote qui primus ad hanc contemplationem sim aggressus. Quamobrem par est, ut vel tu, in eorundem studium incumbens, vel posteriorum aliquis, qui in hæc inciderit, nostro exemplo ductus, à nobis omissa supplenda curaret. Quædam autem sunt quæ consultò præterierim, vel quod manifesta essent, vel quod ab aliis tractata. Siquidem in omni cono sectionem triangulum esse, si per

ΤΗΣ ἐν τοῖς κώνοις τομῆς, ἄριστε Κῦρε, ὅταν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν γίνηται, τρίγωνα μὲν ὑφιστάσης ἐν τοῖς κώνοις, ποικίλην δὲ καὶ γλαφυρὰν θεωρίαν ἐχούσης, καὶ μηδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν, ὅσα γε μὲ εἰδέναι, πραγματευθείσης· ἔδοξέ μοι μὴ καλῶς ἔχειν ἀνεξέργαστον ἀφεῖναι τὸν τόπον τοῦτον, εἰπεῖν δὲ περὶ αὐτῶν ὅσα γε εἰς ἐμὴν ἀφῖκται κατάληψιν. σχεδὸν μὲν οὖν τά γε πλείω, καὶ βαθυτέρας δοκοῦντα δεῖσθαι γεωμετρίας, ἡγοῦμαι λόγου τετυχηκέναι παρ' ἡμῶν. οὐκ ἂν δὲ θαυμάσειέ τις, εἰ καί τι τῶν ὀφειλόντων λεχθῆναι παρεῖται ὀρθῶς, ἅτε πρῶτος ἐγχειρήσας τῇ τοιαύτῃ θεωρίᾳ. ὥστε εἰκὸς ἢ σὲ καθιέντα εἰς τὴν αὐτὴν σκέψιν, ἢ τῶν ὕστερον ἐντευξομένων τινά, ὁρμώμενον ἐνθένδε, τὸ παροφθὲν ἡμῖν προσθεῖναι. ἔστι δὲ ἃ καὶ ἑκόντες παραλελοίπαμεν, ἢ διὰ τὸ σαφές, ἢ διὰ τὸ ἄλλοις δεδεῖχθαι. αὐτίκα τὸ μὲν ἐν παντὶ κώνῳ τρίγωνον εἶναι τομήν, εἰ διὰ τῆς κορυφῆς τμηθείη,

Β, Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ.

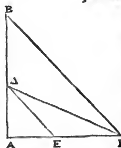
sub Α & ΔΖ; ergo rectangulum sub Α & ΔΕ rectangulo sub Β & Γ majus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν γωνιῶν ἐπὶ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀχθῇ εὐθεῖα· ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ καθέτῳ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν τμηθεῖσαν πλευρὰν ὑπὸ τῆς ἀχθείσης.

Prop. II. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus quod est circa angulum rectum recta ducatur: ducta illa habebit ad eam quæ inter ipsam & perpendicularem interjicitur majorem rationem, quam quæ à principio subtenditur recto angulo ad jam dictum latus.



Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν Α γωνίαν, ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

Ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΔΓ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

Sit triangulum orthogonium ΑΒΓ, rectum habens angulum ad Α; & ab uno angulorum, videlicet à Γ, ad ΑΒ ducatur recta ΓΔ: dico ΓΔ ad ΔΑ majorem rationem habere quam ΓΒ ad ΒΑ.

Ducatur enim recta ΔΕ ipsi ΓΒ parallela. & quoniam rectus est angulus ΔΑΓ, angulus ΔΕΓ obtusus erit: major igitur est ΔΓ quam ΔΕ; & idcirco ΓΔ ad ΔΑ majorem rationem habet quam ΕΔ ad ΔΑ, hoc est quam ΓΒ ad ΒΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ΄.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ· τὰ γινόμενα ἐν ταῖς τομαῖς τρίγωνα τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Prop. III. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur; triangula illa, quæ in sectionibus fiunt & æquales habent bases, inter se æqualia erunt.

esse. quoniam enim ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΕΖ; erit permutando ut ΓΑ ad ΑΕ ita ΓΔ ad ΕΖ. & sunt ΓΑ, ΑΕ æquales; ergo & æquales sunt ΓΔ, ΕΖ. triangula vero æqualium basium, quæ in conis rectis fiunt, inter se [per 3. huj.] sunt æqualia: ergo & triangula ΑΓΔ, ΑΕΖ æqualia erunt.

καὶ ἴσαι ἐστίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΓΑ, ΑΕ· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων τρίγωνα ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις ἴσα ἐστίν· ἴσα ἄρα τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα.

Prop. V. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur, & per axem & extra axem; sitque axis non minor semidiametro basis: eorum quæ fiunt triangulorum maximum est illud quod per axem transit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε′.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς ἐπιπέδοις τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, τοῖς μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τῶν γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων μέγιστον ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

SIT conus, cujus vertex Α, basis circulus circa Β centrum, & axis ΑΒ; cono itaque per verticem secto, fiant triangula, per axem quidem ΑΓΔ, extra axem vero ΑΕΖ; ponaturque ΕΖ ipsi ΓΔ parallela; axis autem ΑΒ non minor sit ipsa ΒΓ: dico ΑΓΔ triangulum triangulo ΑΕΖ majus esse.

Jungatur ΒΕ, & ab ipso Β ad ΕΖ perpendicularis ducatur ΒΗ: ergo [per 3. 3.] ΕΖ bifariam dividetur in Η; & juncta ΑΗ perpendicularis erit ad ΕΖ; triangulum enim ΕΑΖ æquicrure est. quoniam igitur ΑΒ non est minor semidiametro ΒΕ, & est ΕΗ minor quam ΒΕ; erit ΑΒ ipsa ΕΗ major. itaque abscindatur ΒΘ æqualis ipsi ΕΗ, & jungatur ΗΘ: quoniam igitur ΕΗ ipsi ΒΘ est æqualis, communis autem est ΒΗ; ergo

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ· τμηθέντος δὲ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς, γενήσθω τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΕΖ, καὶ κείσθω παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, ὁ δὲ ἄξων, τουτέστιν ἡ ΑΒ εὐθεῖα, μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΕΖ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· ἡ ΑΗ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΕ· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΕΗ. ἀφῃρήσθω τοίνυν τῇ ΕΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΗ τῇ ΒΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΗ· δύο ἄρα

λων ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ πέρας. καὶ ἔστω μείζων τῆς ΖΔ ἡ ΓΔ, ἤτε διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, ἤτε μή· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μεῖζόν ἐστιν.

Ἤχθωσαν ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΓΔ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΖΔ μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΗ μείζων· τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΗ μεῖζόν ἐστι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἔλαττόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα πρὸς ΘΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· κάθετος ἄρα ἐστὶ καὶ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὡς δειχθήσεται.

Καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ οὐκ ἐλάττων, ἤτοι μείζων ἔσται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ, ἢ ἴση. ἔστω πρότερον μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΘΔ. τετμήσθω ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΚ, καὶ ἔστι μεῖζον τὸ ἀπὸ ΛΚ τοῦ ἀπὸ ΛΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ἀπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ· ἡ ΘΒ ἄρα μείζων τῆς ΗΚ. καί εἰσιν αἱ

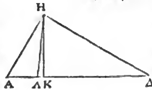
minum Δ conveniant; & sit ΓΔ major ipsa ΖΔ, sive per centrum transeat, sive non: dico triangulum ΑΓΔ majus esse triangulo ΑΖΔ.

Ducantur enim ad ΖΔ, ΓΔ perpendiculares ΑΒ, ΑΗ; & ad ΑΔ ducatur ΒΘ perpendicularis. itaque quoniam ΓΔ major est ipsa ΖΔ; erit ejus dimidia ΒΔ major quam ΔΗ: ergo quadratum ex ΒΔ quadrato ex ΔΗ majus erit; & propterea reliquum quadratum ex ΒΑ minus quadrato ex ΑΗ: quadratum igitur ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ minorem rationem habet quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. sed ut quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ ita est ΑΘ ad ΘΔ: ergo ΑΘ ad ΘΔ minorem habet rationem quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. fiat ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ ita ΑΚ ad ΚΔ, & jungatur ΗΚ; quæ ad ΑΔ perpendicularis erit, uti mox demonstrabitur.

Quoniam igitur ponimus ΑΒ non minorem ipsâ ΒΔ, erit ΑΒ vel major quam ΒΔ, vel ipsi æqualis. sit primum major; ergo ΑΘ major est quam ΘΔ. secetur ΑΔ bifariam in Λ. & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ΑΘΔ minus est quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΘ; rectangulum vero ΑΚΔ minus quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΚ, & majus est quadratum ex ΛΚ quadrato ex ΛΘ; erit rectangulum ΑΘΔ, hoc est quadratum ex ΒΘ, majus rectangulo ΑΚΔ, hoc est quadrato ex ΗΚ: recta igitur ΘΒ major est

esse, hoc modo ostendetur.

Sit triangulum orthogonium Α Η Δ rectum habens angulum ad Η, & à puncto Η ad basim ducatur Η Κ, ita ut quam rationem habet quadratum ex Α Η ad quadratum ex Η Δ eandem habeat recta Α Κ ad Κ Δ: dico Η Κ ad Α Δ perpendicularem esse.



Si enim non ita sit, sit Η Λ perpendicularis: ut igitur quadratum ex Η Α ad quadratum ex Η Δ ita Λ Λ ad Λ Δ. erat autem ut quadratum ex Α Η ad quadratum ex Η Δ ita Α Κ ad Κ Δ; quare ut Α Λ ad Λ Δ ita erit Α Κ ad Κ Δ, quod est absurdum: igitur Η Λ non est perpendicularis. similiter ostendemus neque aliam ullam perpendicularem esse præter ipsam Η Κ: ergo Η Κ ad Α Δ perpendicularis erit.

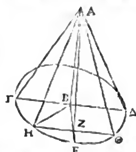
Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ Α Η Δ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν πρὸς τὸ Η γωνίαν, διήχθω ἡ Α Δ βάσις ὑπὸ τῆς Η Κ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἀπὸ Α Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Δ οὕτως ἡ Α Κ πρὸς Κ Δ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ Η Κ ἐπὶ τὴν Α Δ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ Η Λ κάθετος· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η Α πρὸς τὸ ἀπὸ Η Δ οὕτως ἡ Α Λ πρὸς τὴν Λ Δ. ἦν δὲ ὡς τὸ ἀπὸ Α Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Δ οὕτως ἡ Α Κ πρὸς Κ Δ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ Α Λ πρὸς Λ Δ οὕτως ἡ Α Κ πρὸς Κ Δ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ Η Λ. ὁμοίως δὲ δείκνυται ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς Η Κ· ἡ ἄρα Η Κ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Α Δ.

Prop. VII. *Theor.*

Si in cono recto triangulum per axem majus sit quovis triangulo extra axem constituto: axis coni non minor erit semidiametro.

SIT conus cujus vertex quidem Α punctum, axis recta Α Β; basis autem circulus circa centrum Β; & triangulum per axem Α Γ Δ, quod majus sit omni triangulo extra axem in cono constituto: dico rectam Α Β semidiametro basis non minorem esse.



Si enim fieri potest, sit minor: & ducatur in circulo recta Β Ε ad Γ Δ perpendicularis. quoniam igitur angulus Α Β Ε rectus est, recta quæ puncta Α, Ε conjungit, major est semidiametro Β Ε: quare si à puncto Α in angulo Α Β Ε aptetur recta linea ipsi semidiametro æqualis, inter puncta Β & Ε

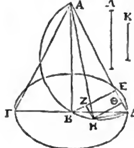
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ ὀρθῷ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μέγιστον ᾖ πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων· ὁ ἄξων τοῦ κώνου οὐκ ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ Α Γ Δ, μέγιστον ὂν πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων ἐκτὸς ἄξονος· λέγω ὅτι ἡ Α Β οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἐλάττων, καὶ ἤχθω ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ Γ Δ ἡ Β Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ Α Β Ε γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα τὰ Α, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς Β Ε· ἐὰν ἄρα ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ τὴν Α Β Ε γωνίαν ἐναρμοσθῇ, μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β καὶ Ε σημείων.

γεγράφθω περὶ αὐτὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τοῦ B κάθετος ἤχθω ἡ BE, καὶ ὡς ἡ K πρὸς Λ οὕτως ἔστω ἡ ZE πρὸς EB, καὶ διὰ τοῦ Z παράλληλος ἤχθω τῇ EΔ ἡ ZH, διὰ δὲ τοῦ H τῇ ZE παράλληλος ἡ HΘ· ἴση ἄρα ἡ ZE τῇ HΘ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ K πρὸς Λ οὕτως ἡ ZE πρὸς EB, τουτέστιν ἡ ΘH πρὸς BE, ὡς δὲ ἡ ΘH πρὸς BE οὕτως τὸ ὑπὸ HΘ, AΔ πρὸς τὸ ὑπὸ BE, AΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ HΘ, AΔ πρὸς τὸ ὑπὸ BE, AΔ οὕτως τὰ ἡμίση, τουτέστι τὸ AHΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ABΔ· ὡς ἄρα ἡ K πρὸς Λ οὕτως τὸ AHΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ABΔ· τὸ AHΔ ἄρα πρὸς τὸ ABΔ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἐὰν οὖν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐναρμόσωμεν διπλῆν τῆς HΔ, καὶ διὰ τῆς ἐναρμοσθείσης καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπίπεδον ἐκβάλλωμεν, ποιήσει τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ διπλάσιον τοῦ AHΔ· ἕξει ἄρα τὸ συνιστάμενον τρίγωνον πρὸς τὸ AΓΔ λόγον, ὃν τὸ AHΔ ἔχει πρὸς τὸ ABΔ, τουτέστιν ὃν ἡ K πρὸς Λ.



ABΔ rectangulum est, describatur circa ipsum semicirculus; atque à puncto B ducatur BE perpendicularis; & quam rationem habet K ad Λ eandem habeat ZE ad EB; deinde per Z ducatur ZH ipsi EΔ parallela, & per H ipsa HΘ parallela ipsi ZE: & erit ZE æqualis ipsi HΘ. itaque quoniam ut K ad Λ ita ZE ad EB, hoc est ΘH ad BE; ut autem ΘH ad BE ita est rectangulum sub HΘ & AΔ ad rectangulum sub BE & AΔ; & ut rectangulum sub HΘ & AΔ ad rectangulum sub BE & AΔ ita eorundem dimidia, videlicet triangulum AHΔ ad triangulum ABΔ; erit itaque ut K ad Λ ita AHΔ triangulum ad triangulum ABΔ: quare triangulum AHΔ ad ipsum ABΔ est in data ratione. si igitur in basi coni aptabimus rectam duplam ipsius HΔ, perque ipsam & verticem planum ducemus; faciet id in cono triangulum ipsius AHΔ duplum: quod quidem ad triangulum AΓΔ eandem rationem habebit quam AHΔ triangulum ad triangulum ABΔ, hoc est quam K habet ad Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, τῶν δὲ γινομένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἕν ὁποῖον ἴσον ἔστω τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ· ὁ τοῦ κώνου ἄξων ἐλάττων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Prop. IX. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur, & per axem & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem, unum aliquod æquale sit triangulo per axem: axis coni semidiametro basis minor erit.

est æqualis. sed B H minor est semidiametro B B; ergo A B coni axis semidiametro minor erit. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Quod autem demonstratum est in lineis parallelis Γ Δ, E Z; constabit etiam si non fuerint parallelæ: quippe cum [per 3.huj.] ostensum sit triangula bases æquales habentia inter se æqualia esse.

Prop. X. *Theor.*

Iisdem manentibus, demonstrandum est, si rursus planum ducatur conum per verticem secans, faciensque in basi rectam lineam, cujus magnitudo media sit inter bases æqualium triangulorum; triangulum illud utrisque triangulis æqualibus majus esse.

Sit, ut in antecedenti figura, triangulum per axem A Γ Δ æquale triangulo basim habenti E Z; & ducatur quælibet recta linea K M, cujus magnitudo sit inter Γ Δ, E Z; ponatur autem utrique earum parallela, & per ipsam & verticem planum ducatur: dico triangulum A K M utroque ipsorum A Γ Δ, A E Z majus esse.

Secetur enim rursus K M bifariam in Λ, & jungantur A Λ, B K, B Λ. itaque quoniam A Γ Δ triangulum æquale est triangulo A E Z: erit A B ipsi E H, hoc est dimidiæ ipsius E Z, æqualis, ut proxime demonstratum fuit. sed K Λ est major quam E H: ergo & K Λ ipsa A B major erit. ponatur B N æqualis ipsi K Λ,

νυ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ τοίνυν ἐδείχθη ἐπὶ παραλλήλων τῶν Γ Δ, E Z, φανερὸν ὡς, κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν, οὐδὲν διοίσει· ἐδείχθη γὰρ ὡς τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις τρίγωνα ἴσα ἐστί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον ὅτι ἐὰν διαχθῇ πάλιν ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιῇ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖαν τὸ μέγεθος μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν ἴσων τριγώνων· ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον μεῖζον ἔσται ἑκατέρου τῶν ἴσων τριγώνων.

Ἔστω γὰρ, ἐπὶ τῆς ὁμοίας καταγραφῆς, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ A Γ Δ ἴσον τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν E Z, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ K M μεγέθει μεταξὺ τῶν Γ Δ, E Z, καὶ ἑκατέρᾳ αὐτῶν κείσθω παράλληλος, καὶ διήχθω τὸ ἐπίπεδον· λέγω δὴ ὅτι τὸ A K M τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν A Γ Δ, A E Z.

Τετμήσθω γὰρ πάλιν δίχα ἡ K M τῷ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Λ, B K, B Λ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ A Γ Δ τρίγωνον τῷ A E Z τριγώνῳ, ἡ ἄρα A B τῇ E H τῇ ἡμισείᾳ τῆς E Z ἴση ἐστὶν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου συναπεδείχθη. μείζων δὲ ἡ K Λ τῆς E H· καὶ τῆς A B ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ K Λ. κείσθω οὖν τῇ K Λ ἴση ἡ

B N

κώνῳ ἴσον τῷ ΑΓΔ.

Ἤχθω τῇ ΓΔ ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἡ ΑΗ, ὑποτείνουσα μὲν τὴν ὑπὸ ΑΒΖ γωνίαν, ἴση δὲ οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, (τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ποιῆσαι) καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΓΔ ἤχθω ἡ ΘΗΚ· ἡ ΘΗΚ ἄρα κατὰ τὸ Η δίχα τέτμηται καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΒΖ. διεκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΘΚ, ΗΑ ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ ΑΘΚ τρίγωνον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει (ὀρθαὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ΘΗΒ, ΑΒΗ) περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς τε λοιπὰς ὀρθῆς ἐλάσσονας· ὅμοια ἄρα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ, ΗΑ, καὶ τὰ ἡμίσεα· τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

... triangulum triangulo ΑΓΔ æquale.

Ducatur in circulo per centrum recta ΕΒΖ ad rectos angulos ipsi ΓΔ. & quoniam ΑΒ minor est semidiametro basis, aptetur ΑΗ subtendens angulum ΑΒΖ, quæ semidiametro sit æqualis (quod quidem facile effici potest) deinde per Η ducatur ΘΗΚ ipsi ΓΔ parallela: ergo [per 3. 3.] ΘΗΚ ad Η bifariam secatur & ad ΕΒΖ est perpendicularis. ducatur juxta rectas ΘΚ, ΗΑ planum triangulum ΑΘΚ efficiens: dico ΑΘΚ triangulo ΑΓΔ æquale esse.

Jungatur enim ΒΘ, & quoniam ΑΗ est æqualis ipsi ΒΘ, erit ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΒ ad ΒΗ: quod cum duo triangula ΒΘΗ, ΗΑΒ unum angulum uni angulo æqualem habeant (sunt enim ΘΗΒ, ΑΒΗ utrique recti) & circa alios angulos latera proportionalia sint, reliquorum vero uterquo recto minor; erunt ΒΘΗ, ΗΑΒ triangula inter se similia: quare ut ΒΘ ad ΘΗ, hoc est ΓΔ ad ΘΚ, ita ΗΑ ad ΑΒ: & idcirco rectangulum quod fit sub ΓΔ & ΒΑ æquale est rectangulo sub ΘΚ & ΗΑ; proinde eorum dimidia, videlicet triangulum ΑΓΔ æquale erit triangulo ΑΘΚ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν δὲ γενομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων τινὸς ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση ᾖ τῇ ἡμι-

Prop. XII. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem secetur, & in uno triangulorum sectione factorum recta à vertice ad basim perpendicularis ducta æqualis sit dimidiæ

ad quadratum ex HZ ita AK ad KZ: recta igitur AΔ in partes æquales dividitur, AZ vero in partes inæquales. itaque quoniam id quod sub æqualibus partibus continetur majus est contento sub partibus inæqualibus; erit AΘΔ rectangulum majus rectangulo AKZ. sed rectangulo AΘΔ æquale est quadratum ex BΘ; & rectangulo AKZ æquale quadratum ex HK: quadratum igitur ex BΘ quadrato ex HK majus erit; idcircoque linea BΘ major quam HK. ut autem BΘ ad HK ita rectangulum sub BΘ, AΔ ad rectangulum sub HK, AZ; & ita dimidium ad dimidium, hoc est triangulum ABΔ ad triangulum AHZ: majus igitur est ABΔ triangulum triangulo AHZ, & eorundem dupla, videlicet triangulum AΓΔ majus triangulo AEZ. similiter ostendetur AΓΔ majus esse omnibus triangulis ipsi dissimilibus. quod erat demonstrandum.

αἱ ΔΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσί, καὶ ἡ μὲν εἰς ἴσα διῄρηται, ἡ δὲ εἰς ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων τμημάτων τοῦ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΘΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΚΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΘΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΗΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΘ τῆς ΗΚ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚ, ΑΖ, καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΗΖ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΖ, καὶ τὰ διπλάσια τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι πάντων τῶν ἀνομοίων μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. *Probl.*

Datum conum rectum, cujus axis sit minor semidiametro basis, plano per verticem ita secare, ut faciat triangulum majus omnibus triangulis dissimilibus in cono constitutis.

SIT datus conus rectus, cujus vertex quidem A punctum; basis circulus circa centrum B, axis vero AB minor semidiametro basis: & oporteat conum juxta præscriptum secare.

Ducatur planum per axem quod faciat triangulum AΓΔ, & erit AB perpendicularis & minor quam BΔ. deinde in plano circuli ducatur BE ad rectos angulos ipsi ΓB; & quo quadratum ex ΔB superat quadratum ex BA, ejus dimidium sit quadratum ex BH; perque

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθὸν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον μεῖζον εἶναι πάντων τῶν ἀνομοίων αὐτῷ ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος ὀρθὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, ἐλάττων ὢν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ὡς προστέτακται.

Ηχθω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· ἡ ΑΒ ἄρα κάθετος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΒΔ. ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τούτου ἥμισυ ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· καὶ διὰ τοῦ

Η παράλ-

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ Α Β· καὶ δέον ἔστω τὸν κῶνον τεμεῖν διὰ τῆς Α Β πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.

Εἰ μὲν οὖν ὀρθός ἐστιν ὁ κῶνος, δῆλον ὅτι ἥ τε Α Β πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει, καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς Α Β ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει· ὥστε τὸ Α Γ Δ τρίγωνον, διὰ τῆς Α Β ὄν, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει.

Ἀλλὰ δὴ σκαληνὸς ἔστω ὁ κῶνος· ἡ ἄρα Α Β οὐκ ἐστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. πιπτέτω τοίνυν ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Ε, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ τοῦ Α Β Ε τριγώνου ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ Α Γ Δ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ Α Γ Δ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ τοῦ κώνου βάσει. ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Ε κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς Α Ε ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὸ Α Γ Δ ἄρα τρίγωνον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT datus conus, cujus vertex A punctum, baſis circulus circa centrum B; axis vero A B: & oporteat conum ſecare ſecundum rectam A B ad rectos angulos ipſi baſi.

Si igitur conus ſit rectus, perſpicuum eſt rectam A B ad baſim perpendicularem eſſe; & ob id [per 18. 11.] omnia quæ per ipſam tranſeunt plana ad rectos angulos erunt: quare & triangulum A Γ Δ per lineam A B ductum ad rectos angulos erit ipſi baſi.

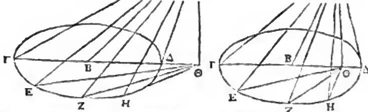
Sed ſit conus ſcalenus: ergo A B non eſt ad baſim perpendicularis. cadat à vertice A perpendicularis ad baſis planum in puncto E; & junctâ B E, producatur trianguli A B E planum, quod in cono ſectionem faciat triangulum A Γ Δ: dico A Γ Δ triangulum ad rectos angulos eſſe baſi coni. quoniam enim A E perpendicularis eſt ad baſis planum; & omnia quæ per ipſam A E tranſeunt plana eidem ad rectos angulos erunt: ergo & triangulum A Γ Δ ad rectos angulos erit plano baſis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τὸ γινόμενον τρίγω-

PROP. XV. *Theor.*

Si conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi: triangulum



Dico ΑΓ maximam esse rectarum omnium quæ à vertice ad basis circumferentiam ducuntur; ΑΔ vero minimam.

Ducantur enim ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, & jungantur ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ. itaque quoniam [per 7 & 8.3.] ΓΘ maxima est ex iis quæ à Θ in circumferentiam cadunt; erit quadratum ex ΘΓ majus quadratis ex ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΔ. commune apponatur quadratum ex ΘΑ; quadrata igitur ex utrisque ΓΘ, ΘΑ facta majora sunt eis quæ fiunt ex ΕΘ, ΘΑ; ΖΘ, ΘΑ; ΔΘ, ΘΑ; hoc est quadratum ex ΑΓ majus est quolibet è quadratis ex ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ: adeoque recta ΑΓ major est qualibet rectarum ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. similiter demonstrabitur etiam quavis alia majorem esse: igitur ΑΓ, uti diximus, maxima est omnium rectarum, quæ in ipso cono ducuntur. eadem ratione demonstrabitur rectam ΑΔ minimam esse. è cæteris vero ΑΕ major est quam ΑΖ, & ΑΖ major quam ΑΗ; & quæ propinquior est ipsi ΑΓ semper major est quam quæ ab eadem magis distat. quod erat demonstrandum.

Prop. XVI. *Theor.*

Si in triangulo recta linea ducatur à vertice ad punctum quod basim bi-

Λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΓ καὶ πασῶν ἁπλῶς μεγίστη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΔ ἐλαχίστη.

Ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΘ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ ἄρα μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ΓΘ, ΘΑ μεῖζόν ἐστιν ἑκάστου συναμφοτέρου τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΘ, ΘΑ· ΖΘ, ΘΑ· ΔΘ, ΘΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ ἑκάστου τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα μείζων ἐστὶν ἑκάστης τῶν ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ τῶν ἄλλων· μεγίστη ἄρα ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ὡς εἴρηται ἀγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ κώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται ὅτι καὶ ἡ μὲν ΑΔ ἐλαχίστη· τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΑΕ τῆς ΑΖ μείζων, ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΑΗ, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΑΓ τῆς ἀπώτερον ἐστὶ μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἀχθῇ τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν

πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ ἔλαττόν ἐστι τῷ αὐτῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΔ ad ΔΖ. æqualis autem est ΒΔ ipsi ΓΔ : ergo & ΕΔ æqualis est ipsi ΔΖ, & rectangulum ΑΔΕ rectangulo ΑΔΖ æquale; & duplum rectanguli ΑΔΕ duplo rectanguli ΑΔΖ. itaque quoniam [per 12. 2.] quadratum ex ΑΒ majus est quadratis ex ΑΔ, ΔΒ duplo rectanguli ΑΔΕ, hoc est duplo rectanguli ΑΔΖ; quadratum vero ex ΑΓ [per 13. 2.] minus est quadratis ex ΑΔ, ΔΓ duplo rectanguli ΑΔΖ : erunt quadrata ex ΒΑ & ΑΓ simul æqualia quadratis ex ΒΔ, ΔΓ una cum duplo quadrati ex ΑΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης. κἂν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης· ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην.

Prop. XVII. *Theor.*

Si prima quatuor rectarum ad secundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam; etiam quadratum primæ ad quadratum secundæ majorem habebit rationem quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ. quòd si quadratum primæ ad quadratum secundæ majorem rationem habeat quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ; prima quoque ad secundam majorem rationem habebit quam tertia ad quartam.

ΕΣΤΩΣΑΝ εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἐχέτω δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα διπλάσιος μείζων

SINT quatuor rectæ lineæ Α, Β, Γ, Δ; & habeat Α ad Β majorem rationem quam Γ ad Δ : dico quadratum ipsius Α ad quadratum ex Β majorem habere rationem quam quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ.

Etenim cum ratio Α ad Β major sit quam habet Γ ad Δ; erit dupla majoris rationis major quam dupla

rem habeat quam partium alterius major ad minorem, vel æqualis ad æqualem: prius dictarum partium major omnium maxima, minor vero omnium minima erit.

ἔλαττον, ἢ τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἴσον τῶν προειρημένων τμημάτων τὸ μὲν μεῖζον μέγιστον ἔσται τῶν τεσσάρων τμημάτων, τὸ δὲ ἔλασσον ἐλάχιστον τῶν τεσσάρων.

SINT duæ magnitudines æquales A B, Γ Δ, dividaturque A B in E & Γ Δ in Z; & sit A E major quam E B; & Γ Z non minor quam Z Δ, ita ut A E ad E B majorem rationem habeat quam Γ Z ad Z Δ: dico magnitudinum A E, E B, Γ Z, Z Δ maximam quidem esse A E, minimam vero E B.

Quoniam enim A E ad E B majorem rationem habet quam Γ Z ad Z Δ; componendo A B ad B E majorem habebit quam Γ Δ ad Δ Z; permutandoque A B ad Γ Δ majorem quam E B ad Z Δ. est autem A B ipsi Γ Δ æqualis; minor igitur est E B quam Z Δ. estque Z Δ non major quam Γ Z; quare est E B quam Γ Z minor. sed & erat minor quam A E; ergo E B minima erit. rursus quoniam A B est æqualis ipsi Γ Δ, quarum pars E B minor est parte Δ Z; erit reliqua E A major quam reliqua Γ Z. & Γ Z non est minor quam Z Δ: quare A E major est quam Z Δ. erat autem & major quam E B; adeoque A E omnium maxima erit, uti E B minima.

ΕΣΤΩ δύο μεγέθη ἴσα τὰ A B, Γ Δ, καὶ διῃρήσθω τὸ μὲν A B τῷ E, τὸ δὲ Γ Δ τῷ Z, ἔστω δὲ τὸ μὲν A E τοῦ E B μεῖζον, τὸ δὲ Γ Z τοῦ Z Δ μὴ ἔλαττον, ὥστε τὸ A E πρὸς E B μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ Γ Z πρὸς τὸ Z Δ· λέγω ὅτι τῶν A E, E B, Γ Z, Z Δ, μεγεθῶν μέγιστον μέν ἐστι τὸ A E, ἐλάχιστον δὲ τὸ E B.

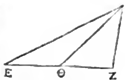
Ἐπεὶ οὖν τὸ A E πρὸς E B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ Z πρὸς Z Δ, καὶ συνθέντι ἄρα τὸ A B πρὸς B E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ Δ πρὸς Δ Z, καὶ ἐναλλὰξ τὸ A B πρὸς Γ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ E B πρὸς Z Δ. καί ἐστιν ἴσον τὸ A B τῷ Γ Δ· ἔλαττον ἄρα τὸ E B τοῦ Z Δ. τὸ δὲ Z Δ τοῦ Γ Z οὐ μεῖζον· καὶ τοῦ Γ Z ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ E B. ἦν δὲ καὶ τοῦ A E ἔλαττον· ἐλάχιστον ἄρα τὸ E B. πάλιν ἐπεὶ τὸ A B τῷ Γ Δ ἴσον, ὧν τὸ E B τοῦ Δ Z ἔλαττον· λοιπὸν ἄρα τὸ E A λοιποῦ τοῦ Γ Z μεῖζον. τὸ δὲ Γ Z τοῦ Z Δ οὐκ ἔλαττόν ἐστι· καὶ τοῦ Z Δ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ A E. ἦν δὲ καὶ τοῦ E B μεῖζον· μέγιστον ἄρα ἐστὶ τὸ A E, τὸ δὲ E B ἐλάχιστον.

PROP. XIX. *Theor.*

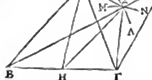
Si duo triangula bases æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως



ἀμφοτέρων τῶν ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσων μεγεθῶν, τοῦ τε συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ καὶ τοῦ συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τοῦ λοιποῦ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΕΔ, μέγιστον ὄν, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ, ἐλάχιστον ὄν, ἔλαττόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, διὰ τοῦ πρὸ τούτου θεωρήματος· καὶ ἡ μὲν ΕΔ ἄρα ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ μείζων ἐστίν. ἡ δὲ ΔΖ ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττων· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΕΔ γραφόμενος κύκλος ὑπερπεσεῖται τὴν ΒΑ. γεγράφθω ὁ ΚΛ, καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΔΖ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. γεγράφθω ὁ ΜΝ· τέμνουσι δὴ ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, ὡς δειχθήσεται. τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ· ἡ μὲν ἄρα ΒΞ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΔΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΒΞΓ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ ἴσον ἐστίν· ὥστε ἴση καὶ ἡ ΞΗ τῇ ΔΘ, τουτέστι τῇ ΑΗ· ὀξεῖα



quadratis ex E Θ, Θ Z una cum duplo quadrati ex Θ Δ æqualia funt quadrata ex B Δ, Δ Z: utraque igitur quadrata ex B A, A Γ utrifque quadratis ex E Δ, Δ Z æqualia erunt. & quoniam E Δ ad Δ Z majorem rationem habet quam B A ad A Γ; habebit quadratum ex E Δ ad quadratum ex Δ Z [per 17. huj.] majorem rationem quam quadratum ex B A ad quadratum ex A Γ. igitur cum duarum magnitudinum æqualium, videlicet ejus quæ conftat quadratis ex B A, A Γ & ejus quæ quadratis ex E Δ, Δ Z, major pars ad minorem, videlicet quadratum ex E Δ ad quadratum ex Δ Z, majorem rationem habeat quam reliqua pars ad reliquam, videlicet quam quadratum ex B A ad quadratum ex A Γ; erit quadratum ex E Δ, quod [per 18. huj.] eft maximum, utroque quadrato ex B A vel ex A Γ majus. quadratum vero ex Δ Z minimum erit, & utroque quadrato ex B A vel ex A Γ minus, per antecedens theorema: quare recta E Δ major eft utrâque ipfarum B A, A Γ; & Δ Z utrâque minor: circulus igitur, qui centro B & intervallo ipfi E Δ æquali defcribitur, videlicet K Λ, tranfibit ultra rectam B A; & circulus centro Γ intervalloque æquali ipfi Δ Z defcriptus, hoc eft M N, fecabit ipfam A Γ: qui quidem duo circuli K Λ, M N fefe invicem fecabunt, ut mox demonftrabitur. fecent autem fefe in puncto Ξ; & jungantur Ξ A, Ξ B, Ξ H, Ξ Γ: eft igitur B Ξ ipfi E Δ æqualis, & Ξ Γ æqualis ipfi Δ Z. eratque B Γ æqualis ipfi E Z; quare totum triangulum B Ξ Γ triangulo E Δ Z eft æquale; ac propterea Ξ H æqualis ipfi Δ Θ, hoc eft ipfi A H: unde

[ ] N consequitur

ΒΔ æqualis ΒΑΡ; ac ponatur ΓΣ ipsi ΔΖ æqualis, in directum ipsi ΒΓ: tota igitur ΒΣ æqualis est utrisque ΕΖ, ΖΔ. & quoniam ΕΖ, ΖΔ simul excedunt ipsam ΕΔ, erit & ΒΣ ipsâ ΕΔ major: itaque circulus centro Β & intervallo ΒΡ descriptus ipsam ΓΣ secabit. secet ad Τ, ac intra circulum ducatur recta quædam ΓΑ major quam ΓΣ sive ΔΖ; itaque circulus centro Γ & intervallo ΓΣ descriptus occurret ipsi ΑΓ. occurrat ad Ο: circulus igitur, per puncta Σ, Ο transiens, per circumferentiam ΡΤ transibit necessario; atque adeo circuli ΚΛ, ΜΝ sese invicem secabunt.

πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΑΡ, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ ΓΣ, ἐπ' εὐθείας οὖσα τῇ ΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΣ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος ἡ ΕΖ, ΖΔ τῆς ΕΔ μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ΒΣ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΡ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΓΣ. τεμνέτω κατὰ τὸ Τ, καὶ ἤχθω ἐντὸς τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις ἡ ΓΑ μείζων τῆς ΓΣ, τουτέστι τῆς ΔΖ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΣ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. τεμνέτω κατὰ τὸ Ο· ἥξει ἄρα ὁ διὰ τῶν Σ, Ο κύκλος καὶ διὰ τῆς ΡΤ περιφερείας· τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους καὶ οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι.

Prop. XX. *Theor.*

Si duo triangula, quorum latera inæqualia, bases æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad punctum quo bisecatur basis ducuntur: minoris trianguli majus latus ad minus majorem rationem habebit quam majoris trianguli majus latus ad minus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἀνισοσκελῆ τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας· τοῦ ἐλάττονος ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ μείζονος μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα.

SINT triangula ΑΒΓ, ΕΖΗ, bases ΑΓ, ΕΗ æquales habentia, quæ bifariam secentur in punctis Δ, Θ; & sint æquales ΒΔ, ΖΘ; sit autem majus triangulum ΕΖΗ; & sit ΑΒ major quam ΒΓ, itemque ΕΖ quam ΖΗ major: dico ΑΒ ad ΒΓ majorem habere rationem quam ΕΖ ad ΖΗ.

Si enim non ita sit, vel eandem rationem habebit, vel minorem. sit primum, si fieri potest,

ΕΣΤΩ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ἴσας ἔχοντα τάς τε ΑΓ, ΕΗ βάσεις, δίχα τετμημένας κατὰ τὰ Δ καὶ Θ σημεῖα, ἴσαι δὲ ἔστωσαν καὶ αἱ ΒΔ, ΖΘ καὶ μεῖζον τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΗ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι τὸν αὐτὸν ἢ ἐλάττονα ἕξει. ἔστω οὖν πρότερον, εἰ δυνατὸν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΕΖ

ἐπιπέδῳ ποιεῖν ἐν κώνῳ τρίγωνον ἰσοσκελές.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὸν ὡς ἐπιτέτακται. τετμήσθω πρῶτον διὰ τοῦ ἄξονος τῷ ΑΓΔ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ κάθετος, ἥτις πίπτει ἐπὶ τὴν ΓΔ βάσιν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ καὶ τῆς Α κορυφῆς ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τὴν ΕΖ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΗ. καὶ κοινὴ ἡ ΑΗ, καὶ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΗΕ, ΑΗΖ γωνιῶν· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΑΖ ἴση ἐστίν· ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον. ἐκ δὴ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι πάντα τὰ συνιστάμενα τρίγωνα, τὰς βάσεις ἔχοντα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἰσοσκελῆ ἐστιν.

Ἔτι δεικτέον ὅτι ἐὰν τὰ γινόμενα τρίγωνα τὰς βάσεις μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχῃ τῇ ΓΔ, οὐκ ἔσται ἰσοσκελῆ.

Ὑποκείσθω γὰρ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἡ ΕΖ μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ· αἱ ΕΗ, ΖΗ ἄρα ἄνισοί εἰσι. κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς· καὶ αἱ ἄρα ΕΑ, ΑΖ ἄνισοί εἰσι· τὸ ΕΑΖ ἄρα τρίγωνον οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές.

ticem ita secare, ut in cono triangulum æquicrure fiat.

SIT datus conus scalenus, cujus axis AB, & basis ΓΕΔ circulus: oporteatque eum modo jam dicto secare. secetur primo [per 14. huj.] per axem plano ΑΓΔ ad rectos angulos ipsi circulo ΓΕΔ, & ducatur perpendicularis AH, quæ cadet in rectam ΓΔ trianguli ΑΓΔ basim; ipsi vero ΓΔ ad rectos angulos agatur EZ in circuli plano; perque EZ & verticem A planum ducatur, quod faciat triangulum AEZ: dico triangulum AEZ æquicrure esse.

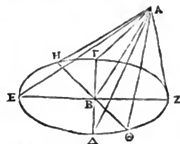
Jungantur enim EH, ZH. & quoniam ΓΔ ipsam EZ secans ad rectos angulos [per 3.3.] bifariam secat; erit EH æqualis ipsi HZ. communis autem est AH, & uterque angulorum AHE, AHZ rectus: ergo EA est æqualis ipsi AZ, & idcirco triangulum AEZ est æquicrure. unde constat omnia triangula, quæ bases habent ad rectos angulos ipsi ΓΔ, æquicrura esse.

Demonstrandum etiam est ea triangula, quæ bases habent non ad rectos angulos ipsi ΓΔ, non esse æquicrura.

Ponatur enim EZ, in eadem figura, non esse ad rectos angulos ipsi ΓΔ: & erunt EH, ZH inæquales. communis autem est AH & ad ipsas perpendicularis: ergo EA, AZ inæquales sunt, & triangulum EAZ non est æquicrure.

PROP.

major est quam A H, & Z A minor quam A Θ. itaque cum duo triangula A E Z, A H Θ bases E Z, H Θ æquales habeant, & eandem rectam A B quæ à vertice ad punctum basim bifariam secans ducitur, habeatque E A ad A Z majorem rationem quam H A ad A Θ: erit [per 19. huj.] A E Z triangulum minus triangulo A H Θ. simili modo demonstrabitur minus esse omnibus aliis triangulis per axem: ergo A E Z minimum est omnium triangulorum quæ per axem transeunt. rursus in triangulis A H Θ, A Γ Δ, & bases æquales sunt, & eadem est quæ ducitur à vertice ad punctum basim bifariam secans; habetque H A ad A Θ majorem rationem quam Γ A ad A Δ, sunt enim Γ A, A Δ æquales: ergo triangulum H A Θ [per 19. huj.] minus est triangulo Γ A Δ. similiter demonstrabitur omnia triangula per axem ducta triangulo Γ A Δ minora esse; triangulum igitur A Γ Δ maximum est omnium triangulorum quæ per axem transeunt, sicut A E Z minimum. quod erat demonstrandum. eodem modo demonstrabitur maximo propinquius majus esse eo quod plus distat.



φερειῶν ἀγομένων εὐθειῶν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ A Z· ἡ μὲν ἄρα E A τῆς A H μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ Z A τῆς A Θ ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ A E Z, A H Θ ἴσας ἔχει βάσεις τὰς E Z, H Θ, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τὴν αὐτὴν τὴν A B, καὶ μείζονα λόγον ἔχει ἡ E A πρὸς A Z ἤπερ ἡ H A πρὸς A Θ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ A E Z τοῦ A H Θ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· ἐλάχιστον ἄρα τὸ A E Z πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων. πάλιν ἐπεὶ τῶν A H Θ, A Γ Δ τριγώνων αἱ βάσεις ἴσαι, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡ αὐτὴ, καὶ ἔχει ἡ H A πρὸς A Θ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ A πρὸς A Δ, ἴσαι γὰρ αἱ Γ A, A Δ· τὸ H A Θ ἄρα τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ Γ A Δ τριγώνου. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τοῦ Γ A Δ ἐλάττονά ἐστι· μέγιστον ἄρα πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ A Γ Δ, ἐλάχιστον δὲ τὸ A E Z. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.

Prop. XXIII. *Probl.*

In dato cono scaleno à vertice ad circumferentiam basis rectam ducere, ad quam maxima rationem datam habeat: oportet autem datam rationem esse majoris ad minus, & minorem esse ea quam habet maxima rectarum in cono ductarum ad minimam.

SIT conus datus basim habens B Θ Γ circulum, cujus diameter B Γ, verticem vero punctum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐν τῷ δοθέντι κώνῳ σκαληνῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, πρὸς ἣν ἡ μεγίστη λόγον ἕξει δοθέντα· δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος μὲν εἶναι πρὸς ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ εἶναι τοῦ ὃν ἔχει ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῷ κώνῳ πρὸς τὴν ἐλαχίστην.

ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις ὁ B Θ Γ κύκλος καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ B Γ, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον.

Θ

ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, μεῖζον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ε· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μεῖζον, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς μὲν ΖΓ μείζων ἐστὶ, τῆς δὲ ΖΒ ἐλάττων. ἐνηρμόσθω τοίνυν τῷ κύκλῳ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΖ τῇ ΖΗ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΖΑ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑκατέρᾳ αὐτῶν· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΘΑ τῇ ΑΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Δ πρὸς Ε οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστί· καὶ ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΘ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν· ἡ ΑΘ ἄρα διῆκται, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΗ, quadratum autem ex Δ majus est quadrato ex Ε: quare quadratum ex ΒΑ quadrato ex ΑΗ majus; hoc est quadrata ex ΒΖ, ΖΑ simul majora sunt quadratis ex ΑΖ, ΖΗ simul. commune auferatur quadratum ex ΑΖ; ergo reliquum quadratum ex ΒΖ majus est quadrato ex ΖΗ: & ideo erit ΒΖ ipsa ΖΗ major. erat autem ΓΖ minor quam ΖΗ: quare ΖΗ major est quam ΖΓ, & minor quam ΖΒ. coaptetur igitur in circulo recta ΖΘ ipsi ΖΗ æqualis; & jungatur ΑΘ, itaque quoniam ΘΖ ipsi ΖΗ est æqualis, communis autem ΖΑ, & utrique ipsarum ad rectos angulos: erit basis ΘΑ æqualis basi ΑΗ. sed ut Δ ad Ε ita est ΒΑ ad ΑΗ, hoc est ΒΑ ad ΑΘ; estque Δ ad Ε in data ratione: ergo & ΒΑ ad ΑΘ in data ratione erit: ducta igitur est ΑΘ, ad quam ipsa ΒΑ rationem habet datam. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Τριγώνου δοθέντος σκαληνοῦ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένης εὐθείας, ἄλλο μεῖζον τρίγωνον συστήσασθαι, ὥστε ἴσην μὲν ἔχειν τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ τοῦ δοθέντος τριγώνου, λόγον δὲ ἔχειν πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ὃν εὐθεῖά τις μείζων πρὸς ἐλάττονα· δεῖ δὲ τὰς τοιαύτας εὐθείας λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλας μὴ μείζονα τοῦ

Prop. XXIV. *Probl.*

Dato triangulo scaleno, datâque eâ quæ à vertice ducta basim ejus bifariam secat; super eandem basim, ac eâdem à vertice ad bisectionem basis distantiâ, aliud majus triangulum construere, quod ad datum triangulum datam habeat rationem majoris ad minus: oportet autem rationem illam datam non majorem esse eâ

est ut Θ ad H ita E Δ ad A Z, & ut E Δ ad A Z ita rectangulum sub E Δ, B Γ ad rectangulum sub A Z, B Γ; [ergo ut Θ ad H ita rectangulum sub E Δ, B Γ ad rectangulum sub A Z, B Γ.] rectanguli autem sub E Δ, B Γ dimidium est triangulum E B Γ, & rectanguli sub A Z, B Γ dimidium est triangulum A B Γ: triangulum igitur B E Γ ad triangulum B A Γ eam rationem habet quam Θ ad H, hoc est datam.

Habeat deinde Θ ad H minorem rationem quam habet E Δ ad A Z; & fiat ut Θ ad H ita K Δ ad A Z, perque K ducatur K Λ ipsi Γ Δ parallela, & jungantur Λ B, Λ Γ. quoniam itaque ut Θ est ad H ita K Δ ad A Z; ut autem K Δ ad A Z ita B Λ Γ triangulum ad triangulum B A Γ: triangulum igitur B Λ Γ ad triangulum B A Γ datam habet rationem, videlicet quam habet Θ ad H; estque Λ Δ ipsi Δ A aequalis. quod erat faciendum.

ζευχθῶσιν αἱ Ε Β, Ε Γ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Α Ζ, ὡς δὲ ἡ Ε Δ πρὸς Α Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ Ε Δ, Β Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ζ, Β Γ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ Ε Δ, Β Γ ἥμισύ ἐστι τὸ Ε Β Γ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ Α Ζ, Β Γ ἥμισύ ἐστι τὸ Α Β Γ τρίγωνον· καὶ τὸ Β Ε Γ ἄρα πρὸς τὸ Β Α Γ λόγον ἔχει ὃν ἡ Θ πρὸς Η, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἀλλὰ δὲ ἐχέτω ἡ Θ πρὸς τὴν Η ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ Ε Δ πρὸς Α Ζ, γενέσθω δὲ ὡς ἡ Θ πρὸς Η οὕτως ἡ Κ Δ πρὸς Α Ζ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ Γ Δ παράλληλος ἤχθω ἡ Κ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Λ Β, Λ Γ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ Κ Δ πρὸς Α Ζ, ὡς δὲ ἡ Κ Δ πρὸς Α Ζ οὕτως τὸ Β Λ Γ τρίγωνον πρὸς τὸ Β Α Γ τρίγωνον· τὸ ἄρα Β Λ Γ πρὸς τὸ Β Α Γ τὸν ἐπιταχθέντα ἔχει λόγον τὸν τῆς Θ πρὸς Η, ἔχει δὲ καὶ τὴν Λ Δ ἴσην τῇ Δ Α. ὃ προσετάχθη ποιῆσαι.

Prop. XXV. *Probl.*

Datum conum scalenum secare per axem plano faciente in eo triangulum, ad minimum triangulorum per axem ductorum rationem datam habens: oportet autem datam rationem esse majoris ad minus, neque majorem eâ quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

SIT datus conus scalenus, cujus axis A B, basis circulus circa B centrum, minimum vero triangulorum per axem A Γ Δ: & opor-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ, ὃ τὸν δοθέντα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον, μείζονος ὄντα πρὸς ἔλαττον, μὴ μείζονα εἶναι τοῦ ὃν ἔχει τὸ μέγιστον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ἐλάχιστον.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ὁ ἄξων ὁ Α Β, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ Α Γ Δ· καὶ δέον

ἔστω

τῆς βάσεως τῇ ΚΑ, καὶ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΚΗΘ ὃν ἡ Ε πρὸς Ζ. τὸ δὲ συνιστάμενον τρίγωνον τὴν κορυφὴν ἕξει ἐπὶ τὰ τοῦ Η μέρη, ὡς δειχθήσεται. ἔστω δὴ τὸ ΜΗΘ, ὥστε τὴν ΜΗ πλευρὰν τῆς ΜΘ μείζονα εἶναι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΑ τῇ ΑΚ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΚΑΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΚΗ τῆς ΜΗ. ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΓΑ ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΑΔ, τῆς ΜΘ ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΑΔ τῆς ΜΗ ἐστὶν ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΗ τῆς μὲν μεγίστης τῶν ἐν τῷ κώνῳ τῆς ΑΓ ἐλάττων ἐστί, τῆς δὲ ἐλαχίστης τῆς ΔΑ μείζων· δυνατὸν ἄρα εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΜΗ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγαγεῖν, ὡς ἤδη μεμαθήκαμεν. ἤχθω δὴ καὶ ἔστω ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΒΞ, καὶ ἡ ΑΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΑΝ τῇ ΜΗ, ἡ δὲ ΝΒ τῇ ΗΛ, ἡ δὲ ΒΑ τῇ ΑΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΝΒ τρίγωνον τῷ ΜΗΑ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΑΗ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ ἄρα τῇ ὑπὸ ΜΑΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΑΜ, ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΑΘ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΑΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΜΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΜΗ, καὶ ἡ ΝΞ βάσις τῇ ΗΘ·

ſim bifariam ſecans ducitur ipſi K A æqualem; habenſque ad triangulum K H Θ rationem eandem quam E ad Z. erit autem conſtructi trianguli vertex ad partes H, ut mox demonſtrabitur. ſit autem illud triangulum M H Θ, ita ut latus M H ſit majus ipſo M Θ. quoniam igitur M A eſt æqualis ipſi A K, & A H communis, angulus autem K A H major angulo M A H; erit K H major ipſa M H. & eſt K H æqualis ipſi Γ A: ergo Γ A quam M H major erit. rurſus quoniam K Θ, hoc eſt A Δ, minor eſt quam M Θ, itemque M Θ minor quam M H; erit A Δ ipſa M H minor. itaque cum M H ſit minor quam A Γ maxima earum quæ in cono ducuntur, & major quam Δ A earundem minima; fieri poteſt ut à vertice A ad baſis circumferentiam ducatur recta æqualis ipſi M H, quemadmodum antea [ad 23. hujus] didicimus. ducatur ergo & ſit A N, junganturque N B Ξ, A Ξ. & quoniam A N eſt æqualis ipſi M H, & N B ipſi H Λ, & B A ipſi A M; erit totum A N B triangulum triangulo M H A æquale, angulusque A B N æqualis angulo M A H: quare & A B Ξ angulus ipſi M A Θ æqualis. rurſus quoniam A B eſt æqualis ipſi A M, & B Ξ ipſi A Θ, angulusque A B Ξ angulo M A Θ: erit & A Ξ æqualis ipſi M Θ. ſed A N æqualis erat ipſi M H, & baſis N Ξ baſi H Θ: triangulum igitur

quam M Θ ad Θ K, permutandoque H M ad M Θ majorem quam H K ad K Θ: triangulum igitur H M Θ [per 19. huj.] triangulo H K Θ est minus, quod fieri non potest; (supponebatur enim majus) quare triangulum H M Θ non ad partes Θ, sed ad eas ad quas est H, verticem habebit.

Μ Θ πρὸς Θ Κ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ Η Μ πρὸς Μ Θ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Κ πρὸς Κ Θ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Η Μ Θ τοῦ Η Κ Θ, ὅπερ ἀδύνατον· (ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον) οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει τὸ τρίγωνον· ἐπὶ τὰ τοῦ Η ἄρα μέρη ἕξει.

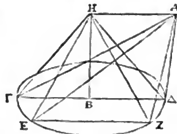
Prop. XXVI. *Theor.*

Si conus scalenus plano per axem secetur ad rectos angulos ipsi basi, & ea quæ à vertice facti trianguli ad basim perpendicularis ducitur non minor sit basis semidiametro: erit triangulum, quod ad rectos angulos est basi, majus quolibet alio extra axem in cono constituto, basimque habente basi dicti trianguli parallelam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τοῦ δὲ γενομένου τριγώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τρίγωνον μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, καὶ παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τριγώνου.

Conus enim, cujus vertex A, basis autem circulus circa B centrum, secetur plano per axem quod faciat A Γ Δ triangulum, ad rectos angulos basi coni; quæ vero à puncto A ad Γ Δ perpendicularis ducitur non sit minor semidiametro basis: dico triangulum A Γ Δ maximum esse è triangulis in cono constitutis ac bases habentibus ipsi Γ Δ parallelas.



Ducatur enim in circulo recta E Z parallela ipsi Γ Δ, super quam triangulum A E Z describatur; in plano autem trianguli A Γ Δ, & ad rectos angulos ipsi Γ Δ, erigatur B H, & ducatur A H eidem Γ Δ parallela: erit igitur B H æqualis ei quæ à puncto A ad Γ Δ perpendicularis cadit. itaque junctis H Γ, H Δ, H E, H Z, concipiatur conus cujus vertex H, axis H B, & basis circulus circa

Κῶνος γάρ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τετμήσθω διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον, πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Γ Δ κάθετος μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· λέγω ὅτι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ Γ Δ.

Διήχθω γὰρ ἐν τῷ κύκλῳ παράλληλος τῇ Γ Δ ἡ Ε Ζ, ἐφ' ἧς τὸ Α Ε Ζ τρίγωνον, ἐν δὲ τῷ τοῦ Α Γ Δ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω τῇ Γ Δ ἡ Β Η, καὶ τῇ Γ Δ παράλληλος ἡ Α Η· ἡ Β Η ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Γ Δ καθέτῳ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ Η Γ, Η Δ, Η Ε, Η Ζ· νοηθήσεται δὴ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Η, ἄξων δὲ ἡ Η Β, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον

ἔλαττον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, ἔλαττον ἔσται καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ· εἰ δὲ μεῖζον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, μεῖζον καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ· εἰ δὲ ἴσον καὶ ἴσον ὁμοίως.

quidem uti demonſtravimus, [ad 10. huj.] & eo majora triangula, & minora, & æqualia conſtitui poſſunt. quod ſi triangulum ΗΓΔ minus ſit triangulo ΗΕΖ, & ΑΓΔ triangulum triangulo ΑΕΖ minus erit; & ſi majus, majus; & ſi æquale ſimiliter æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν ἐν σκαληνῷ κώνῳ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἰσοσκελῶν τῶν συνισταμένων ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in cono ſcaleno planis per verticem ſecto, ſuper baſes parallelas triangula æquicrura fiant, ſitque axis coni non minor ſemidiametro baſis: triangulum æquicrure per axem tranſiens majus erit quovis æquicruri ad eam partem ad quam axis inclinat conſtituti.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ τριγώνου διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς, ὥστε τὴν ΑΒ ἐπὶ τὰ Δ μέρη προσνεύειν, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τὸ διὰ τῆς ΑΒ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι τῶν γενομένων ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων.

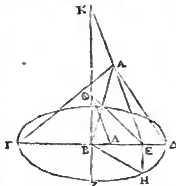
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ δὴ ΒΑ τῆς ΑΕ ἤτοι ἐλάττων

SIT conus cujus axis ΑΒ, baſis circulus circa Β centrum, baſis vero trianguli per axem conſtituti ad rectos angulos ipſi circulo ſit ΓΒΔ; & angulus ΑΒΔ minor ſit angulo recto, ita ut ΑΒ ad partes Δ inclinet; ſitque ΑΒ non minor ſemidiametro baſis: dico triangulum æquicrure per ΑΒ tranſiens majus eſſe æquicruribus omnibus inter puncta Β, Δ baſes habentibus.

Sumatur enim utcunque in recta ΒΔ punctum Ε, & ipſi ΓΔ ad rectos angulos ducantur in circulo ΒΖ, ΕΗ, & jungatur ΑΕ. itaque ΒΑ vel minor

[illegible] A B E recta B Θ perpendicularis ipſi [illegible], ipſique E H ſit æqualis, & jungantur Θ E, B H. cum igitur angulus A B E angulo A E B ſit major, erit angulus A E B minor recto. rectus autem eſt Θ B E: ergo rectæ Θ B, A E productæ inter ſe convenient. conveniant ad punctum K: & per Θ ducatur Θ Λ ipſi K B parallela. itaque quoniam Θ B eſt æqualis ipſi E H, communis autem B E, & angulos æquales continent, videlicet rectos; erit B H ipſi Θ E æqualis. rurſus quoniam rectus eſt angulus Θ B Λ, recta Θ E major erit quam Θ Λ; adeoque B Θ ad Θ E minorem rationem habebit quam eadem B Θ ad Θ Λ. ut autem B Θ ad Θ Λ ita B K ad K E; quare B Θ ad Θ E minorem habet rationem quam B K ad K E. ſed B K ad K E habet minorem quam B A ad A E, ut in 29[no] theoremate oſtendetur; igitur B Θ ad Θ E multo minorem habebit rationem quam B A ad A E: ergo B A ad A E majorem rationem habet quam B Θ ad Θ E, hoc eſt quam E H ad H B ſive ad B Z. quoniam vero B A ad A E majorem habet rationem quam E H ad B Z, erit rectangulum A B Z majus rectangulo A E H. ſed rectangulo A B Z æquale eſt triangulum æquicrure per axem, & rectangulo A E H æquale eſt triangulum æquicrure per A E, cujus baſis ſit dupla ipſius E H: majus igitur eſt triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per A E tranſeunte. eadem ratione demonſtrabitur majus aliis omnibus, quorum baſes inter puncta B, Δ habentur. quod erat demonſtrandum.

τῷ ὑ Α Β Ε τριγώνου ἐπιπέδῳ τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς ἡ Β Θ, ἴση οὖσα τῇ Ε Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ Ε, Β Η. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ Α Β Ε γωνία τῆς ὑπὸ Α Ε Β μείζων ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ Α Ε Β ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ Θ Β Ε· αἱ ἄρα Θ Β, Α Ε εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ Κ Ε παράλληλος ἡ Θ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ Θ Β τῇ Ε Η, κοινὴ δὲ ἡ Β Ε, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ὀρθαὶ γάρ· ἴση ἄρα καὶ ἡ Β Η τῇ Θ Ε. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ Θ Β Λ, μείζων ἄρα ἡ Θ Ε τῆς Θ Λ· ἡ Β Θ ἄρα πρὸς Θ Ε ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Θ πρὸς Θ Λ. ἀλλ' ὡς ἡ Β Θ πρὸς Θ Λ οὕτως ἡ Β Κ πρὸς Κ Ε· ἡ ἄρα Β Θ πρὸς Θ Ε ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Κ πρὸς Κ Ε. ἡ δὲ Β Κ πρὸς Κ Ε ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Α πρὸς Α Ε, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς δείκνυται· πολλῷ ἄρα ἡ Β Θ πρὸς Θ Ε ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Α πρὸς Α Ε· ἡ ἄρα Β Α πρὸς Α Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Θ πρὸς Θ Ε, τουτέστιν ἤπερ ἡ Ε Η πρὸς Η Β, τουτέστι πρὸς Β Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ Β Α πρὸς Α Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ε Η πρὸς Β Ζ, τὸ ἄρα ὑπὸ Α Β, Β Ζ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Α Ε, Ε Η. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ Α Β, Β Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς, τῷ δὲ ὑπὸ Α Ε, Ε Η ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τῆς Α Ε καὶ τῆς διπλῆς τῆς Ε Η ἰσοσκελές· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τῆς Α Ε ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ τῶν ὧν αἱ βάσεις μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



Prop. XXIX. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad hypotenuſam recta quædam

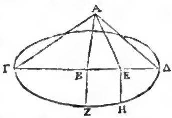
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ ἀχθεῖσα

σκαλῆ τρίγωνα συςῇ, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶ δὲ γινομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁποῖον ἴσον ᾖ τῷ διὰ τῆ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· ἡ ἀπὸ τῆ κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τῆ τριγώνε κάθετος μείζων ἐςὶ τῆ ἄξονος.

triangula habeantur, ad eam partem ad quam axis inclinat, & dictorum triangulorum unum aliquod æquale sit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à vertice ad basim trianguli perpendicularis ducitur, ipso axe major erit.

ΕΣΤΩ σκαληνὸς κῶνος, ἧ κορυφὴ τὸ Α, ἄξων ἢ ὁ ΑΒ προσνεύων ἐπὶ τὰ τῆ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τῆ ἢ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τῆ ἄξονος τριγώνε βάσις ἔςω ἡ ΓΒΔ, κὶ ἤχθωσαν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, κὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, κὶ ὑποκείσθω τὸ διὰ τῶ ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι τῷ διὰ τῶ ΑΒ, ΒΖ, τετέςι τῷ διὰ τῆ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΕ μείζων ἐςὶ τῆς ΑΒ.



Ἐπεὶ τὸ διὰ τῶ ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐςὶ τῷ διὰ τῶ ΑΒ, ΒΖ, κὶ τὸ ὑπὸ τῶ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ· ὡς ἄρα ἡ ΒΖ πρὸς ΕΗ ὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΖ τῆ ΕΗ· μείζων ἄρα κὶ ἡ ΕΑ τῆ ΑΒ.

SIT conus scalenus cujus vertex A, axis AB ad partes Δ inclinans, & basis circulus circa centrum B; basis autem trianguli per axem ad rectos angulos circulo sit ΓBΔ, & ad ipsam ΓΔ perpendiculares BZ, EH in circulo ducantur, jungaturque AE; & ponatur triangulum æquicrure per AE, EH transiens æquale esse triangulo per AB, BZ, hoc est triangulo æquicruri per axem: dico AE majorem esse ipsa AB.

Quoniam enim triangulum æquicrure per AE, EH æquale est triangulo per AB, BZ; erit rectangulum AEH æquale rectangulo ABZ: ut igitur [per 14. 6.] BZ ad EH ita EA ad AB. sed BZ est major quam EH; ergo & EA quam AB major erit.

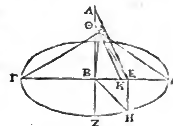
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆ κορυφῆς ἐπιπέδοις ποιῇ, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσο-

Prop. XXXI. *Theor.*

Si, cono scaleno per verticem planis secto, super bases parallelas æquicrura

stratum est, angulus BEA minor erit recto. rectus autem est ΘBE: ergo ΘB, EA productæ inter se convenient. conveniant in Θ. cum igitur triangulum æquicrure per axem sit æquale rectangulo ABZ, triangulum vero æquicrure per AE & duplam ipsius EH æquale sit rectangulo AEH; & sint triangula æquicrura inter se æqualia; erit rectangulum ABZ rectangulo AEH æquale: adeoque ut BA ad AE ita HE ad ZB, hoc est ad HB. sed BA ad AE majorem habet rationem quam BΘ ad ΘE, per vigesimam nonam hujus: ergo ut BA ad AE ita BΘ ad minorem quam ΘE, ad majorem vero quam ΘB. fit ut BA ad AE ita BΘ ad ΘK; & coaptetur ΘK sub angulo ΘBE; & per E ducatur EΛ parallela ipsi KΘ, conveniensque cum BΘ in Λ. itaque quoniam BA est ad AE sicut BΘ ad ΘK, hoc est BΛ ad ΛE; ut autem BA ad AE ita EH ad HB; erit ut BΛ ad ΛE ita EH ad HB. quoniam igitur duo triangula ΛBE, HEB unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum; circa alios autem angulos qui ad Λ, H latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum uterque est acutus: ergo [per 7. 6.] triangula ΛBE, HEB inter se similia sunt, & erit ut ΛB ad BE ita HE ad EB: quare ΛB ipsi HE est æqualis. minor autem est EH semidiametro basis; quare & BΛ semidiametro basis minor erit. & quoniam [per 21. 1.] utræque EΛ, ΛB simul majores sunt utrisque EA, AB simul; atque est ut EΛ ad ΛB ita EA ad AB: componendo igitur ut utræque EΛ, ΛB simul ad BΛ ita utræque EA, AB simul ad BA, permutandoque. sed majores sunt utræque EΛ, ΛB utrisque EA, AB: quare & ΛB major erit quam BA. ostensa

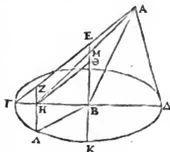


τῷ ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΕΑ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ, τὸ δὲ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ, καὶ ἔστιν ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἰσοσκελῆ· καὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΖΒ, τουτέστι πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, διὰ τὸ κθʹ. θεώρημα· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ἐλάττονα μέν τινα τῆς ΘΕ, μείζονα δὲ τῆς ΘΒ. ἔστω δὴ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, καὶ ἐνηρμόσθω ἡ ΘΚ ὑπὸ τὴν ΘΒΕ γωνίαν, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΚΘ ἤχθω ἡ ΕΛ συμπίπτουσα τῇ ΒΘ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΑΕ. ἦν δὲ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει, (ὀρθογώνια γάρ) περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς Λ, Η τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέρα ὀξεῖα· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ΗΕ πρὸς ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ΛΒ τῇ ΗΕ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἐλάττων ἄρα ἡ ΛΒ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΒ μείζων ἐστὶ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΒ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ πρὸς ΒΛ οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΑ, ΑΒ πρὸς ΒΑ, καὶ ἐναλλάξ. μείζων δὲ συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΒ τῆς ΒΑ. ἐδεί-

χθη

ἤχθωσαν δὴ πάλιν ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΚΒ, ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τὰ ΘΗΒ, ΛΒΗ ἴσας ἔχει γωνίας τὰς ὀρθάς, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰς λοιπὰς τῶν προτιέσσαις· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ δὲ ΗΜ πρὸς ΜΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ, τουτέστιν ἡ ΒΚ, πρὸς ΛΗ· ἡ ἄρα ΒΚ πρὸς ΛΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΚ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΛ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΗ ἰσοσκελοῦς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΛΗ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἐλάχιστόν ἐστι πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων ἰσοσκελῶν.

Η Θ est æqualis; est igitur Η Θ æqualis semidiametro basis. denique in circuli plano ducantur ΚΒ, ΗΛ ad rectos angulos ipsi ΓΔ, & jungatur ΒΛ. quoniam igitur duo triangula orthogonia ΘΗΒ, ΛΒΗ æquales habent rectos angulos, & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque est acutus; erunt [per 7. 6.] ea triangula inter se similia: & ideo ut ΗΘ ad ΘΒ ita ΒΛ ad ΛΗ. habet autem ΗΘ ad ΘΒ [per 2.huj.] majorem rationem quam ΗΜ ad ΜΒ; & ΗΜ ad ΜΒ item majorem quam ΗΑ ad ΑΒ: ergo ΗΘ ad ΘΒ majorem rationem habebit quam ΗΑ ad ΑΒ. sed ut ΗΘ ad ΘΒ, ita ΒΛ sive ΒΚ ad ΛΗ: quapropter ΒΚ ad ΛΗ majorem habet rationem quam ΗΑ ad ΑΒ: rectangulum igitur ΑΒΚ [per 1. huj.] majus est rectangulo ΑΗΛ, hoc est triangulum æquicrure per axem majus triangulo æquicruri per ΑΗ, cujus basis est ipsius ΛΗ dupla: quare triangulum æquicrure per axem non minus est omni ejusmodi triangulo inter puncta Β, Γ basin habente.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δύο τρίγωνα συστῇ, καὶ τοῦ μὲν ἑτέρου ἡ πλευρὰ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει, τοῦ δὲ ἑτέρου πρὸς ἀμβλεῖαν, τὸ δὲ τοῦ ἀμβλυγω-

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si super eandem basin duo triangula constituantur, & unius quidem latus sit ad rectos angulos basi, alterius vero ad angulos obtusos, sitque

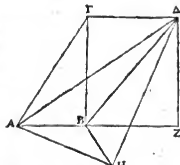
ΑΓ: ergo descriptus circa ipsam semicirculus rectam ΑΔ secabit. secet in Ε, & jungatur ΕΒ: erit igitur angulus ΑΕΒ [per 21. 3.] æqualis angulo ΑΓΒ. sed angulus ΑΕΒ [per 16. 1.] est major ipso ΑΔΒ: ergo ΑΓΒ angulus angulo ΑΔΒ major erit.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Iisdem positis, si trianguli orthogonii angulus ad verticem non major sit eo qui continetur sub recta vertices triangulorum conjungente & latere amblygonii quod obtusum angulum cum basi efficit: ea quæ in triangulo orthogonio subtendit angulum rectum ad eam quæ est ad rectos angulos basi minorem habet rationem quã quæ subtendit angulum obtusum in amblygonio ad eam quæ cum basi facit angulum obtusum.

Describantur triangula, & sit ΑΓΒ angulus non major angulo ΓΔΒ: dico ΑΓ ad ΓΒ minorem habere rationem quàm ΑΔ ad ΔΒ.

Quoniam enim angulus ΑΓΒ major est angulo ΑΔΒ (ut [in anteced.] ostensum fuit) & angulus ΓΑΒ major angulo ΔΑΒ, constituatur ipsi quidem angulo ΑΓΒ æqualis angulus ΑΔΗ, angulo autem ΓΑΒ æqualis ΔΑΗ: erunt itaque triangula ΑΓΒ, ΑΔΗ æquiangula & similia: quare ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΗΑ ad ΑΒ; & continent æquales angulos: juncta igitur ΒΗ, triangulum ΔΑΓ [per 6. 6.] triangulo ΗΑΒ simile erit, & angulus ΑΓΔ angulo ΑΒΗ æqualis. quo-



… Α Δ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία μὴ μείζων ᾖ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει· ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

Καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τρίγωνα, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ μὴ μείζων τῆς ὑπὸ ΓΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἐδείχθη, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ, συνεστάτω τῇ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΗ τρίγωνα καὶ ὅμοια· ὡς ἄρα ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ, ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση ἐστί. ἐπεὶ

ἐν

ΓΒΔ, οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ΑΔ ἄρα πρὸς ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΓΒΔ, non majores duobus rectis; adeoque ΑΒΔ, ΑΒΗ non sunt majores tribus rectis; proinde ΔΒΗ non est recto minor: ΗΔ igitur major est quam ΔΒ, & idcirco ΑΔ ad ΔΗ, hoc est ΑΓ ad ΓΒ, minorem habet rationem quam ΑΔ ad ΔΒ. quod erat demonstrandum.

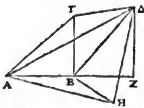
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων τῶν ἄλλων, ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει· ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία μείζων ἐστὶ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

Prop. XXXV. *Theor.*

Cæteris manentibus, si in triangulo orthogonio, quæ subtenditur angulo recto ad eam quæ est ad rectos angulos basi majorem rationem habeat, quam quæ subtenditur angulo obtuso in amblygonio ad eam quæ est ad angulum obtusum: angulus ad verticem orthogonii major est angulo sub rectâ vertices triangulorum jungente & eâ quæ cum basi est ad angulum obtusum.

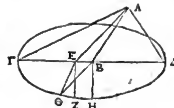
ΚΕΙΣΘΩ ἡ αὐτὴ καταγραφὴ, τῶν αὐτῶν κατεσκευασμένων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ· καὶ ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς μιᾶς· λοι-



Ponatur eadem figura, iisdem constructis. quoniam itaque ΑΓ ad ΓΒ majorem rationem habet quam ΑΔ ad ΔΒ; ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΔ ad ΔΗ; habebit ΑΔ ad ΔΗ majorem rationem quam ΑΔ ad ΔΒ; & ob id minor erit ΗΔ quam ΔΒ: angulus igitur ΔΒΗ minor erit recto: quare reliqui ΑΒΔ, ΑΒΗ tribus

SIT conus, cujus axis A B, & basis circulus circa B centrum; plani vero per axem ad rectos angulos circulo, & ipsius circuli communis sectio sit Γ B Δ; sitque angulus A B Δ recto minor: dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurum, quæ bases habent inter puncta, Γ, B, neque maximum esse, neque minimum.

Vel enim axis est minor basis semidiametro, vel major, vel ipsi æqualis. sit primum minor. & quoniam A B minor est semidiametro basis, aptetur A E æqualis semidiametro; perque puncta B & E ducantur in circulo E Z, B H ad rectos angulos ipsi Γ Δ: & angulo A E B æqualis fiat angulus E B Θ, & jungatur Θ E. quoniam igitur utraque A E, B Θ æqualis est semidiametro, communis autem B E, & continent æquales angulos; reliqua quoque [per 6. 6.] erunt æqualia & triangula inter se similia; quapropter ut E A ad A B ita B Θ ad Θ E. & quoniam [per 7. 3.] Z E major est quam E Θ, æquales autem B H, B Θ; habebit B Θ ad Θ E majorem rationem quam B H ad Z E. sed ut B Θ ad Θ E ita E A ad A B: quapropter E A ad A B majorem rationem habet quam B H ad E Z; & idcirco [per 1. huj.] rectangulum A E Z majus est rectangulo A B H, hoc est triangulum æquicrure per A E, cujus basis est dupla ipsius E Z, majus est triangulo æquicruri per axem: triangulum igitur æquicrure per axem non est omnium ejusmodi triangulorum maximum. sed ostensum est universim, in trigesimâ secundâ hujus, non minimum esse; quare neque maximum omnium, neque minimum est.



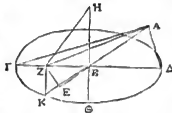
ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ ἄξων ὁ Α Β, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς γωνίας τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ Γ Β Δ, ἡ δὲ ὑπὸ Α Β Δ ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν, τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων, οὔτε μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

Ὁ δὲ ἄξων ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἢ ἴσος αὐτῇ, ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ Α Β ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ Α Ε, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Ε σημείων τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ Ε Ζ, Β Η, καὶ τῇ ὑπὸ Α Ε Β ἴση συνεστάτω ἡ Ε Β Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θ Ε. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν Α Ε, Β Θ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ Β Ε, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς ἴσα· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ Ε Α πρὸς Α Β οὕτως ἡ Β Θ πρὸς Θ Ε. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ Ζ Ε τῆς Ε Θ, ἴσαι δὲ αἱ Β Η, Β Θ· ἡ ἄρα Β Θ πρὸς Θ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Η πρὸς Ζ Ε. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Β Θ πρὸς Θ Ε οὕτως ἡ Ε Α πρὸς Α Β· ἡ ἄρα Ε Α πρὸς Α Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β Η πρὸς Ε Ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ Α Ε, Ε Ζ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Α Β, Β Η, τουτέστι τὸ διὰ τῆς Α Ε ἰσοσκελὲς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς Ε Ζ, τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων τριγώνων. ἐδείχθη δὲ (ἐν τῷ τριακοστῷ δευτέρῳ) καθόλου, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

ΠΡΟ-

ἡ ΕΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου) καὶ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΘ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ (ἐν ᾧ καὶ ἡ ΑΕ) τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΖ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΗ, καὶ ὑποτεινέτω τὴν ὑπὸ ΖΒΗ γωνίαν ἡ ΖΗ εὐθεῖα, ἴση συσταθεῖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΒΕ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς ἡμισείας, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε· ἡ ἄρα ΒΕ τῆς ΕΖ μείζων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ, ΕΒ, ὧν μεῖζον τὸ ἀπὸ ΕΒ τοῦ ἀπὸ ΖΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΒ ἔλαττόν ἐστι ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΒΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΖΒ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΒΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΒ ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ἀπὸ ΑΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι



rationem quam ZA ad AB: & propterea [per 1.huj.] rectangulum ABΘ minus est rectangulo AZH, hoc est triangulum æquicrure per axem minus triangulo æquicruri per AZ. igitur triangulum æquicrure per axem omnium ejusmodi triangulorum maximum non erit.

Sit deinde angulus ABΔ minor medietate recti; & producatur AB usque ad E, ita ut BE sit æqualis dimidio semidiametri; in plano autem ad circulum recto, in quo est AE, ducatur EZ ad ipsam AE perpendicularis, & BH perpendicularis ad ΓΔ, & angulo ZBH subtendatur ZH æqualis semidiametro, jungaturque ZA. Quoniam igitur angulus ABΔ, hoc est ZBE, minor est semirecto, rectus autem qui ad E, erit BE major quam EZ: & quoniam quadratum ex ZB æquale est quadratis ex ZE, EB; quorum quidem quadratum ex EB majus est quadrato ex ZE: quadratum igitur ex ZB minus est quam duplum quadrati ex BE; & propterea quadratum ex ZH majus quam duplum quadrati ex ZB: quadratum igitur ex ZH minus erit quam duplum reliqui quadrati ex BH. & quoniam EB dimidia est semidiametri; quod bis continetur sub AB, BE æquale est quadrato ex BA. sed [per 12.2.] quadratum ex ZA est æquale quadratis ex AB, BZ unà cum duplo rectanguli ABE; duplum vero rectanguli ABE æquale est quadrato ex AB: quadratum igitur ex ZA duplo quadrati ex AB & quadrato ex BZ æquale erit: ergo quadratum ex ZA majus est quam duplum

DENIQUE sit axis A B semidiametro major, & in plano ad circulum recto ducatur A E ad Γ Δ perpendicularis, quæ vel minor erit semidiametro, vel non minor. sit primum minor; perque A ducatur A Z ipsi Γ Δ parallela; & per B recta B Z parallela ipsi A E; & constituatur angulus B Z H non major angulo Z A B, jungaturque H A. rursus ex jam demonstratis [ad 34.huj.] Z H ad Z B minorem rationem habebit quam H A ad A B. itaque quoniam Z B æqualis ipsi A E est minor semidiametro, & Z H major quam Z B; erit Z H vel major semidiametro, vel minor, vel æqualis. sit primum æqualis: si igitur in circulo ducantur H Λ, B M ad ipsam Γ Δ perpendiculares, ut superius factum est; & jungatur B Λ: per ea quæ sæpius demonstrata sunt, habebit H A ad A B majorem rationem quam B M ad H Λ: quare triangulum æquicrure per A H, H Λ majus est triangulo æquicruri per axem.

Si vero Z H sit minor semidiametro, fiat H N semidiametro æqualis. & quoniam H A ad A B majorem rationem habet quam H Z ad Z B; H Z vero ad Z B majorem habet quam H N ad N B: habebit H A ad A B majorem rationem quam H N ad N B, hoc est quam B M ad H Λ; adeoque triangulum æquicrure per A H, H Λ triangulo æquicruri per axem majus erit.

At si Z H sit semidiametro major, ducatur Z Ξ ipsi æqualis. quoniam igitur Ξ Z B angulus

ΕΣΤΩ δὲ νῦν ὁ Α Β ἄξων μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν Γ Δ ἡ Α Ε, ἡ δὲ Α Ε ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν Γ Δ ἤχθω ἡ Α Ζ, διὰ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν Α Ε ἡ Β Ζ, καὶ συνεστάτω ἡ ὑπὸ Β Ζ Η μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ Ζ Α Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Η Α. πάλιν ἄρα, διὰ τὰ δειχθέντα, ἡ Ζ Η πρὸς Ζ Β ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Α πρὸς Α Β. ἐπεὶ οὖν ἡ Ζ Β, ἴση οὖσα τῇ Α Ε, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ Ζ Η τῆς Ζ Β· ἡ ἄρα Ζ Η ἤτοι μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάττων, ἢ ἴση. ἔστω πρῶτον ἴση. ἐὰν οὖν πάλιν κατὰ τὸ εἰωθὸς ἐν τῷ κύκλῳ τῇ Γ Δ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὰς Η Λ, Μ Β, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν Β Λ· διὰ τὰ δειχθέντα πολλάκις, ἡ Η Α πρὸς Α Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ Β Μ πρὸς Η Λ· ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν Α Η, Η Λ ἰσοσκελὲς μεῖζον ἔσται τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

Εἰ δὲ ἡ Ζ Η ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ Η Ν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ Η Α πρὸς Α Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Ζ πρὸς Ζ Β, ἡ δὲ Η Ζ πρὸς Ζ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Ν πρὸς Ν Β· καὶ ἡ ἄρα Η Α πρὸς Α Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Ν πρὸς Ν Β, τουτέστιν ἤπερ ἡ Β Μ πρὸς Η Λ. καὶ οὕτως τὸ διὰ τῶν Α Η, Η Λ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζον ἔσται.

Εἰ δὴ ἡ Ζ Η μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διήχθω ἡ Ζ Ξ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ Ξ Ζ Β οὐ

μείζων

ἡ ΘΗ ἄρα ἤτοι ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάσσων, ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ὡς δὲ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

æqualis semidiametro, vel minor, vel major. sit primum æqualis; & ducantur in circulo HK, BΛ ad rectos angulos ipsi ΓΔ. cum igitur HA ad AB majorem habeat rationem quam HΘ ad ΘB, & ut HΘ ad ΘB ita BΛ ad HK; HA ad AB majorem rationem habebit quam BΛ ad HK: ergo triangulum æquicrure per AH triangulo æquicruri per axem majus erit.

Εἰ δὲ ἡ ΘΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

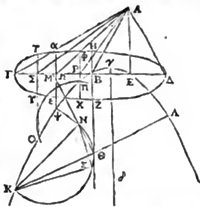
Si vero ΘH sit minor semidiametro, sit semidiametro æqualis HM. itaque quoniam HA ad AB majorem habet rationem quam HΘ ad ΘB, & HΘ ad ΘB item majorem quam HM ad MB, hoc est BΛ ad HK: habebit HA ad AB majorem rationem quam BΛ ad HK: quare majus erit triangulum æquicrure per AH triangulo per axem æquicruri.

Εἰ δὲ ἡ μείζων ἡ ΗΘ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΘΝ ἐνηρμοσμένη ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΑ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ αἱ ΒΛ, ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΝΘΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, ἡ ἄρα ΝΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΝΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ

Quod si HΘ major sit semidiametro, aptetur ΘN semidiametro æqualis; jungaturque NA: & in circulo rursus ipsi ΓB ad rectos angulos ducantur BΛ, NΞ. quoniam igitur NΘB angulus non est major angulo ΘAB, NΘ ad ΘB minorem habet rationem quam NA ad AB, ut autem NΘ ad ΘB ita BΛ ad

triangulum per axem circulo basis rectum sit Α Γ Δ : & oporteat conum plano per verticem transeunte ita secare, ut faciat in superficie ejus triangulum æquicrure æquale triangulo dato; vel, quod idem est, quod datam habeat rationem ad triangulum æquicrure per axem, puta ut d ad a.

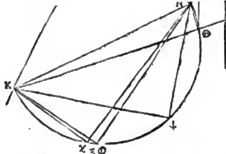
Puta factum, sitque triangulum æquicrure quæsitum, quod basim habeat rectam Τ Σ Τ ad rectos angulos ipsi Γ Δ, cathetum vero Α Σ; ac demittatur ad basim coni normalis Α Ε, quæ quidem cadet super diametrum Γ Δ. Jam pro quæsitâ Β Σ scribatur z, datus vero Axis sit a, semidiameter basis coni Β Γ vel Β Δ sit b, Β Ε autem intercepta inter centrum & normalem sit c: sitque area trianguli dati, sive rectangulum sub Α Σ, Σ Τ, æqualis ipsi bd.



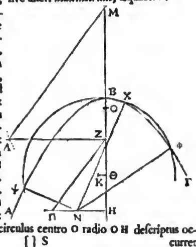
His positis [per 47. 1.] $bb - zz$ æquale erit quadrato ex Σ Τ, & quadratum ex Α Σ [per 12. 2.] æquale erit quadratis ex Α Β, Β Σ una cum duplo rectangulo Σ Β Ε, hoc est ipsis $aa + zz + 2cz$: quibus in se ductis, fiet quadratum trianguli dati Τ Α Τ (si ita loqui liceat) sive $bbdd$, his quantitatibus æquale $bbaa + bbzz + 2cbbz - aazz - z^4 - 2cz^3$: ac ordinatâ æquatione, $z^4 + 2cz^3 \begin{matrix} -bb \\ +aa \end{matrix} zz - 2bbcz$ æqualia erunt differentiæ ipsarum $bbdd$ & $bbaa$, sive rectangulo sub summâ & differentiâ dati trianguli bd & ipsius ba trianguli æquicruris per axem. Unde, per ea quæ ante viginti plus minus annos jam tum inventa prodidi, talis emergit problematis Compositio.

Ad centrum basis Β, super diametrum Γ Δ, erigatur normalis Β Θ ipsi Γ Β æqualis; ac ponatur Β Μ æqualis ipsi Β Ε, & jungatur Θ Μ; cui ad angulos rectos ducatur Κ Θ Λ, ac fiant Κ Θ, Θ Λ ipsi Θ Μ æquales. Dein diametro Β Θ, atque ordinatim applicatis Κ Θ, Θ Λ, describatur Parabola Κ Β Λ. Fiat etiam ut duplum quadrati ex Γ Β ad quadratum ex Α Ε ita Θ Μ ad Θ Ν; ac jungatur Κ Ν, super quam describatur semicirculus Κ Θ Ν. Atque hactenus hæc omnia cuivis triangulo æquilateri in dato cono secando inserviunt. Capiatur jam Κ Ξ ad Α Β in ratione d ad a, sive quam habet triangulum secandum ad æquicrure per Axem; ac coaptetur in semicirculo Κ Θ Ν recta Κ Ξ. Denique centro Ν, radio Ν Ξ, describatur arcus circuli occurrens Parabolæ in punctis Ο, Π; à quibus Parabolæ diametro parallelæ ducantur Ο Σ, Π Ρ, occurrentes ipsi Γ Δ in punctis Σ, Ρ: ac jungantur Α Ρ, Α Σ. Dico triangula æquicrura Τ Α Τ, Φ Α Χ per Α Σ, Α Ρ ducta æqualia esse triangulo proposito, nempe rectangulo contento sub Κ Ξ & Γ Β.

Demissâ autem de puncto Ν in Curvam Parabolæ normali Ν Ψ, ac ductâ Ψ Ω parallelâ Axi Parabolæ; si jungatur Α Ω, erit triangulum æquicrure per Α Ω transiens, sive triangulum α Α γ *maximum* omnium æquicrurum in dato Cono secandorum: atque huic utrinque propiora majora erunt remotioribus. Quod si triangulum propositum majus fuerit triangulo illo per Α Ω transeunte, problema impossibile erit, ac circulus Parabolam non attinget: hoc vero si minus fuerit, duo semper inveniri possunt triangula rem præstantia, ab utraque parte puncti Ω. Atque hic obiter observandum est, Parabolam modo dicto descriptam transire per punctum Ε, ita ut Axis γ δ ipsam Β Ε secet bifariam; latusque rectum Axis æquale esse basis semidiametro Γ Β vel Β Θ. Hæc



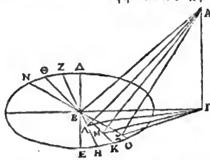
simpliciter minimum erit: sed quod minus sit iis quæ ab utroque latere eidem adjacent, ita ut inter Ω & Υ ipsi Υ propiora remotioribus sint minora. Triangulum vero æquicrure per Υ majus erit quovis triangulo æquicruri inter Υ & Δ basim habente. Aptatis autem in semicirculo ΚΘΝ rectis ipsis ΝΨ, ΝΧ, ΝΦ æqualibus, ut Νψ, Νχ, Νφ: erit rectangulum sub semidiametro basis coni ΓΒ & Κψ æquale triangulo *maximo* æquicruri per ΑΩ; quod sub ΓΒ & Κχ æquale erit *minimo* per ΑΥ ducto; quod vero sub ΓΒ & Κφ æquicruri per ΑΥ ducto, sive alteri *maximorum*, æquabitur.



Restat jam ut ostendamus quomodo de puncto dato cathetus demitti possit in Curvam Parabolæ; & quo limite dignoscatur utrum tres catheti vel una tantum fuerit. Ac primum quidem docet *Apollonius* in V[to]. Conicorum prop. 62. ope Hyperbolæ: sed nostro instituto majus conveniet idem per circulum præstare. Sit igitur Parabolæ ΑΒΓ Axis ΒΗ, ac sit punctum Ν à quo cathetos demittere oporteat ad Curvam Parabolicam. Ducatur ΝΗ Axi normalis, ac fiat ΒΖ æqualis dimidio lateris recti Axis, & bisecetur ΖΗ in Θ, & erigatur normalis ΚΘ quartæ parti ipsius ΝΗ æqualis: dein circulus centro Κ radio ΚΒ descriptus occurret Parabolæ ad ea Curvæ puncta in quæ cadunt normales; puta ad Ψ, Χ, Φ, vel ad solum Ψ, uti diximus. Ipsius autem ΝΗ magnitudo, ut tres sint hujusmodi intersectiones, ex 51. V[ti]. Conicorum limites habet, idque constructione satis facili. Aliter autem hoc modo determinabitur. Producatur ΗΒ ad Μ, ita ut ΖΜ æqualis sit $\frac{27}{16}$ lateris recti Parabolæ; ac erectâ super Axem normali ΖΛ, bisecetur ΗΜ in Ο, ac circulus centro Ο radio ΟΗ descriptus occurret

pendicularis sit A Γ, & jungatur Γ B, cui per punctum B ad rectos angulos ducatur Δ E in eodem plano; & ducantur utcunque rectæ Z H, K Θ: erunt itaque Δ E, Z H, Θ K bases triangulorum per axem transeuntium. itaque à puncto A ad ipsas Δ E, Z H, Θ K perpendiculares ducantur A B, A Λ, A M. axem vero A B perpendicularem esse ad Δ E, & perpendiculares A Λ, A M ad partes B H, B K cadere, deinceps ostendetur. dico puncta B, Λ, M in unius circuli circumferentia esse, cujus diameter est recta B Γ.

Jungantur enim Γ Λ, Γ M. & quoniam A Λ perpendicularis est ad Z H; erit angulus Z Λ A rectus. rursus quoniam A Γ ad basis planum est perpendicularis, anguli A Γ B, A Γ Λ, A Γ M recti erunt: quare cum quadratum ex A B æquale sit quadratis ex B Λ, Λ A, & quadratum ex Λ A quadratis ex Λ Γ, Γ A æquale; erit quadratum ex A B æquale tribus quadratis ex B Λ, Λ Γ, Γ A. idem autem est æquale quadratis ex B Γ, Γ A: quadrata igitur ex B Γ, Γ A quadratis ex B Λ, Λ Γ, Γ A æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex Γ A; erit reliquum quadratum ex B Γ æquale quadratis ex B Λ, Λ Γ: est igitur [per 48. I.] angulus B Λ Γ in basis plano rectus. rursus quoniam quadratum ex A B æquale est quadratis ex B M, M A, & quadratum ex M A æquale quadratis ex M Γ, Γ A; erit quadratum ex A B æquale quadratis ex B M, M Γ, Γ A. sed & æquale est quadratis ex B Γ, Γ A: ergo, sublato communi quadrato ex Γ A, erit quadratum ex B Γ quadratis ex B M, M Γ æquale: rectus igitur angulus



ἐπίπεδον ἡ A Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ B, τῇ δὲ Γ B ἀπὸ τοῦ B πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἡ Δ E, τυχοῦσαι δὲ αἱ Z H, K Θ· γίνονται δὴ αἱ Δ E, Z H, Θ K, βάσεις τριγώνων διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένων. ἤχθωσαν μὲν οὖν κάθετοι ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὰς Δ E, Z H, Θ K εὐθείας αἱ A B, A Λ, A M. ὅτι γὰρ ὁ μὲν A B ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ Δ E, αἱ δὲ A Λ, A M κάθετοι ἐπὶ τὰ B H, B K μέρη πίπτουσιν, ἑξῆς δειχθήσεται. λέγω δὴ ὅτι τὰ B καὶ Λ καὶ M σημεῖα ἐφ᾽ ἑνὸς κύκλου περιφερείας ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ B Γ εὐθεῖα.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Γ Λ, Γ M. ἐπεὶ οὖν ἡ A Λ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Z H, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Z Λ A γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡ A Γ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ὀρθαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ A Γ B, A Γ Λ, A Γ M γωνίαι· ὥστε ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς A B τοῖς ἀπὸ τῶν B Λ, Λ A ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Λ A τοῖς ἀπὸ Λ Γ, Γ A ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς A B τοῖς ἀπὸ B Λ, Λ Γ, Γ A ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ B Γ, Γ A ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς B A· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς B Γ, Γ A τοῖς ἀπὸ B Λ, Λ Γ, Γ A ἴσα ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Γ A· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ B Γ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ B Λ, Λ Γ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ B Λ Γ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς A B ἴσον τοῖς ἀπὸ B M, M A, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς M A ἴσον τοῖς ἀπὸ M Γ, Γ A· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς A B ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ B M, M Γ, Γ A. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς A B ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν B Γ, Γ A, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς Γ A· τὸ ἄρα ἀπὸ B Γ ἴσον τοῖς ἀπὸ B M, M Γ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ B M Γ

ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ ὀξεῖα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἐπὶ τὰ ΒΗ μέρη πίπτει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

est, & ABH acutus. ducta igitur à puncto A ad ZH perpendicularis ad partes BH cadit. eodem modo & in aliis demonstrabitur.

Πόρισμα.

Ὥστε φανερὸν ὅτι αἱ προειρημέναι κάθετοι, ἀπὸ μετεώρου τοῦ Α σημείου ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν πίπτουσαι, κατ᾽ ἐπιφανείας οἰσθήσονται κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ ὑπὸ τῶν πτώσεων τῶν καθέτων γραφόμενος κύκλος, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ ἐξ ἀρχῆς κώνῳ.

Corollarium.

Quare constat dictas perpendiculares, à puncto sublimi ad circuli circumferentiam cadentes, in coni superficie ferri; cujus quidem basis est circulus à casu perpendicularium descriptus, & vertex idem qui est primi coni vertex.

SCHOLION.

HINC manifestum est quod, eodem modo quo in Scholio præcedente secuimus in Cono Scaleno triangulum æquicrure triangulo dato æquale, etiam secari possit triangulum Scalenum dato æquale, cujus basis parallela sit datæ cuilibet diametro basis Coni, puta ipsi ΘK. Concipiatur enim alius Conus cujus vertex A, Axis AM, ac basis circulus, priori æqualis & in eodem plano, circa centrum M, in quod cadit normalis à Vertice A ad ΘK demissa, ita ut planum trianguli AMΓ rectum sit super basis planum. In hoc inquam Cono triangula æquicrura ubique æqualia erunt Scalenis, eodem plano per verticem transeunte in priori Cono sectis; modo communis planorum basis & trianguli sectio parallela sit diametro ΘK: quemadmodum ad 26am & 27am hujus ostensum est in triangulis bases ipsi BΓ parallelas habentibus; easdem enim habent tam bases quam altitudines.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ, δοθέντος τινὸς τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων, ὃ μήτε μέγιστόν ἐστι μήτε ἐλάχιστον· εὑρεῖν ἕτερον τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος.

PROP. XLI. *Probl.*

In cono scaleno, dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum sit neque minimum: invenire aliud triangulum per axem, quod una cum dato utrisque maximo & minimo per axem sit æquale.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος.

SIT conus scalenus, cujus vertex punctum A, basis circulus circa centrum B, axis autem AB,

M quam ΑΓ major erit; & quadratum ex M majus quadrato ex ΑΓ. sint quadrato ex M æqualia quadrata ex ΑΓ, ΓΝ, & rectâ ΓΝ in circulo aptatâ, ducatur ΝΞΒΟ, & jungatur ΝΑ: erit itaque angulus ΒΝΓ in semicirculo rectus. quadratum autem ex ΑΒ æquale est quadratis ex ΒΓ, ΓΑ simul; & quadratum ex ΒΓ æquale quadratis ex ΒΝ, ΝΓ simul: quare quadratum ex ΑΒ quadratis ex ΒΝ, ΝΓ, ΓΑ æquale erit. è quibus, quadratis ex ΝΓ, ΓΑ æquale est quadratum ex ΝΑ: quadratum igitur ex ΑΒ est æquale quadratis ex ΒΝ, ΝΑ: & idcirco angulus ΒΝΑ rectus est: quapropter ΑΝ est altitudo trianguli per axem, cujus basis ΟΒΞ. & quoniam quadratum ex M est æquale quadratis ex ΑΓ, ΓΝ, & quadratum ex ΑΝ eisdem quadratis æquale; erit recta M ipsi ΑΝ æqualis: quare utræque ΛΑ, ΑΝ æquales sunt utrisque ΒΑ, ΑΓ, & rectangulum contentum sub diametro & utrisque ΛΑ, ΑΝ æquale ei quod sub diametro & utrisque ΒΑ, ΑΓ continetur. sed rectangulum sub diametro & utrisque ΒΑ, ΑΓ duplum est trianguli maximi & minimi, quorum bases ΖΗ, ΕΔ & altitudines ΒΑ, ΑΓ; rectangulum vero sub diametro & utrisque ΛΑ, ΑΝ duplum est triangulorum, quorum bases ΘΚ, ΟΞ, & altitudines ΛΑ, ΑΝ: triangula igitur, quorum bases ΘΚ, ΟΞ, & altitudines ΛΑ, ΑΝ, æqualia sunt triangulis maximo & minimo per axem. datum autem est triangulum cujus basis ΘΚ; ergo triangulum per axem cujus basis ΟΞ inventum est, quod, una cum dato cujus basis ΘΚ, utrisque maximo & minimo æquale erit.

[illegible] ἡ ΛΑ [illegible] τῆς ΑΒ ἡ ἄρα Μ τῆς ΑΓ μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ Μ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΑΓ μεῖζόν ἐστι. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Μ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΝ, καὶ τῆς ΓΝ ἐναρμοσθείσης εἰς τὸν κύκλον, διήχθω ἡ ΝΞΒΟ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΑ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΝΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ, ΓΑ, ὧν τοῖς ἀπὸ ΝΓ, ΓΑ τὸ ἀπὸ ΝΑ ἴσον ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΑ ἴσον ἐστί· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΝΑ γωνία· ἡ ΑΝ ἄρα ὕψος ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ ΟΒΞ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Μ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ· ἴση ἄρα ἡ Μ τῇ ΑΝ· ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ ΛΑ, ΑΝ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΑ, ΑΓ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑ, ΑΝ τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ ΖΗ, ΕΔ, ὕψη δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑ, ΑΝ διπλάσιόν ἐστι τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ· τὰ ἄρα τρίγωνα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἐλαχίστῳ καὶ τῷ μεγίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστι τὸ δοθὲν τὸ ἐπὶ τῆς ΘΚ· εὕρηται ἄρα τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ἐπὶ τῆς ΟΞ, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ τε μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

ΠΡΟ-

Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Α Μ, Μ Β, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ Α Λ, Λ Β· καὶ τὰ ἀπὸ Α Μ, Μ Β ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν Α Λ, Λ Β ἴσα ἐστὶν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς Μ Β τῷ ἀπὸ Β Λ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Α τῷ ἀπὸ Α Λ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ Λ Α τῇ Α Μ. καί εἰσιν ὕψη τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ Ζ Η, Θ Κ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν Ζ Η, Θ Κ βάσεων τρίγωνα διὰ τοῦ ἄξονος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est æquale, itemque æquale est quadratis ex Α Λ, Λ Β: ergo quadrata ex Α Μ, Μ Β æqualia sunt quadratis ex Α Λ, Λ Β; quorum quadratum ex Μ Β est æquale quadrato ex Β Λ: reliquum igitur quadratum ex Μ Α æquale est quadrato ex Α Λ; atque ipsa Λ Α æqualis ipsi Α Μ, quæ quidem sunt triangulorum altitudines, quorum bases Ζ Η, Θ Κ: ergo triangula per axem super bases Ζ Η, Θ Κ constituta inter se æqualia erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τὰ ὁμοταγῆ ἴσα τε καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω γὰρ, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς, τὰ Ζ Λ Η, Θ Λ Κ τρίγωνα ὁμοταγῆ· λέγω ὅτι ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. ὅτι μὲν οὖν ἴσα ἐστὶν ἤδη δέδεικται· ὅτι δὲ ὅμοια νῦν δεικτέον.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Λ Β, ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἦκται τῆς βάσεως, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Λ Β τοῖς ἀπὸ Λ Μ, Μ Β, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ Α Λ, Λ Β ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ Α Μ τῷ ἀπὸ Α Λ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Β τῷ ἀπὸ Β Λ, καὶ ἡ Μ Β εὐθεῖα τῇ Β Λ ἴση· ὥστε καὶ ὅλη ἡ Μ Θ τῇ Λ Ζ. ἴση δὲ καὶ ἡ Μ Α τῇ Λ Α· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστὶ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Α Ζ τῷ ἀπὸ Α Θ, καὶ ἡ Α Ζ τῇ Α Θ ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ Α Κ τῇ Α Η δείκνυται ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ Ζ Η, Θ Κ βάσεις ἴσαι· τὰ ἄρα Ζ Α Η, Θ Α Κ τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. δῆλον δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

PROP. XLIII. *Theor.*

E triangulis per axem, quæ coordinata sunt & æqualia & similia erunt inter se.

SINT triangula coordinata, ut in antecedenti figura, Ζ Λ Η, Θ Λ Κ: dico & æqualia & similia inter se esse. æqualia enim jam ostensa sunt; similia esse nunc demonstrandum.

Quoniam Λ Β, in utroque triangulorum, ducta est à vertice ad punctum quod basim bifariam dividit, & quadratum ex Λ Β quadratis ex Λ Μ, Μ Β est æquale; itemque æquale est quadratis ex Α Λ, Λ Β, quorum quadratum ex Α Μ æquale est quadrato ex Α Λ: erit reliquum quadratum ex Μ Β quadrato ex Β Λ æquale, & recta Μ Β ipsi Β Λ æqualis: quare & tota Μ Θ toti Λ Ζ. est autem Μ Α æqualis ipsi Λ Α: ergo & quæ ex ipsis fiunt quadrata inter se sunt æqualia, hoc est quadratum ex Α Ζ æquale quadrato ex Α Θ: & propterea erit Α Ζ ipsi Α Θ æqualis. similiter etiam Α Κ ipsi Α Η æqualis demonstrabitur. sed & bases Ζ Η, Θ Κ sunt æquales: triangula igitur Ζ Α Η, Θ Α Κ & æqualia & similia inter se erunt. manifestum autem est & hujus theorematis conversum.

crure triangulum ΘΑΚ.

Z K

Quoniam enim triangulorum ΕΑΖ, ΓΑΔ bases sunt æquales, diametri scilicet ΓΔ, ΕΖ; altitudo autem trianguli ΕΑΖ est ΒΑ, & ipsius ΓΑΔ altitudo ΑΗ: erit ut ΒΑ ad ΑΗ ita ΕΑΖ triangulum ad triangulum ΓΑΔ. rursus quoniam triangulorum ΓΑΔ, ΘΑΚ eadem est altitudo ΑΗ; trianguli autem ΓΑΔ basis est ΓΔ, hoc est ΕΖ; & trianguli ΘΑΚ basis ΘΚ: erit ut ΕΖ ad ΘΚ ita triangulum ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΚ. sed ut ΕΖ ad ΘΚ ita earum dimidiæ, hoc est ΒΚ ad ΚΗ; & ut ΒΚ ad ΚΗ ita ΒΑ ad ΑΗ: (similia etenim sunt triangula orthogonia ΒΗΚ, ΒΗΑ) triangulum igitur ΓΑΔ est ad triangulum ΘΑΚ ut ΒΑ ad ΑΗ. erat autem & triangulum ΕΑΖ ad ipsum ΓΑΔ ut ΒΑ ad ΑΗ; ergo ut ΕΑΖ triangulum ad triangulum ΓΑΔ ita ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΚ. quod erat demonstrandum.

Prop. XLV. *Theor.*

RURSUS sit ut triangulum ΕΑΖ ad ΓΑΔ ita ΓΑΔ ad ΘΑΚ: dico axem ΒΑ semidiametro basis æqualem esse.

Quoniam enim ut triangulum ΕΑΖ ad ΓΑΔ ita ΒΑ ad ΑΗ; & ut ΕΑΖ ad ΓΑΔ ita ΓΑΔ ad ΘΑΚ erit ut ΓΑΔ ad ΘΑΚ ita ΒΑ ad ΑΗ. ut autem ΓΑΔ ad ΘΑΚ ita ΕΖ ad ΘΚ, hoc est ΒΚ ad ΚΗ: ergo ut ΒΑ ad ΑΗ ita ΒΚ ad ΚΗ: quare triangula ΒΑΗ, ΒΚΗ sunt similia, communis autem ΒΗ, atque homologæ ΑΒ, ΒΚ: recta igitur ΑΒ ipsi ΒΚ, hoc est semidiametro basis, æqualis erit. quod ostendendum proponebatur.

Simul vero & ostensum est, ex utraque demonstratione, triangulum ΕΑΖ simile esse tri-

τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἰσοσκελές.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ΕΑΖ, ΓΑΔ τριγώνων αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΔ, ΕΖ διάμετροι, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ΕΑΖ ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ΓΑΔ ἡ ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΓΑΔ καὶ ΘΑΚ τριγώνων κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΗ, βάσις δὲ τοῦ μὲν ΓΑΔ ἡ ΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, τοῦ δὲ ΘΑΚ ἡ ΘΚ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ οὕτως τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ οὕτως αἱ ἡμίσειαι πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· (ὅμοια γὰρ τὰ ΒΗΚ, ΒΗΑ τρίγωνα ὀρθογώνια) καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ἦν δὲ καὶ τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

ΠΑΛΙΝ ἔστω ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· λέγω ὅτι ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ. ὅμοια ἄρα τὰ ΒΑΗ, ΒΚΗ τρίγωνα, καὶ κοινὴ ἡ ΒΗ, καὶ ὁμόλογοι αἱ ΑΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΒΚ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Καὶ συναπεδείχθη, καθ᾽ ἑκατέραν τῶν δείξεων, ὅτι τὸ ΕΑΖ τρίγωνον τῷ ΘΑΚ ὅμοιόν ἐστιν· ὡς

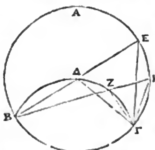
γὰρ

μεταξὺ τῆς τε ἑτέρας κυρτῆς περιφερείας καὶ τῆς κοίλης τῆς ἑτέρας, ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς διαχθείσης εὐθείας καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου περιφερείας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων ἐπιζευγνυμένῃ.

ΕΣΤΩ κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ κέντρου γεγράφθω τις κύκλος ὁ ΒΔΓ, τέμνων τὸν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διήχθωσαν εὐθεῖαι διὰ μὲν τοῦ Δ ἡ ΒΔΕ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΖΓ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΓ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΓ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΓΖΗ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΖΗΓ ἴση, διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβηκέναι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα. ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ΓΔΕ· ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΓΖΗ· ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΖΓ. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, δειχθήσεται τὰ τῆς προτάσεως.

Πάλιν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὑποκείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ, τῇ δὲ ΓΖ ἡ ΖΗ, τῆς ΒΔΓ περιφερείας κατὰ τὸ Δ δίχα τετμημένης· λέγω ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῶν ΔΒ, ΔΓ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε καὶ Η σημείων. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ



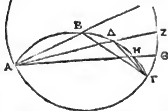
recta linea inter convexam alterius circuli circumferentiam & concavam prioris interjecta, æqualis erit ei quæ à communi sectione rectæ ductæ & circumferentiæ per centrum ad alteram communem circulorum intersectionem perducitur.

SIT circulus ΑΒΓ circa centrum Δ; & per Δ alius circulus ΒΔΓ describatur, secans priorem circulum in punctis Β, Γ; ducanturque rectæ lineæ, per Δ quidem ΒΔΕ, alia vero utcunque ΒΖΗ; & jungantur ΔΓ, ΖΓ: dico rectam ΖΗ ipsi ΖΓ æqualem esse.

Jungantur enim ΕΓ, ΓΗ. & quoniam angulus ΒΔΓ æqualis est angulo ΒΖΓ, erit reliquus ΕΔΓ reliquo ΓΖΗ æqualis. sed & æqualis est ΔΕΓ ipsi ΖΗΓ, quòd in eadem circumferentia consistat: reliquus igitur est æqualis reliquo, & triangula inter se similia sunt. æquicrure autem est triangulum ΓΔΕ; ergo & æquicrure est ΓΖΗ, & recta ΗΖ ipsi ΖΓ æqualis. similiter & in aliis ductis idem demonstrabitur.

Rursus in eadem figura ponatur ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis, & ΖΗ æqualis ipsi ΓΖ, circumferentiâ ΒΔΓ bifariam in puncto Δ divisâ: dico circulum centro Δ & intervallo ΔΒ vel ΔΓ descriptum per puncta Ε, Η transire. quoniam enim angulus ΕΔΓ æqualis est angulo ΗΖΓ,
&

B Γ, circulus A E Z Θ Γ describatur, & producantur A B E, A Δ Z, A H Θ: ergo, ex antecedenti theoremate, E B ipsi B Γ est æqualis, & Z Δ æqualis ipsi Δ Γ, & Θ H ipsi H Γ. quoniam igitur A E diameter est circuli A E Z; erit A E omnium quæ in circulo ducuntur maxima; & A Z major quam A Θ. sed ipsi A E æquales sunt A B, B Γ, & ipsi A Z æquales A Δ, Δ Γ, & ipsi A Θ æquales A H, H Γ: ergo A B Γ omnium maxima est, & A Δ Γ major quam A H Γ. & ita semper ea quæ propinquior est puncto medio circumferentiæ remotiore major erit. quod demonstrandum proponebatur.

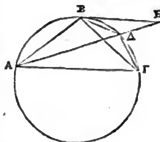


προϊών τῆς B A, B Γ, γεγράφθω κύκλος ὁ A E Z Γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ A B E, A Δ Z, A H Θ· ἴση ἄρα καὶ (διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα) ἡ μὲν E B τῇ B Γ, ἡ δὲ Z Δ τῇ Δ Γ, καὶ ἡ Θ H τῇ H Γ. ἐπεὶ οὖν ἡ A E διάμετρός ἐστι τοῦ A E Z κύκλου· μεγίστη μὲν ἄρα τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν ἡ A E, ἡ δὲ A Z μείζων τῆς A Θ. ἀλλὰ τῇ μὲν A E ἴση συναμφότερος ἡ A B, B Γ, τῇ δὲ A Z ἡ A Δ, Δ Γ, καὶ τῇ A Θ ἡ A H, H Γ· καὶ τούτων ἄρα μεγίστη μὲν ἡ A B Γ, μείζων δὲ ἡ A Δ Γ τῆς A H Γ. καὶ ὁμοίως ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῇ πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπωτέρω ἐστὶ μείζων. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Aliter.

SIT circulus A B Γ, & in portione A B Γ inflectantur rectæ A B, B Γ, ita ut circumferentia A B Γ bifariam in B dividatur: dico rectam ex A B, B Γ compositam maximam esse ex iis quæ in eadem portione inflectuntur.

Inflectantur enim A Δ, Δ Γ, & producatur A Δ ad E, ita ut Δ E ipsi Δ Γ sit æqualis; junganturque B Δ, B E. quoniam igitur circumferentia A B æqualis est circumferentiæ B Γ; & in circumferentia quidem A B angulus B Δ A, in circumferentia vero B Γ angulus B A Γ consistit: erit angulus B Δ A angulo B A Γ æqualis. communis apponatur B Δ E; ergo utrique anguli B Δ E, B Δ A utrisque B Δ E, B A Γ æquales sunt. & sunt B Δ E, B Δ A duobus rectis æquales: ergo & B Δ E, B A Γ



Ἄλλως.

ΕΣΤΩ κύκλος ὁ A B Γ, καὶ ἐν τῷ A B Γ τμήματι κεκλάσθω ἡ A B Γ εὐθεῖα, ὥστε τὴν A B Γ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ B· λέγω ὅτι συναμφότερος ἡ A B, B Γ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν.

Κεκλάσθω γὰρ ἡ A Δ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ A Δ E, καὶ κείσθω ἡ Δ E τῇ Δ Γ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ B Δ, B E. ἐπεὶ οὖν ἡ A B περιφέρεια τῇ B Γ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς A B ἡ ὑπὸ B Δ A γωνία βέβηκεν, ἐπὶ δὲ τῆς B Γ ἡ ὑπὸ B A Γ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ B Δ A τῇ ὑπὸ B A Γ. κοινὴ προσκείσθω ἡ B Δ E· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ B Δ E, B Δ A συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ B Δ E, B A Γ ἐστὶν ἴση. καὶ ἔστι συναμφότερος ἡ ὑπὸ B Δ E, B Δ A δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ συναμφότερος ἄρα

εἰσὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ μείζονές εἰσι, καὶ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα βάσις μείζων ἐστὶ τῆς ΒΕ βάσεως. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, τῶν δὲ ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ μείζων ἐστί. συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΕ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΑΔ, ΔΓ, μείζων.

rectis minores. & sunt BΔΓ, BAΓ æquales duobus rectis; anguli igitur BΔΓ, BAΓ angulis BΔE, BAΓ simul sumptis majores sunt; & dempto communi BAΓ, reliquus BΔΓ major erit reliquo BΔE. quoniam igitur ΔΓ est æqualis ipsi ΔE, & communis ΔB, angulus autem BΔΓ major est angulo BΔE; erit basis ΓB basi BE major. & quoniam rectæ AB, BE simul sumptæ majores sunt quam AE, ipsis vero AB, BE simul majores sunt AB, BΓ simul sumptæ: igitur AB, BΓ simul majores sunt quam AE, hoc est quam ipsæ AΔ, ΔΓ simul sumptæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

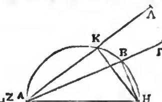
Ἐὰν τεσσάρων ἀνίσων εὐθειῶν τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τὸ συναμφότερον τετράγωνον ἴσον ᾖ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν· ἡ συγκειμένη εὐθεῖα ἐκ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης ἐλάττων ἔσται τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν.

Prop. XLVIII. *Theor.*

Si, quatuor rectis lineis inæqualibus existentibus, quadrata maximæ & minimæ æqualia sint quadratis reliquarum: recta composita ex maxima & minima minor erit ea quæ ex reliquis componitur.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ μεγίστη μὲν πασῶν ἔστω ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΓ, ἡ δὲ ἀπὸ ΔΕ τῆς ΕΖ μὴ ἐλάττων ἔστω, ἔστω δὲ τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσα· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἐλάττων ἐστίν.





Sint quatuor rectæ lineæ AB, BΓ, ΔE, EZ, quarum maxima sit AB, & BΓ minima; ΔE vero non sit minor quam EZ; & sint quadrata ex AB, BΓ quadratis ex ΔE, EZ æqualia: dico lineam AΓ minorem esse quam ΔZ.

[ ] U

Ducantur

Δ E Z A H

eſt æquale quadrato ex BΘ: reliquum igitur quadratum ex AK reliquo ex ΔE æquale erit, & recta AK ipſi ΔE æqualis: ergo triangulum AKH eſt æquale & ſimile triangulo ΔEΘ, & recta AΛ æqualis ipſi ΔZ. itaque quoniam recta linea AK non eſt minor quam KH; neque circumferentia AK minor erit quam circumferentia KH: quare cum in circuli portione inflectantur rectæ AK, KH; AB, BH, ſintque AK, KH vel ad punctum circumferentiæ medium, vel ipſi propinquiores: erunt, ex antecedenti theoremate, AK, KH majores quam AB, BH, hoc eſt AΛ ſive ΔZ major erit quam AΓ: minor eſt igitur AΓ quam ΔZ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XLIX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ inæquales dividantur, ita ut quadrata partium minoris æqualia ſint quadratis partium majoris: earum omnium maxima quidem erit major minoris pars, minor vero minima.

SINT rectæ lineæ ABΓ, ΔEZ in B, E punctis ita diviſæ, ut ΔE ſit major quam EZ, & AB non minor quam BΓ; ſitque AΓ major quam ΔZ; quadrata vero ex AB, BΓ quadratis ex ΔE, EZ ſint æqualia: dico harum rectarum AB, BΓ, ΔE, EZ maximam eſſe ΔE, & EZ minimam.

Ducatur enim ipſi AΓ ad rectos angulos BH, æqualis ipſi BΓ, & jungatur AH; circa triangulum vero orthogonium ABH deſcribatur ſemicirculus. quoniam igitur recta AB non eſt minor quam BH, neque AB circumferentia circumferentiâ BH minor erit: & idcirco circumferentiæ ABH punctum medium vel erit ad B, vel in circumferen-

τὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΚ τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ΑΚΗ τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΔΕΘ, καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῆς ΚΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, οὐδ' ἡ ΑΚ ἄρα περιφέρεια τῆς ΚΗ περιφερείας ἐλάττων ἐστί. καὶ, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα, ἐπεὶ ἐν τμήματι κύκλου κεκλασμέναι εἰσὶν αἱ ΑΚΗ, ΑΒΗ εὐθεῖαι, καὶ ἔστιν ἡ ΑΚΗ ἤτοι πρὸς τῇ διχοτομίᾳ, ἢ ἔγγιον τῆς διχοτομίας· μείζων ἄρα συναμφότερος ἡ ΑΚ, ΚΗ συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΑΛ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι διῃρημέναι ὦσι, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τοῦ ἐλάττονος τμημάτων τετράγωνα ἴσα ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν τοῦ μείζονος τμημάτων τετραγώνοις· τῶν τεσσάρων τμημάτων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ τοῦ ἐλάττονος μεῖζον τμῆμα, ἐλάχιστον δὲ τὸ ἔλαττον.

ΕΣΤΩΣΑΝ εὐθεῖαι δύο ἄνισοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ διῃρημέναι κατὰ τὰ Β καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὴν μὲν ΔΕ τῆς ΕΖ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα, καὶ μείζων μὲν ἔστω ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ τετραγώνοις ἴσα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ.

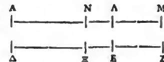
Ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΒΗ ἴση οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον γεγράφθω ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα τῆς ΑΒΗ περιφερείας διχοτομία ἤτοι κατὰ τὸ Β ἐστὶν, ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ περιφερείας,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἴσαι διῃρημέναι ὦσιν, οὕτως ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑκατέρας τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς λοιπῆς ἴσον εἶναι· καὶ τὰ τμήματα τοῖς τμήμασιν ἴσα ἔσαι, ἑκάτερον ἑκατέρῳ.

Ἐστωσαν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ Α Λ Μ, Δ Ε Ζ, διῃρημέναι κατὰ τὰ Λ καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὸ ὑπὸ Α Λ, Λ Μ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν Δ Ε, Ε Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ Α Λ τῇ Δ Ε.

Ἐπεὶ ἴση ἡ Α Μ τῇ Δ Ζ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἄρα ἴσαι εἰσίν· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α Μ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Δ Ζ ἴσον ἐστίν. εἰ μὲν οὖν ἡ Α Μ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ Α Λ, Λ Μ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας· καὶ Δ Ζ ἄρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ Δ Ε, Ε Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α Μ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Δ Ζ. εἰ δὲ μὴ, τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ν, Ξ σημεῖα· ἴση ἄρα ἡ Ν Μ εὐθεῖα τῇ Ξ Ζ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ν Μ τῷ ἀπὸ τῆς Ξ Ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Α Λ, Λ Μ μετὰ τοῦ ἀπὸ Ν Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Δ Ε, Ε Ζ μετὰ τοῦ ἀπὸ Ξ Ε, ὧν τὸ ὑπὸ Α Λ, Λ Μ τῷ ὑπὸ Δ Ε, Ε Ζ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Ν Λ τῷ ἀπὸ τῆς Ξ Ε ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ Ν Λ τῇ Ξ Ε. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ Ν Μ τῇ Ξ Ζ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ Λ Μ τῇ Ε Ζ ἴση· ὥστε καὶ ἡ Α Λ τῇ Δ Ε ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. L. *Theor.*

Si duæ rectæ æquales ita dividantur, ut rectangulum contentum ſub partibus unius æquale ſit ei quod ſub alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

Sint rectæ lineæ inter ſe æquales A Λ M, Δ E Z in punctis Λ, E ita diviſæ, ut rectangulum A Λ M rectangulo Δ E Z ſit æquale: dico rectam A Λ ipſi Δ E æqualem eſſe.

Quoniam enim A M eſt æqualis ipſi Δ Z; & earum dimidiæ æquales erunt: ergo & quadratum dimidiæ A M eſt æquale quadrato dimidiæ Δ Z. itaque ſi A M bifariam diviſa fuerit in Λ, rectangulum A Λ M eſt dimidiæ quadratum; adeoque Δ Z bifariam dividitur in E, quoniam rectangulum Δ E Z æquale eſt quadrato dimidiæ ipſius A M, hoc eſt dimidiæ ipſius Δ Z. Sin minus, dividantur bifariam in punctis N, Ξ: æqualis igitur eſt N M ipſi Ξ Z: & propterea quadratum ex N M quadrato ex Ξ Z æquale, hoc eſt [per 5.2.] rectangulum A Λ M una cum quadrato ex N Λ æquale rectangulo Δ E Z una cum quadrato ex Ξ E; è quibus rectangulum A Λ M æquale eſt rectangulo Δ E Z: ergo reliquum quadratum ex N Λ æquale eſt quadrato ex Ξ E; ac propterea N Λ ipſi Ξ E æqualis. eſt autem & N M æqualis ipſi Ξ Z; reliqua igitur Λ M ipſi E Z, & A Λ ipſi Δ E æqualis erit. Q. E. D.

Prop.

ſtratum eſt: ergo E A maxima eſt è quatuor lineis, & A Z minima. id quod [ad 17. & 18. huj.] oſtenſum eſt. & quoniam quadrata è maxima & minima, hoc eſt quadrata ex E A, A Z ſimul, quadratis ex Γ A, A Δ ſimul ſunt æqualia; erunt utræque E A, A Z ſimul [per præcedens 48vum theorema) minores utriſque Γ A, A Δ. apponantur E Z, Γ Δ: tota igitur A E Z perimeter totâ perimetro A Γ Δ eſt minor: ergo majoris trianguli perimeter major erit.

Ex quibus perſpicuum eſt, in conis ſcalenis maximi quidem trianguli per axem facti, hoc eſt æquicruris, perimetrum eſſe maximam; minimi vero, hoc eſt ejus quod ad rectos angulos inſiſtit baſi coni, perimetrum minimam eſſe; è reliquis vero ſemper triangulum quod majus eſt majorem perimetrum habere quam quod minus.

Rurſus ponatur trianguli Γ A Δ perimeter major perimetro E A Z: dico triangulum A Γ Δ triangulo E A Z majus eſſe.

Quoniam enim A Γ Δ perimeter major eſt perimetro E A Z, æqualis autem Γ Δ ipſi E Z; erunt reliquæ Γ A, A Δ reliquis E A, A Z majores. ſed quadrata ex Γ A, A Δ æqualia ſunt quadratis ex E A, A Z: ergo quatuor rectarum Γ A, A Δ, E A, A Z maxima quidem eſt E A, minima vero A Z: (quæ omnia ante [per 49. huj.] demonſtrata ſunt) quare E A ad A Z majorem habet rationem quam Δ A ad A Γ. itaque quoniam duo triangula Γ A Δ, E A Z baſes æquales habent, eandemque habent illam quæ à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans ducitur, alterius autem majus latus ad minus majorem rationem habet quam alterius majus latus ad minus, vel æquale ad æquale; triangulum igitur E A Z minus erit: triangulum igitur Γ A Δ majus eſt triangulo E A Z, ut in decima nona hujus demonſtratum eſt.

ἡ μὲν ἄρα Ε Α μεγίστη ἐστὶ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, ἡ δὲ Α Ζ ἐλαχίστη. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ιζ. καὶ ιη΄. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης, τουτέστι τὰ ἀπὸ Ε Α, Α Ζ, τοῖς ἀπὸ Γ Α, Α Δ ἴσα ἐστί· συναμφότερος ἄρα ἡ Ε Α, Α Ζ εὐθεῖα συναμφοτέρου τῆς Γ Α, Α Δ ἐλάττων ἐστὶ, διὰ τὸ μη΄. θεώρημα τούτου. προσκείσθωσαν αἱ Ε Ζ, Γ Δ· ὅλη ἄρα ἡ Α Ε Ζ περίμετρος ὅλης τῆς Α Γ Δ περιμέτρου ἐλάττων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ τοῦ μείζονος περίμετρος.

Καὶ γέγονε φανερὸν ὅτι, ἐν τοῖς σκαληνοῖς κώνοις, τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μεγίστη μὲν ἡ τοῦ μεγίστου περίμετρος, τουτέστι τοῦ ἰσοσκελοῦς· ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι τοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου· τῶν δ᾽ ἄλλων ἀεὶ τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον.

Πάλιν ὑποκείσθω ἡ τοῦ Γ Α Δ τριγώνου περίμετρος μείζων εἶναι τῆς τοῦ Ε Α Ζ· λέγω δὴ ὅτι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ μεῖζόν ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Γ Δ περίμετρος τῆς Ε Α Ζ περιμέτρου μείζων ἐστὶ, ἴση δὲ ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος ἡ Γ Α, Α Δ συναμφοτέρου τῆς Ε Α, Α Ζ μείζων ἐστί. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ Γ Α, Α Δ τοῖς ἀπὸ Ε Α, Α Ζ ἴσα· τῶν ἄρα Γ Α, Α Δ, Ε Α, Α Ζ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστι ἡ Ε Α, ἐλαχίστη δὲ ἡ Α Ζ· ταῦτα γὰρ ἅπαντα προδέδεικται· ἡ Ε Α ἄρα πρὸς τὴν Α Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Α πρὸς Α Γ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ Γ Α Δ, Ε Α Ζ βάσεις ἴσας ἔχει, ἔχει δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένην τὴν αὐτὴν, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ ἑτέρου μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, καὶ τὰ λοιπά· τὸ ἄρα Ε Α Ζ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Γ Α Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ θεωρήματι ιθ΄. τούτου βιβλίου.

ΠΡΟ-

τως ἡ Β Θ πρὸς τὴν Κ Η, τὸ Β Ε Ζ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Κ Γ Δ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως ἡ Κ Η πρὸς τὴν Η Α, ὡς δὲ ἡ Κ Η πρὸς τὴν Η Α οὕτως τὸ Κ Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ Α Γ Δ· ὡς ἄρα ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως τὸ Κ Γ Δ τρίγωνον, τουτέστι τὸ Β Ε Ζ τρίγωνον, πρὸς τὸ Α Γ Δ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ Β Ε Ζ οὕτως ἡ Ε Ζ βάσις πρὸς τὴν Γ Δ βάσιν. ἀντιπεπόνθεν ἄρα τὰ ἐκκείμενα τρίγωνα τῶν ἑαυτῶν βάσεων.

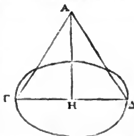
ut Γ Δ ad E Z ita est K H ad H A; ut autem K H ad H A ita K Γ Δ triangulum ad triangulum A Γ Δ; erit igitur ut Γ Δ ad E Z ita triangulum K Γ Δ, hoc est B E Z, ad triangulum A Γ Δ: ergo ut A Γ Δ triangulum ad triangulum B E Z ita basis E Z ad Γ Δ basim. triangula igitur exposita suis basibus reciproce sunt proportionalia.*

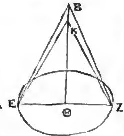
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ΄.

Οἱ κῶνοι ὀρθῶν ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν, οὗτοι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις.

ΕΣΤΩΣΑΝ κώνων ὀρθῶν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ αἱ Α Η, Β Θ εὐθεῖαι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ Α Γ Δ, Β Ε Ζ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως τὸ Β Ε Ζ τρίγωνον πρὸς τὸ Α Γ Δ· λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις οἱ κῶνοι.

Γενέσθω ὡς τὸ Β Ε Ζ τρίγωνον πρὸς τὸ Α Γ Δ οὕτως τὸ Α Γ Δ πρὸς τὸ Κ Ε Ζ· τὸ Β Ε Ζ ἄρα πρὸς τὸ Κ Ε Ζ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α Γ Δ πρὸς τὸ Κ Ε Ζ.





Prop. LIII. *Theor.*

Coni recti, quorum triangula per axes reciproce proportionalia sunt suis basibus, sunt inter se æquales.

SINT conorum vertices quidem A, B, axes rectæ A H, B Θ; triangula vero per axes A Γ Δ, B E Z; & sit ut Γ Δ ad E Z ita triangulum B E Z ad triangulum A Γ Δ: dico conos inter se æquales esse.

Fiat enim ut B E Z triangulum ad triangulum A Γ Δ ita A Γ Δ ad triangulum K E Z; ergo triangulum B E Z ad triangulum K E Z duplicatam habet rationem ejus quam habet triangulum A Γ Δ ad ipsum K E Z.

* Propositio hæc, ut & reliquæ omnes hujus Libri, multo facilius demonstratur ex eo quod ratio Coni ad Conum componitur, ex ratione triangulorum per Axes & ratione diametrorum basium. Sit enim unius Coni altitudo a & basis diameter b, alterius vero altitudo α & diameter basis β. Manifestum est triangula per Axes esse inter se ut ab ad $\alpha\beta$; bases autem ut bb ad $\beta\beta$; Conos vero ipsos ut abb ad $\alpha\beta\beta$. Hinc si ponatur abb ipsi $\alpha\beta\beta$ æquale; erit ἀνάλογον [per 16.6.] ut ab ad $\alpha\beta$ ita β ad b. quod erat demonstrandum.

rum qui reciproce sunt proportionales suis basibus videlicet circulis H, Θ: ergo coni ΑΗΓΔ, ΒΘΕΖ [per 15.12.] inter se æquales sunt. *

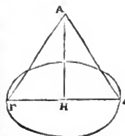
κώνων, ϗ ἀντιπεπόνθασι τ̃ βάσεων, τουτέστι τοῖς Η, Θ κύκλοις· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, ΒΘΕΖ κῶνοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν.

Prop. LIV. *Theor.*

Si in duobus conis rectis basis unius ad basim alterius duplicatam rationem habeat ejus quam habet conus ad conum; triangula per axes inter se æqualia erunt.

Sint coni recti, quorum vertices puncta A, B; bases circuli circa centra H, Θ, & triangula per axes ΑΓΔ, ΒΕΖ: habeat autem circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ: dico triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ inter se æqualia esse.

Sit enim ut ΑΗΓΔ conus ad ΒΘΕΖ ita ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ. & quoniam circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ; conus autem ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ rationem duplicatam habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ: erit igitur ut circulus H ad circulum Θ ita conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ. quare cum ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ coni inter se sint sicut bases, ejusdem erunt altitudinis, è conversa undecimæ duodecimi elementorum: unde AH ipsi



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Ἐὰν δύο κώνων ὀρθῶν ἡ βάσις πρὸς τ̃ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὰ διὰ τ̃ ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι.

Ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοὶ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, βάσεις ᾖ οἱ περὶ τὰ Η, Θ κέντρα κύκλοι, τὰ ᾖ διὰ τ̃ ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ. ἐχέτω ᾖ ὁ Η κύκλος πρὸς τ̃ Θ διπλασίονα λόγον ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΒΘΕΖ· λέγω ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τ̃ ΚΘΕΖ. ϗ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τ̃ Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΒΘΕΖ κῶνον· ἀλλὰ ϗ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΒΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τ̃ Θ κύκλον οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΚΘΕΖ κῶνον. ὥστε ἐπεὶ οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶ, διὰ τὸ ἀντίστροφον

* Si ab sit ad $\alpha\beta$ sicut β ad b, erit [per 16.6.] abb ipsi $\alpha\beta\beta$ æquale, hoc est Conus Cono.



να ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ· ὁ ἄρα ΚΗΓΔ κῶνος τῷ ΒΘΕΖ κώνῳ ἴσος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, τουτέστι πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, τουτέστιν ἡ βάσις τοῦ ΑΗΓΔ κώνου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΒΘΕΖ κώνου, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ut ΓΔ ad EZ ita BΘ ad AH, hoc est AH ad HK. & quoniam circulus H ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad EZ, hoc est quam BΘ ad AH; habetque BΘ ad HK duplicatam rationem ejus quam BΘ ad AH: erit ut circulus H ad circulum Θ ita BΘ ad KH; conus igitur KHΓΔ [per 15.12.] cono BΘEZ est æqualis. ut autem ΓΔ ad EZ ita est AH ad HK; & ut AH ad HK ita [per 14.12.] AHΓΔ conus ad conum KHΓΔ, hoc est ad conum BΘEZ: ergo ut ΓΔ ad EZ ita AHΓΔ conus ad conum BΘEZ. sed circulus H ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad EZ: circulus igitur H ad circulum Θ, hoc est basis coni AHΓΔ ad basim coni BΘEZ, duplicatam rationem habet ejus quam habet conus AHΓΔ ad conum BΘEZ. quod erat demonstrandum. †

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛʹ.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι ὀρθοὶ διπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἴσω ὁ ΑΗ ἄξων τῷ ΒΘ ἴσος· λέγω ὅτι ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς

Prop. LVI. *Theor.*

Recti coni æquealti duplicatam inter se rationem habent ejus quam habent triangula per axes.

Describantur iidem coni, & sit axis AH æqualis ipsi BΘ: dico conum AHΓΔ ad

* Si *b b* ad *β β* duplicatam habeat rationem Coni ad Conum, sive ipsius *a b b* ad *a β β*, erit *b* ad *β* sicut *a b b* ad *a β β*; adeoque *a b* ipsi *a β* æquale erit.

† Si *a b* sit æquale ipsi *a β*, erit *a b b* ad *a β β* sicut *b* ad *β*: unde *b b* erit ad *β β* (quæ sunt ut bases Conorum) in duplicata ratione ipsorum Conorum, sive ejus quam habet *a b b* ad *a β β*.

conum

triangula per axes: ipsi æque-alti erunt.

DEscribantur coni, & ponatur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam habere rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ: dico ΑΗ ipsi ΒΘ æqualem esse.

Ponatur enim triangulo ΒΕΖ æquale triangulum ΚΓΔ. & quoniam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ; est autem triangulum ΒΕΖ æquale triangulo ΚΓΔ: habebit igitur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ, hoc est quam ΑΗ ad ΗΚ, hoc est quam conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ ita ΚΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ. quoniam igitur conorum ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ triangula per axem ΚΓΔ, ΒΕΖ æqualia sunt, basis coni Η ad basim Θ duplicatam rationem habebit ejus quam conus ΚΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ, ut in quinquagesima quinta hujus demonstratum est. sed ut conus ΚΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ, & ita recta ΑΗ ad ΗΚ: circulus igitur Η ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗ ad ΗΚ. sed & duplicatam habet rationem ejus quam diameter ΓΔ ad diametrum ΕΖ: ergo ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗ ad ΗΚ. itaque quoniam triangulum ΚΓΔ triangulo ΒΕΖ est æquale, erit [per 16. 6.] ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΚΗ. [ostensum est autem ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗ ad ΗΚ;] quare ut ΒΘ ad ΚΗ ita ΑΗ ad ΗΚ: æqualis igitur est ΑΗ ipsi ΒΘ. quod erat demonstrandum. †

ψεῖς ἔσονται οἱ κῶνοι.

ΚΑταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΘ.

Κείσθω τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΚΓΔ τρίγωνον. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, ἴσον δὲ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον οὕτως ὁ ΚΗΓΔ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ τῶν ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ κώνων τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΚΓΔ, ΒΕΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἡ ἄρα Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ νε. πρὸ τούτου θεωρήματι. ὡς δὲ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, καὶ ἡ ΑΗ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΚ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ. ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον οὗ ὃν ἔχει ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΚΓΔ τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ ἀντιπεπόνθασιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ. ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ.

* Si a fuerit ipsi α æqualis, erit abb ad αββ sicut aabb ad ααββ, hoc est in duplicata ratione ejus quam habet ab ad αβ sive aβ.

† Si abb sit ad αββ sicut aabb ad ααββ, erit a ad α sicut aa ad αα, ac proinde a ipsi α æqualis.

ΠΡΟ-

δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει οὗ περ ἔχει τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἑνὸς θεωρήματι· ὡς ἄρα τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

... ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam habet ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ, ut demonstratum est in quinquagesima sexta hujus: quare ut ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ: triangulum igitur ΑΓΔ triangulo ΒΕΖ est æquale. quod erat demonstrandum. *

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἀντιπεπόνθασιν οἱ κῶνοι τοῖς ἄξοσιν.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον εἶναι· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐπεὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστί· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπεὶ δὴ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ. ἀλλ' ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση ἐστί· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ ἄξονα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LIX. *Theor.*

Si triangula per axes inter se æqualia sint; erunt coni suis axibus reciproce proportionales.

PONATUR ΑΓΔ triangulum triangulo ΒΕΖ æquale: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita esse axem ΒΘ ad axem ΑΗ.

In eadem enim figura & constructione, quoniam triangulum ΑΓΔ æquale est triangulo ΒΕΖ; erit ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad ΚΕΖ triangulum. sed conus ΑΗΓΔ ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ; & ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet triangulum ΒΕΖ ad ipsum ΚΕΖ, hoc est quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita conus ΒΘΕΖ ad ΚΘΕΖ, hoc est ita ΒΘ ad ΘΚ. est autem ΘΚ ipsi ΑΗ æqualis; igitur ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘ axis ad axem ΑΗ. quod erat demonstrandum. †

* Si abb sit ad $\alpha\beta\beta$ sicut α ad a, erit [per 16.6.] $aabb$ ipsi $\alpha\alpha\beta\beta$ æquale, unde patet ab ipsi $\alpha\beta$ æquale esse.

† Si ab ipsi $\alpha\beta$ æquale sit, erit & $aabb$ ipsi $\alpha\alpha\beta\beta$ æquale, adeoque ἀνάλογον abb erit ad $\alpha\beta\beta$, sive conus ad conum, sicut α ad a, hoc est reciproce ut axes.

ad conum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΗΓΔ. sed ut conus ΑΗΓΔ ad ΚΗΓΔ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad ipsum ΚΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam ΒΘΕΖ conus ad conum æquealtum ΚΗΓΔ. conus autem ΒΘΕΖ ad ipsum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ, per quinquagesimam sextam huj. ergo triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ quadruplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΓΔ: & propterea triangulum ΑΓΔ ad ipsum ΒΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam triangulum ΒΕΖ habet ad triangulum ΚΓΔ. sed ut triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ ita ΕΖ ad ΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΕΖ ad ΓΔ. * quod erat demonstrandum.

τ̃ ΚΗΓΔ· ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τ̃ ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τ̃ ΚΗΓΔ. ἀλλ' ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΚΗΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXI. *Theor.*

Si conorum rectorum triangula per axem inter se triplicatam rationem habeant ejus quam habent eorum bases inter se reciproce; hi coni suis basibus reciproce proportionales sunt.

IN eadem figura & constructione habeat ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam basis trianguli ΕΖ ad basim ΓΔ: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita esse circulum Θ basim coni ΒΘΕΖ ad circulum Η basim coni ΑΗΓΔ.

Quoniam enim ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ ad ΓΔ; ut autem ΕΖ ad ΓΔ ita ΒΕΖ tri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Καὶ ἐὰν κώνων ὀρθῶν τὰ διὰ τ̃ ἀξόνων τρίγωνα τριπλασίονα λόγον ἔχῃ πρὸς ἄλληλα ἤπερ αἱ τ̃ τριγώνων βάσεις πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως· οὗτοι ταῖς βάσεσιν ἀντιπεπόνθασιν.

ΕΠΙ γὰρ τ̃ αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐχέτω τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ βάσις τ̃ τριγώνου πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν· λέγω δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τ̃ ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις τ̃ κώνου πρὸς τὴν Η βάσιν.

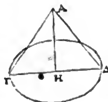
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον

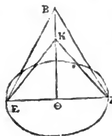
* Si abb sit ad $a\beta\beta$ sicut $\beta\beta$ ad bb, erit [per 16.6.] ab^2 ipsi $a\beta^2$ æquale, ac proinde ἀνάλογον ab erit ad $a\beta$ sicut β^2 ad b^2.

πρὸς

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΕΖ.

Ἔστω τῇ ΑΗ ἡ ΘΚ ἴση· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ἰσοϋψεῖς ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς δὲ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἰσοϋψεῖς εἰσιν οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη. ὡς δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, καὶ τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ





Describantur coni, & ponatur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habere ejus quam habet basis coni Η ad basim Θ: dico triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam habere rationem ejus quam ΓΔ basis trianguli ad basim ΕΖ.

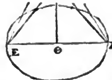
Sit ipsi ΑΗ æqualis ΘΚ, & erunt coni æque-alti ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ inter sese sicut bases. quoniam igitur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet basis Η ad basim Θ; ut autem basis Η ad Θ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum. & quoniam coni ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ æque-alti sunt; habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ, id quod [ad 56. huj.] demonstratum est. ut autem ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita est conus ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum, & ita ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ: ergo ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ duplicatam rationem habet ejus

* Si vero αb sit ad $\alpha\beta$ sicut β^3 ad b^3; erit, ut prius, αb^4 ipsi $\alpha\beta^4$ æquale, adeoque ἀνάλογον αbb erit ad $\alpha\beta\beta$ sicut $\beta\beta$ ad bb, hoc est conus ad conum sicut basis ad basim reciproce.

quam

ut autem ΓΔ ad EZ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum KEZ: habebit ΑΓΔ triangulum ad triangulum BEZ triplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ





ad ipsum KEZ: ergo KEZ triangulum ad triangulum BEZ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ ad triangulum KEZ. sed ut triangulum KEZ ad triangulum BEZ ita conus KΘEZ ad conum BΘEZ: conus igitur KΘEZ ad conum BΘEZ duplicatam rationem habebit ejus quam *ΑΓΔ triangulum ad triangulum KEZ. habet autem & ΑΗΓΔ conus ad conum æque-altum KΘEZ duplicatam rationem ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum KEZ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum KΘEZ ita KΘEZ ad conum BΘEZ: & idcirco ΑΗΓΔ conus ad conum BΘEZ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΑΗΓΔ ad conum KΘEZ, hoc est quam basis H ad Θ basim. quod erat demonstrandum. †

ἢ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· ὁ ἄρα ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον ἰσοϋψὴς διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν.

* Si abb fuerit ad $\alpha\beta\beta$ sicut b^3 ad β^3; erit ab ad $\alpha\beta$ sicut b^3 ad β^3; itemque a ad α sicut bb ad $\beta\beta$: unde patet Conorum bases (hoc in casu) suis altitudinibus directe esse proportionales.

† Si ab sit ad $\alpha\beta$ sicut b^3 ad β^3; erit abb ad $\alpha\beta\beta$ sicut b^4 ad β^4, hoc est, Coni erunt inter se in duplicata ratione basis ad basim.

F I N I S.

